

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ВОЛН

УДК 535.37.421

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА РЕШЁТКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ ГИРОМАГНИТНОЙ СРЕДЫ

А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук, А. С. Троцило

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: sbornik@ire.kharkov.ua*

Предложен новый метод решения задач дифракции электромагнитных волн на ленточных решётках, расположенных на границе гиротропных ферромагнитных сред. В основе этого метода лежит процедура аналитической регуляризации, использующая явное решение краевой задачи Римана – Гильберта с коэффициентом сопряжения, зависящим от частоты возбуждающей волны.

Разработаны численные алгоритмы и компьютерные программы, реализующие этот метод. Проведены исследования зависимости коэффициента отражения ленточной решётки с идеальной ферромагнитной средой от частоты возбуждающей волны. Установлен частотный диапазон, где имеет место явление полного отражения E -поляризованной плоской волны.

В длинноволновой области для амплитуд основных гармоник дифракционного спектра получены приближённые формулы. Установлен частотный диапазон, где они могут быть использованы. Ил. 5. Табл. 1. Библиогр.: 23 назв.

Ключевые слова: ленточная решётка, гирромагнитная среда, система парных сумматорных уравнений, метод аналитической регуляризации, дифракция волн.

В настоящее время актуальными являются исследования процессов распространения, дифракции и излучения электромагнитных волн при наличии границы раздела различных сред: магнетиков, ферромагнетиков, плазменноподобных и киральных сред, метаматериалов и др. [1-3]. Это обусловлено, с одной стороны, развитием технологий синтеза новых материалов, обладающих в микроволновом диапазоне ранее неизвестными свойствами, а с другой – потребностями в разработке высокоотражающих и поглощающих электромагнитные волны периодических структур с управляемыми рассеивающими свойствами [4]. В связи с этим несомненный интерес представляют электродинамические структуры, образованные различного типа дифракционными решётками и слоями из магнитоактивных сред [5, 6]. Как было показано в работах [5, 6], наличие на границе раздела таких сред решётки приводит к появлению специфических резонансных эффектов. Кроме того, присущие магнитоактивным средам эффекты, как например, эффект невязимости [7-9], эффект Фарадея [8, 9] и др. в присутствии периодической границы также могут проявляться необычным образом.

К настоящему времени дифракция волн на плоских металлических решетках как в свободном пространстве, так и с различного типа однородными изотропными средами, а также с анизотропными средами, когда между плоскостью решётки и границей соответствующей среды находится вакуумный или изотропный магнитодиэлектрический слой, исследована достаточно полно (см., например [10-12] и содержащуюся в них библиографию, а также [13, 14]). Однако следует отметить, что непосредственное применение традиционных ме-

тодов [10-14] для решения задач дифракции волн на металлических решетках, расположенных на границах гиротропных сред, сталкивается с трудностями, обусловленными тем, что эти методы не учитывают поведение дифракционного поля в окрестности геометрических сингулярностей решеток, находящихся на границах раздела гиротропных сред [15].

Исследованию дифракции волн на ленточной металлической решётке, расположенной на границе среды, материальные параметры которой ε и μ - в общем недиагональные тензоры, посвящена работа [16], где исходная краевая задача дифракции сведена к интегральному сингулярному уравнению. В результате применения к последнему квадратурных формул [17] была получена система линейных алгебраических уравнений первого рода, решение которой требует проведения дополнительных исследований, например, на устойчивость решения, на скорость роста числа обусловленности с увеличением размера соответствующих матриц и др. [18].

Цель настоящей работы - создание строгого, в математическом отношении, метода решения задач дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких, идеально проводящих ленточных решётках, расположенных на границах гиротропных ферромагнитных сред, и проведение исследований зависимости коэффициента отражения от частоты возбуждающей волны при вариациях магнитных, диэлектрических и геометрических параметров указанного типа открытых периодических структур.

1. Постановка задачи. Решётка, образованная бесконечно тонкими идеально проводя-

щими лентами параллельными оси Oz с периодом l и шириной щели d , расположена в плоскости $x=0$ (рис. 1).

