

УДК 539.3

**В. Б. Говоруха**, канд. физ.-мат. наукДнепропетровский национальный университет  
(E-mail: govorukhavb@yahoo.com)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОБОЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

*Рассмотрена модель трещины с зонами электрического предразрушения в однородном пьезокерамическом материале. Считая, что зоны электрического предразрушения локализованы на продолжении трещины и на них имеет место лишь скачок электрического потенциала, получено точное аналитическое решение задачи, а также уравнение для определения длины зоны предразрушения, коэффициентов интенсивности и скорости освобождения энергии. Изучено влияние внешнего электрического поля на основные параметры разрушения.*

*Розглянуто модель тріщини з зонами електричного передруйнування в однорідному п'єзокерамічному матеріалі. Вважаючи, що зони електричного передруйнування локалізована на продовженні тріщини і на них має місце лише стрибок електричного потенціалу, одержано точний аналітичний розв'язок задачі, а також рівняння для визначення довжини зон передруйнування, коефіцієнтів інтенсивності та швидкості звільнення енергії. Вивчено вплив зовнішнього електричного поля на основні параметри руйнування.*

Развитие электроники, электроакустики, измерительной техники привело в последние годы к интенсивному развитию новых областей физики диэлектриков. Одно из таких направлений связано с изучением взаимодействия электрических и механических полей при пьезоэлектрическом эффекте. В настоящее время существуют различные технические устройства, в которых успешно используются пьезоэлектрические материалы. Однако наличие в реальных пьезоэлектрических материалах дефектов типа трещин, надрезов, полостей и т.д. может привести к существенному снижению механической и электрической прочности элементов конструкций, изготовленных из таких материалов. В этой связи представляет интерес исследование сопряженных электроупругих полей вблизи различного рода дефектов в пьезоэлектрических материалах.

К настоящему моменту достигнут существенный прогресс в исследовании разрушения пьезоэлектрических материалов для случая плоских задач [1–3]. При этом математическая теория трещин, основанная на энергетическом подходе Гриффитса, оказалась весьма плодотворной для теоретического изучения различных аспектов процесса разрушения и при разработке практических методов расчета на прочность элементов конструкций. Однако многие явления, выявленные в результате экспериментальных исследований, не находят надлежащего объяснения в рамках этой теории [4]. Известно [5], что в некоторой окрестности вершин трещины под действием внешней нагрузки наблюдается резкое увеличение напряженности электрического поля, превосходящее ее максимально допустимое значение, что, в свою очередь, может быть причиной электрического пробоя пьезоэлектрика. В связи с этим количественное описание процесса взаимодействия электрических и механических полей в таких областях в рамках классических положений линейной теории электроупругости не представляется возможным. Для устранения указанных противоречий, по аналогии с известной моделью Леонова–Панасюка–Дагдейла [6], в работе [7] предложена расчетная модель пьезоэлектрического тела с трещиной, предполагающая наличие в полосе на продолжении трещины зон электрического предразрушения. При этом считается, что значение нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля в таком теле не

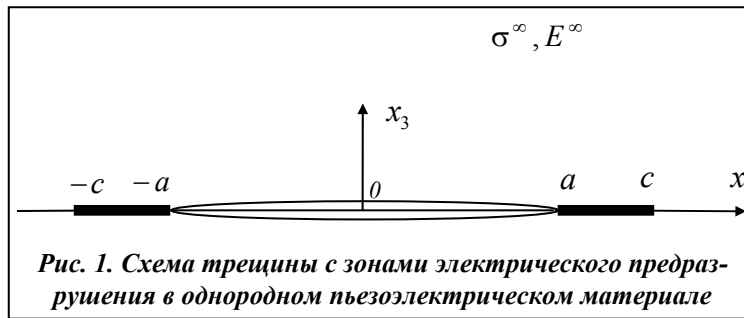


Рис. 1. Схема трещины с зонами электрического предразрушения в однородном пьезоэлектрическом материале

превосходит величины  $E_s$  – максимально допустимого значения напряженности электрического поля.

Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении. В ней строится точное аналитическое решение соответствующей граничной задачи электроупругости.

сти, формулируются основные параметры разрушения рассматриваемой модели, а также приводятся формулы для распределения механических и электрических величин в окрестности вершин трещины.

Рассмотрим электроупругое состояние в окрестности туннельной трещины в неограниченной среде из поляризованной пьезокерамики гексагонального класса симметрии 6mm. Пусть прямолинейная трещина располагается в плоскости  $x_3 = 0$  на участке  $|x_1| < a$ ,  $|x_2| < \infty$ , причем вектор предварительной поляризации коллинеарен оси  $Ox_3$  (рис. 1). Будем рассматривать задачу для случая плоской деформации при условии, что на берегах трещины отсутствуют свободные электрические заряды и механическая нагрузка, а на бесконечности заданы постоянное растягивающее напряжение  $\sigma_{33} = \sigma^\infty$  и нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля  $E_3 = E^\infty$ .

В соответствии с моделью [7] и на основании симметрии задачи введем зоны электрического предразрушения на продолжении трещины  $a < |x_1| < c$ , где допускается скачок лишь электрического потенциала, а для нормальной компоненты напряженности электрического поля выполняется условие  $E_3(x_1, 0) = E_s$ . Положение точки  $c$  пока неизвестно.

При условии, что электроупругое состояние не зависит от координаты  $x_2$ , компоненты тензора механических напряжений, вектора электрической индукции, а также скачки перемещений и электрического потенциала можно представить следующим образом [9]:

$$[[\mathbf{V}'(x_1, 0)]] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (1)$$

$$\mathbf{t}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (2)$$

где  $\mathbf{V}(x_1, 0) = [u_1(x_1, 0), u_3(x_1, 0), \varphi(x_1, 0)]^T$ ;  $\mathbf{W}(z) = [W_1(z), W_2(z), W_3(z)]^T$  – кусочно-аналитическая функция, обращающаяся в нуль на бесконечности,  $\mathbf{W}^\pm(x_1) = \lim_{x_3 \rightarrow \pm 0} \mathbf{W}(z)$ ,

$\mathbf{t}(x_1, 0) = [\sigma_{13}(x_1, 0), \sigma_{33}(x_1, 0), D_3(x_1, 0)]^T$ ,  $z = x_1 + ix_3$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Символ  $[[\cdot]]$  – обозначает скачок соответствующей функции на границе  $x_3 = 0$ .

Следует отметить, что соотношения (1), (2) были получены в [9] для пьезоэлектрического биматериала. В случае однородного материала, относящегося к гексагональному классу симметрии 6mm, имеет место соотношение  $\overline{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}$ , и матрица  $\mathbf{G}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{G} = i \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix},$$

где  $g_{11}$ ,  $g_{33}$ ,  $g_{34}$ ,  $g_{43}$ ,  $g_{44}$  – действительные константы, зависящие от характеристик материала [9].

Ввиду симметрии электроупругого состояния относительно оси  $x_3$  получаем

$$[[u_1(x_1, 0)]] = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, 0) = 0, \quad -\infty < x_1 < \infty. \quad (3)$$

С учетом (3), соотношения (1), (2) принимают вид

$$\begin{pmatrix} [u'_3(x_1, 0)] \\ [\varphi'(x_1, 0)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3^+(x_1) - W_3^-(x_1) \\ W_4^+(x_1) - W_4^-(x_1) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{33}(x_1, 0) \\ D_3(x_1, 0) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} g_{33} & g_{34} \\ g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1) \\ W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Используя уравнения пьезоэффекта [8], получим также выражение для нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля при  $x_3 = 0$

$$E_3(x_1, 0) = ie_1 [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)] + ie_2 [W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)], \quad (6)$$

где  $e_1, e_2$  – действительные константы, зависящие от характеристик материала, выражение для которых не приводятся здесь из-за их громоздкости.