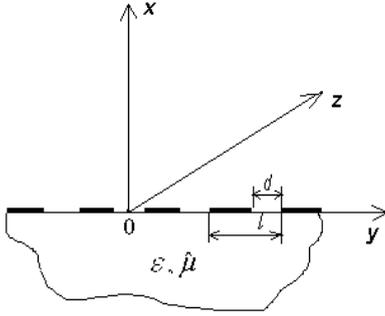


Рис. 1. Поперечное сечение структуры

Полупространство $\{(x, y): |y| < \infty, x < 0\}$ заполнено однородной гиромагнитной средой (ферритом) с диэлектрической проницаемостью ε ($\varepsilon > 1$) и тензором магнитной проницаемости среды (постоянное магнитное поле \vec{H}_0 полагается параллельным оси Oz)

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где

$$\mu = 1 - \frac{\kappa_H \kappa_M}{\kappa^2 - \kappa_H^2}; \quad \mu_a = \frac{\kappa \kappa_M}{\kappa^2 - \kappa_H^2},$$

а

$$\kappa_H = \frac{\omega_H l}{2\pi c}; \quad \kappa_M = \frac{\omega_M l}{2\pi c}; \quad \kappa = \frac{\omega l}{2\pi c}.$$

Здесь ω - частота падающего (первичного) поля, $\omega_H = |\zeta| H_0$ - круговая частота ферромагнитного резонанса; $\omega_M = 4\pi M |\zeta|$ - частота, характеризующая намагниченность до насыщения среды (ζ - гиромагнитное отношение для электрона, см. [8, 9]); c - скорость света в вакууме.

В полупространстве $\{(x, y): |y| < \infty, x < 0\}$ вдоль оси x (нормальное падение) распространяется плоская E -поляризованная электромагнитная волна вида e^{-ikx} ($k = \omega/c$, временная зависимость характеризуется множителем $e^{-i\omega t}$, который в дальнейшем опускается).

Требуется определить функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$, являющиеся решением следующей краевой задачи:

а) $U_1(x, y)$, $U_2(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \mu \Delta U_2(x, y) + k^2 \varepsilon (\mu^2 - \mu_a^2) \times \\ \times U_2(x, y) = 0, \quad x < 0 \\ \Delta U_1(x, y) + k^2 U_1(x, y) = 0, \quad x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

б) условию периодичности

$$U_j(x, y \pm l) = U_j(x, y), \quad j=1, 2; \quad (2)$$

в) граничным условиям на лентах решётки

$$U_1(0, y) = -1, \quad U_2(0, y) = 0, \quad |y + nl| > \frac{d}{2} \quad (3)$$

и соответственно на щелях

$$\frac{\partial U_1(0, y)}{\partial x} - \varepsilon \left(\mu \frac{\partial U_2(0, y)}{\partial x} - i\mu_a \frac{\partial U_2(0, y)}{\partial y} \right) - ik = 0, \quad (4)$$

$$|y + nl| < \frac{d}{2}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

г) условию Мейкснера [18, 19] на любом компакте в плоскости XOY ;

д) условиям излучения

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= \sum_{(n)} a_n e^{i\Gamma_n x} e^{\frac{i2\pi n}{l} y}, \quad x > 0 \\ U_2(x, y) &= \frac{\sum_{(n)} b_n e^{-i\Gamma_n(\lambda)x} e^{\frac{i2\pi n}{l} y}}{\varepsilon(\mu^2 - \mu_a^2)}, \quad x < 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$k \operatorname{Re} \Gamma_n \geq 0, \quad \operatorname{Im} \Gamma_n \geq 0$$

$$k \operatorname{Re} \Gamma_n(\lambda) \geq 0, \quad \operatorname{Im} \Gamma_n(\lambda) \geq 0,$$

где

$$\Gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad \Gamma_n(\lambda) = \sqrt{k^2 \lambda - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2};$$

$$\lambda = \varepsilon \mu_{\perp}; \quad \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} = \frac{\kappa^2 - \kappa_1^2}{\kappa^2 - \kappa_0^2};$$

$\kappa_0 = \sqrt{\kappa_H(\kappa_H + \kappa_M)}$ - граничная частота магнитостатической волны и $\kappa_1 = \kappa_H + \kappa_M$ - антирезонансная частота.

Функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ связаны с $E_z(x, y)$ компонентой рассеянного поля следующим образом:

$$E_z(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y), & x > 0, \\ \varepsilon(\mu^2 - \mu_a^2) U_2(x, y), & x < 0. \end{cases}$$

Используя условие излучения (5) из уравнений Максвелла (Гельмгольца) получаем представления для компонент электромагнитного поля в виде:

$$E_z(x, y) = \begin{cases} e^{-ikx} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\Gamma_n x} e^{\frac{2\pi}{l}iny}, & x > 0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-i\Gamma_n(\lambda)x} e^{\frac{2\pi}{l}iny}, & x < 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$H_y(x, y) = \begin{cases} e^{-ikx} - \frac{1}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Gamma_n e^{i\Gamma_n x} e^{\frac{2\pi}{l}iny}, & x > 0, \\ \frac{1}{k\mu_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (\Gamma_n(\lambda) + \frac{2\pi i\tau}{l}n) e^{-i\Gamma_n(\lambda)x} e^{\frac{2\pi}{l}iny}, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь $\tau = \frac{\kappa\kappa_M}{\kappa^2 - \kappa_0^2}$, а a_n и b_n - подлежащие определению неизвестные амплитуды дифракционных гармоник.

2. Сведение граничной задачи к системе линейных алгебраических уравнений второго рода. Удовлетворяя условиям (3)-(4) с учетом (6) получаем систему парных сумматорных уравнений вида

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{\frac{2\pi}{l}iny} = 0, & |y| > \frac{d}{2} \\ \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} b_n |n| (\hat{\Gamma}_n(\lambda) + \mu_{\perp} \hat{\Gamma}_n + i\tau_n) e^{\frac{2\pi}{l}iny} = 2\kappa\mu_{\perp} - b_0 (\kappa\mu_{\perp} + \kappa\sqrt{\lambda}), & |y| < \frac{d}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\hat{\Gamma}_n = \sqrt{\frac{\kappa^2}{n^2} - 1}, \quad \hat{\Gamma}_n(\lambda) = \sqrt{\lambda \frac{\kappa^2}{n^2} - 1}, \quad \tau_n = \tau \operatorname{sign}(n).$$

Амплитуды дифракционных гармоник связаны между собой следующим образом: $b_0 = 1 + a_0$; $b_n = a_n$ при $n \neq 0$.

Проводя над (7) ряд элементарных преобразований [5, 6, 10-12, 18], получаем

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n e^{in\varphi} - \frac{1 + \mu_{\perp} - \tau}{1 + \mu_{\perp} + \tau} \sum_{n=1}^{-\infty} n b_n e^{in\varphi} = f(e^{i\varphi}), & |\varphi| < \theta, \\ \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} n b_n e^{in\varphi} = 0, & |\varphi| > \theta, \\ \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (-1)^n b_n = -b_0, & \varphi = \pi. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $\varphi = \frac{2\pi}{l}y$; $\theta = \frac{\pi d}{l}$; а функция $f(e^{i\varphi})$ представима в виде

$$f(e^{i\varphi}) = \kappa i b_0 \frac{\mu_{\perp} + \sqrt{\lambda}}{1 + \mu_{\perp} + \tau} - 2\kappa i \frac{\mu_{\perp}}{1 + \mu_{\perp} + \tau} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \Lambda_n |n| b_n \delta_n e^{in\varphi},$$

где

$$\Lambda_n = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ \frac{1 + \mu_{\perp} - \tau}{1 + \mu_{\perp} + \tau}, & n < 0; \end{cases}$$

$$\delta_n = 1 + i \frac{\hat{\Gamma}_n(\lambda) + \mu_{\perp} \hat{\Gamma}_n + i\tau_n}{1 + \mu_{\perp} + \tau_n}$$

Полученная система уравнений (8) представляет собой обобщение известных систем парных сумматорных уравнений, эквивалентных задачам дифракции волн на ленточных решетках,

расположенных в изотропной диэлектрической среде, и совпадает с ними, когда $\kappa_M = 0$.