Таким образом, формулы (4)–(6) позволяют выразить основные физические величины через две кусочно-аналитические функции  $W_3(z)$  и  $W_4(z)$ .

Согласно принципу суперпозиции исходное электроупругое состояние, возникающее в рассматриваемом пьезоэлектрическом теле с трещиной, можно представить в виде суммы: состояния сплошного тела под действием на бесконечности постоянной электромеханической нагрузки

$$\sigma_{33}^{(0)}(x_1, x_3) = \sigma^\infty, \quad D_3^{(0)}(x_1, x_3) = D^\infty, \quad E_3^{(0)}(x_1, x_3) = E^\infty,$$

где  $D^\infty = \left( \frac{c_{11}e_{33} - c_{13}e_{31}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} \right) \sigma^\infty + \left( \varepsilon_{33} + \frac{c_{33}e_{31}^2 - 2c_{13}e_{31}e_{33} + c_{11}e_{33}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} \right) E^\infty$ ;  $c_{11}, c_{13}, c_{33}$  – модули упругости;  $e_{31}, e_{33}$  – пьезоэлектрические константы;  $\varepsilon_{33}$  – диэлектрическая проницаемость и состояния тела с трещиной, когда на ее берегах заданы следующие условия:

$$\sigma_{33}(x_1, 0) = -\sigma^\infty, \quad D_3(x_1, 0) = -D_3^\infty, \quad |x_1| < a, \quad (7)$$

$$u_3^+(x_1, 0) = u_3^-(x_1, 0), \quad E_3(x_1, 0) = E_s - E^\infty, \quad a < |x_1| < c. \quad (8)$$

Подставляя соотношения (5) в граничные условия (7), имеем

$$\begin{aligned} ig_{33} [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)] + ig_{34} [W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)] &= -\sigma^\infty, \\ ig_{43} [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)] + ig_{44} [W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)] &= -D^\infty, \quad |x_1| < a, \end{aligned}$$

Исключив из этой системы  $W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)$ , получаем краевую задачу сопряжения для нахождения кусочно-аналитической функции  $W_3(z)$  с линией скачков  $|x_1| < a$ , граничные значения которой удовлетворяют условию

$$W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1) = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} i, \quad |x_1| < a. \quad (9)$$

Решение задачи (9) в соответствии с [10] имеет вид

$$W_3(z) = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{2i(g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43})} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right). \quad (10)$$

С учетом зависимости (6), найдем значение напряженности электрического поля при  $|x_1| < a$

$$E_0 = E_3(x_1, 0) = \frac{e_2(g_{43}\sigma^\infty - g_{33}D^\infty) - e_1(g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty)}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} + E^\infty.$$

Из этой формулы следует, что напряженность электрического поля на берегах раскрытой трещины является постоянной величиной, которая зависит от характеристик материала и внешней нагрузки.

Используя далее соотношения (4)–(6) и представление (10), из условий (7), (8) получим

$$W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1) = -\frac{g_{43}\sigma^\infty - g_{33}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}}i, \quad |x_1| < a \quad (11)$$

$$W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1) = \frac{E_s - E^\infty}{ie_2} - \frac{e_1(g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty)}{ie_2(g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43})} \left( \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} - 1 \right), \quad a < |x_1| < c,$$

где функция  $W_4(z)$  является аналитической на всей плоскости  $(x_1, x_3)$  за исключением участка  $|x_1| < c$ .