Наличие в первом уравнении системы (8) множителя $\frac{1 + \mu_{\perp} - \tau}{1 + \mu_{\perp} + \tau}$ не позволяет для построения решения (8) воспользоваться классическим методом задачи Римана-Гильберта [10, 11], поскольку указанный выше множитель должен быть равен “-1”, что возможно только, когда гироманнитная среда отсутствует ($\kappa_M = 0$).

Ниже предложен один из возможных вариантов модификации классического метода задачи Римана-Гильберта [10, 11]. Аналогично [5, 6, 10-12, 18] введём две функции комплексной переменной w :

$B^+(w) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n w^n$; $B^-(w) = -\sum_{n=-1}^{\infty} nb_n w^n$ - аналитические соответственно внутри и вне круга $|w| < 1$.

Пусть γ_1 - дуга окружности $|w|=1$, соединяющая точки $e^{-i\theta}$ и $e^{i\theta}$, проходящая через точку $w = -1$, а γ_2 - дуга, которая дополняет γ_1 до окружности. С помощью функций $B^+(w)$, $B^-(w)$ система (8) для $w = \zeta = e^{i\varphi}$ представляется в следующей форме, стандартной для краевых задач в теории аналитических функций комплексного переменного [20]:

$$B^+(\zeta) - B^-(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \gamma_1; \quad (9)$$

$$B^+(\zeta) + \frac{1 + \mu_{\perp} - \tau}{1 + \mu_{\perp} + \tau} B^-(\zeta) = f(\zeta), \quad \zeta \in \gamma_2. \quad (10)$$

Выражение $-\frac{1 + \mu_{\perp} - \tau}{1 + \mu_{\perp} + \tau}$ согласно [20] называется коэффициентом сопряжения краевой задачи Римана (Римана-Гильберта) (9),(10).

Из (9) следует, что функция $B(w)$, определенная следующим образом:

$$B(w) = \begin{cases} B^+(w), & |w| < 1, \\ B^-(w), & |w| > 1, \end{cases}$$

продолжается до функции аналитической в комплексной плоскости с разрезом вдоль дуги γ_2 .

Причём $B(w) = -\frac{b_{-1}}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right)$, когда $w \rightarrow \infty$.

Таким образом, система уравнений (8) сведена к задаче о восстановлении функции $B(w)$, аналитической вне дуги γ_2 по её предельным значениям на этой дуге, удовлетворяющим условию (10).

Ограничимся рассмотрением случая, когда $\frac{1 + \mu_{\perp} - \tau}{1 + \mu_{\perp} + \tau} > 0$, который имеет место при следую-

щих условиях на частотный параметр κ : $\kappa < \kappa_H$

и $\kappa_H < \kappa < \kappa_H + \frac{\kappa_M}{2}$, а также когда $\kappa > \kappa_1$.

Как следует из работы [20], решение задачи Римана-Гильберта (10) может быть представлено в следующей форме:

$$B(z) = G(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t) dt}{G^+(t)(t-z)} + C \right], \quad (11)$$

где $G(z) = (z - e^{i\theta})^{-1} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - i\beta\right) \int_{\gamma_2} \frac{dt}{(t-z)}\right)$ -

каноническое решение в самом широком классе h_0 (т. е. решение не ограничено на обоих концах дуги γ_2 ; см. [20]) однородной задачи сопряжения,

которая соответствует (10), $\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \mu_{\perp} - \tau}{1 + \mu_{\perp} + \tau}$;

C - подлежащая определению постоянная, а $G^+(t)$ - предельное значение функции $G(z)$ внутри круга единичного радиуса с центром в нуле.

Отметим, что $G^+(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$G^+(e^{i\varphi}) = ie^{\pi\beta} \frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\theta})^{-1/2+i\beta}}{(e^{i\varphi} - e^{i\theta})^{1/2+i\beta}}. \quad (12)$$

Поведение функции $G^+(e^{i\varphi})$ в окрестности точек $e^{\pm i\theta}$ асимптотически совпадает с зависимостью соответствующих компонент дифракционного поля вблизи ребер лент решетки. Легко заметить, что при отсутствии гироманнитной среды ($\kappa_M = 0$) параметр β равен нулю и только в этой ситуации компоненты дифракционного поля могут иметь корневую особенность при приближении к ребрам лент решетки. В общем случае $\beta \neq 0$ и, как следует из (12), компоненты поля сложным образом зависят от параметра β , а следовательно и от частоты возбуждающей волны.

Для функции $G(z)$ справедливо представление

$$G(z) = \begin{cases} -\exp(2\beta\theta) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\beta, \theta) z^n, & |z| < 1, \\ z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\beta, \theta) z^{-n}, & |z| > 1, \end{cases} \quad (13)$$

где $P_n(\beta, \theta)$ - полиномы Поллачека [21], удовлетворяющие рекуррентным соотношениям:

$$P_0(\beta, \theta) = 1; P_1(\beta, \theta) = \cos(\theta) + 2\beta \sin(\theta);$$

$$P_n(\beta, \theta) \Big|_{n \geq 2} = \left(\left(2 - \frac{1}{n} \right) \cos(\theta) + \frac{2}{n} \beta \sin(\theta) \right) P_{n-1}(\beta, \theta) - \left(1 - \frac{1}{n} \right) P_{n-2}(\beta, \theta);$$

$$P_{-n}(\beta, \theta) = \exp(-2\beta\theta) P_{n-1}(-\beta, \theta).$$

Представление, аналогичное (13), по-видимому, впервые было приведено в работе [15], где предложено обобщение метода задачи Римана-Гильберта [10, 11] для предельного случая $\frac{\kappa_M}{\kappa} \rightarrow 0$.

Нетрудно показать, что при $\kappa_M = 0$ полиномы Поллачека переходят в полиномы Лежандра.

Представляя (11) в виде $\frac{B(z)}{G(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)dt}{G^+(t)(t-z)} + C$, и применяя формулы Сохоцкого – Племеля [20], а также учитывая, что $G^-(e^{i\varphi}) = -e^{-2\pi\beta} G^+(e^{i\varphi})$, в результате некоторых преобразований получаем представление

$$B^+(e^{i\varphi}) - B^-(e^{i\varphi}) = - \frac{\mu_a}{(\mu - \mu_a)(1 + \mu + \mu_a)} f'(e^{i\varphi}) + \frac{F(e^{i\varphi})}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)dt}{G^+(t)(t - e^{i\varphi})} + CF(e^{i\varphi}) \quad (14)$$

справедливое для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Здесь

$$f'(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 0, & \theta < |\varphi| \leq \pi; \\ f(e^{i\varphi}), & |\varphi| < \theta, \end{cases}$$

$$F(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 0, & \theta < |\varphi| \leq \pi; \\ \frac{1 + \mu_{\perp}}{1 + \mu_{\perp} - \tau} G^+(e^{i\varphi}), & |\varphi| < \theta. \end{cases}$$

Переходя в (14) к коэффициентам Фурье и используя (13), сводим функциональную систему уравнений (8) к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$b_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_{mn} b_n + w_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

матричные элементы, которой можно представить как $M_{mn} = A_{mn} \times F_n$,

где

$$F_n = 0,5 \left\{ \begin{aligned} & |n| \frac{\kappa^2 - \kappa_0^2}{(\kappa + \kappa_1)(\kappa - \kappa_H - \kappa_M/2)} + \\ & + \frac{\kappa - \kappa_1}{(\kappa - \kappa_H - \kappa_M/2)} (|n| + i\sqrt{\kappa^2 - n^2}) + \\ & + i \frac{\kappa + \kappa_0}{(\kappa + \kappa_1)(\kappa - \kappa_H - \kappa_M/2)} R_n \end{aligned} \right\};$$

$$R_n = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon \frac{(\kappa^2 - \kappa_1^2)(\kappa - \kappa_0)}{\kappa + \kappa_0} - n^2 (\kappa - \kappa_0)^2};$$

а правая часть

$$w_m = -\kappa i \frac{\kappa - \kappa_1}{\kappa - \kappa_H - \kappa_M/2} A_{m0}.$$