Решение задачи (11) имеет вид

$$W_4(z) = \frac{E^\infty - E_0}{ie_2} f_c(z) + \frac{E_s - E_0}{ie_2} g_0(z) - \frac{e_1}{e_2} W_3(z), \quad (12)$$

где  $g_0(z) = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arccctg} \left( \frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \arccos \left( \frac{a}{c} \right) \right], f_c(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} - 1 \right).$

Формулы (10), (12) позволяют определить в явном виде основные компоненты электромеханического поля в плоскости  $x_3 = 0$ . В частности, принимая во внимание, что для  $|x_1| > c$  справедливо соотношение  $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1)$ , из уравнения (6) получаем

$$E_3(x_1, 0) = \left[ E^\infty - E_0 - \frac{2}{\pi} (E_s - E_0) \arccos \left( \frac{a}{c} \right) \right] \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - c^2}} + \frac{2}{\pi} (E_s - E_0) \operatorname{arccctg} \left( \frac{a}{x_1} \sqrt{\frac{x_1^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) + E_0, \quad |x_1| > c. \quad (13)$$

Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля, представленная выражением (13), при произвольном месторасположении точки  $c$  становится неограниченной при  $x_1 \rightarrow c$ , что противоречит свойствам рассматриваемой модели. Следовательно, месторасположение точки  $c$  должно быть таким, чтобы условие ограниченности  $E_3(x_1, 0)$  выполнялось при  $x_1 \rightarrow c$ . Этим условием, как следует из выражения (13), является равенство нулю выражения в квадратных скобках, что дает нам следующую формулу для определения расположения точки  $c$ :

$$\arccos \left( \frac{a}{c} \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{E^\infty - E_0}{E_s - E_0} \right). \quad (14)$$

Пользуясь равенством (14), выражение (13) можно преобразовать к такому виду:

$$E_3(x_1, 0) = \frac{2}{\pi} (E_s - E_0) \operatorname{arccctg} \left( \frac{a}{x_1} \sqrt{\frac{x_1^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) + E_0, \quad |x_1| > c. \quad (15)$$

Исходя из соотношений (4), распределение напряжения  $\sigma_{33}(x_1, 0)$  и электрической индукции  $D_3(x_1, 0)$  на участке  $a < |x_1| < c$  определяется формулами

$$\sigma_{33}(x_1, 0) = i \left( g_{33} - \frac{g_{34}e_1}{e_2} \right) [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)] + \frac{g_{34}}{e_2} (E^\infty - E_0) [f_c^+(x_1) + f_c^-(x_1)] + \frac{g_{34}}{e_2} (E_s - E_0) [g_0^+(x_1) + g_0^-(x_1)] + \sigma^\infty,$$

$$D_3(x_1, 0) = i \left( g_{43} - \frac{g_{44}e_1}{e_2} \right) [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)] + \\ + \frac{g_{44}}{e_2} (E^\infty - E_0) [f_c^+(x_1) + f_c^-(x_1)] + \frac{g_{44}}{e_2} (E_s - E_0) [g_0^+(x_1) + g_0^-(x_1)] + D^\infty.$$

Учитывая, что на этом участке выполняются соотношения

$$W_3^+(x_1) = W_3^-(x_1), \quad f_c^+(x_1) + f_c^-(x_1) = -1, \quad g_0^+(x_1) + g_0^-(x_1) = 1,$$

имеем

$$\sigma_{33}(x_1, 0) = \left( g_{33} - \frac{g_{34}e_1}{e_2} \right) \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} + \frac{g_{34}}{e_2} (E_s - E_0), \quad a < |x_1| < c, \quad (16)$$

$$D_3(x_1, 0) = \left( g_{43} - \frac{g_{44}e_1}{e_2} \right) \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} \left[ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} - 1 \right] + \frac{g_{44}}{e_2} (E_s - E^\infty) + D^\infty, \quad a < |x_1| < c. \quad (17)$$

Анализ формул (16), (17) показывает, что в окрестности вершины трещины напряжения и электрическая индукция, в рамках рассматриваемой модели, остаются сингулярными. Эта сингулярность носит корневой характер и характеризуется коэффициентами интенсивности

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{33}(x_1, 0), \quad K_4 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} D_3(x_1, 0),$$

которые на основании (16), (17) определяются формулами

$$K_1 = \sqrt{\pi a} \left( g_{33} - \frac{g_{34}e_1}{e_2} \right) \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}}, \quad (18)$$

$$K_4 = \sqrt{\pi a} \left( g_{43} - \frac{g_{44}e_1}{e_2} \right) \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}}. \quad (19)$$

Определим далее скачок перемещения  $u_3$  и электрического потенциала  $\varphi$  в плоскости трещины. Из соотношений (4) получаем

$$[[u_3'(x_1, 0)]] = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{i(g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43})} [f_a^+(x_1) - f_a^-(x_1)], \quad |x_1| < a, \quad (20)$$

$$[[\varphi'(x_1, 0)]] = \frac{E^\infty - E_0}{ie_2} [f_c^+(x_1) - f_c^-(x_1)] + \frac{E_s - E_0}{ie_2} [g_0^+(x_1) - g_0^-(x_1)] - \frac{e_1}{e_2} [[u_3'(x_1, 0)]], \quad |x_1| < c \quad (21)$$

где  $f_a(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right)$ .

Преобразовав выражения (20), (21) с учетом известных соотношений [6]

$$f_a^+(x_1) - f_a^-(x_1) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \quad f_c^+(x_1) - f_c^-(x_1) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - c^2}}$$

$$g_0^+(x_1) - g_0^-(x_1) = -\frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{a}{c}\right) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - c^2}} - \frac{1}{2\pi i} [\Gamma(c, x_1, a) - \Gamma(c, x_1, -a)] - \frac{e_1}{e_2} [[u_3'(x_1, 0)]], \quad |x_1| < c$$

где  $\Gamma(l, x, \xi) = \ln \frac{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}$ ,

запишем их для реальной длины зоны электрического предразрушения в следующем виде:

$$[[u'_3(x_1, 0)]] = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{i(g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43})} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \quad |x_1| < a,$$

$$[[\varphi'(x_1, 0)]] = \frac{E_s - E_0}{2\pi e_2} [\Gamma(c, x_1, a) - \Gamma(c, x_1, -a)] - \frac{e_1}{e_2} [[u'_3(x_1, 0)]], \quad |x_1| < c.$$

Интегрируя последние соотношения, получаем

$$[[u_3(x_1, 0)]] = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} \sqrt{a^2 - x_1^2}, \quad |x_1| < a, \quad (22)$$

$$[[\varphi(x_1, 0)]] = \frac{E_s - E_0}{2\pi e_2} [(x_1 - a)\Gamma(c, x_1, a) - (x_1 + a)\Gamma(c, x_1, -a)] - \frac{e_1}{e_2} [[u_3(x_1, 0)]], \quad |x_1| < c. \quad (23)$$

При этом скачок перемещения в вершине трещины равен нулю, а электрического потенциала определяется следующим образом:

$$\delta_\varphi = [[\varphi(x_1, 0)]] = -\frac{2a(E_s - E_0)}{\pi e_2} \ln\left(\frac{a}{c}\right).$$

Согласно [2] имеем выражение для скорости освобождения электроупругой энергии при продвижении правой вершины трещины

$$G = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_a^{a+\Delta l} (\sigma_{33}(x_1, 0) [[u_3(x_1 - \Delta l, 0)]] + D_3(x_1, 0) [[\varphi(x_1 - \Delta l, 0)]]) dx_1. \quad (24)$$

Подставив (16), (17) и (22), (23) в (24), находим следующее выражение для скорости освобождения электроупругой энергии

$$G = \frac{1}{4} \mathbf{K}^T \mathbf{H} \mathbf{K}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{K} = (K_1, K_4)^T$ ,  $\mathbf{H} = \frac{1}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} \begin{pmatrix} g_{44} & -g_{34} \\ -g_{43} & g_{33} \end{pmatrix}$ .

Результаты вычисления длины зоны электрического предразрушения, коэффициентов интенсивности  $K_1$  и  $K_4$  для  $a = 0,01$  м,  $\sigma^\infty = 10$  МПа и различных значений  $E^\infty/E_s$  приведены в таблице. В расчетах использовались данные о физико-механических свойствах пьезо-керамики PZT-4, приведенные в [8]. Из полученных результатов следует, что величины  $c$ ,  $K_1$  и  $K_4$  растут нелинейным образом с ростом электрической нагрузки  $E^\infty/E_s$ .

**Результаты расчетов**

$\frac{E^\infty}{E_s}$	$\frac{c - a}{2a}$	$\frac{K_1}{\sqrt{a}\sigma^\infty}$	$\frac{K_4}{\sqrt{a}D^\infty} \cdot 10^{-3}$
0,2	0,411	2,401	-4,916
0,4	0,682	2,491	-4,461
0,6	1,238	2,581	-4,107
0,8	2,932	2,671	-3,824

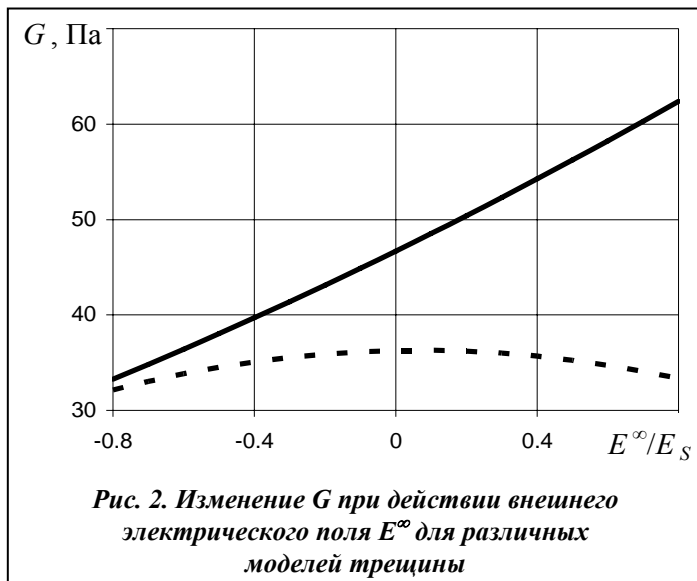
На рис. 2 приведены графики, характеризующие изменение скорости освобождения электроупругой энергии в зависимости от  $E^\infty/E_s$ . Сплошная линия соответствует скорости освобождения энергии в рамках рассматриваемой модели, пунктирная – в рамках линейной модели трещины [2].

Как видно из графика, использование линейной модели трещины приводит к выводу, что увеличение электрической нагрузки, независимо от ее знака, препятствует развитию трещины. Однако это противоречит известным результатам экспериментальных исследова-

ний [4]. С другой стороны, использование рассматриваемой модели с зонами электрического предразрушения показывает, что положительное электрическое поле способствует процессу разрушения, а отрицательное – препятствует, что полностью согласуется с результатами экспериментов.

### Литература

1. Кудрявцев Б. А. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником / Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракин // Прикл. математика и механика – 1975. – 39, № 1. – С. 149–159.
2. Партон В. З. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
3. Калоеров С. А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела с полостями и плоскими трещинами / С. А. Калоеров, А. И. Баева, Ю. А. Глушенко // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 64–79.
4. Park S. Fracture criteria for piezoelectric materials / S. Park, C. T. Sun // J. Am. Ceram. Soc. – 1995. – 78. – P. 1475–1480.
5. Партон В. З. Об одном критерии электрического разрушения диэлектриков в сильно неоднородных полях / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев, Н. А. Сенник. // Докл. АН СССР. – 1988. – 298, № 3. – С. 611–615.
6. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 248 с.
7. Zhang T. Y. Fracture behaviors of piezoelectric materials / T. Y. Zhang, C. F. Gao. // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2004. – 41. – P. 339–379.
8. Гринченко В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5).
9. Herrmann K. P. On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, V. B. Govorukha // Int. J. Frac. – 2001. – 111. – P. 203–227.
10. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.



Поступила в редакцию  
03.04.08