Выражения A_{mn} здесь определяются следующим образом:

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{m} (P_{mn} + W_{mn}(\beta, \theta) - P_m(\beta, \theta) P_{on}(\theta) - P_m(\beta, \theta) W_{on}(\beta, \theta)), & m \neq 0 \\ -(P_{\sigma n}(\theta) + e^{-2\beta\theta} R_{\sigma}(\beta, \theta) P_{on}(\theta)) - (W_n^{\sigma}(\beta, \theta) + e^{-2\beta\theta} R_{\sigma}(\beta, \theta) W_{on}(\beta, \theta)), & m = 0 \end{cases},$$

где

$$P_{mn} = - \frac{\kappa \kappa_M}{(\kappa - \kappa_1) \left(\kappa + \frac{\kappa_M}{2} + \kappa_H \right)} \begin{cases} \frac{d}{l}, & \text{при } m = n, \\ \frac{\sin \pi(m-n)d/l}{\pi(m-n)}, & \text{при } m \neq n; \end{cases}$$

$$P_{\sigma n}(\theta) = -\frac{\kappa\kappa_M}{(\kappa - \kappa_1)\left(\kappa + \frac{\kappa_M}{2} + \kappa_H\right)} \begin{cases} \frac{d \cos(n\theta)}{l} - \frac{1 \sin(n\theta)}{\pi n^2}, & \text{при } n \neq 0; \\ 0, & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

$$W_{mn}(\beta, \theta) = \frac{(\kappa + \kappa_1)(\kappa - \kappa_H - \frac{\kappa_M}{2})}{2(\kappa^2 - \kappa_1(\kappa_H + \frac{\kappa_M}{2}))} \begin{cases} 0, & m = n = -1, \\ e^{2\beta\theta} \frac{m+1}{m-n} (P_m(\beta, \theta)P_{n+1}(\beta, \theta) - P_{m+1}(\beta, \theta)P_n(\beta, \theta)), & \text{при } n \neq m \text{ и } n \neq -1, \\ e^{2\beta\theta} P_m(\beta, \theta) - P_{m+1}(\beta, \theta), & n = -1, \\ \sum_{s=0}^{n+1} v_{n+1-s}(\beta, \theta) P_{s-n-1}(-\beta, \theta), & \text{при } m = n : n \geq 0, \\ -\sum_{s=0}^{-n-1} v_{-n-s-1}(-\beta, \theta) P_{s+n+1}(\beta, \theta), & \text{при } m = n : n \leq -1; \end{cases}$$

$$R_\sigma(\beta, \theta) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} P_{n-1}(-\beta, \theta);$$

$$W_n^\sigma(\beta, \theta) = \frac{(\kappa + \kappa_1)(\kappa - \kappa_H - \frac{\kappa_M}{2})}{2(\kappa^2 - \kappa_1(\kappa_H + \frac{\kappa_M}{2}))} \begin{cases} -v_1(\beta, \theta)R_\sigma(\beta, \theta) + e^{2\beta\theta}R_\sigma(-\beta, \theta), & \text{при } n = 0, \\ -v_{n+1}(\beta, \theta)R_\sigma(\beta, \theta) + \frac{1}{n}(P_n(\beta, \theta) - e^{2\beta\theta}P_{n-1}(\beta, \theta)), & \text{при } n > 0, \\ (\cos(\theta) - 2\beta \sin(\theta) - e^{-2\beta\theta}) + R_\sigma(\beta, \theta)(e^{-2\beta\theta} \cos(\theta) + 2\beta e^{-2\beta\theta} \sin(\theta) - 1), & \text{при } n = -1, \\ -e^{-2\beta\theta}v_{-n}(-\beta, \theta)R_\sigma(\beta, \theta) - \frac{1}{n}(P_{-n}(-\beta, \theta) - e^{-2\beta\theta}P_{-n-1}(-\beta, \theta)), & \text{при } n < -1. \end{cases}$$

Коэффициенты $v_n(\beta, \theta)$ здесь выражаются через полиномы Поллачека по следующим рекуррентным формулам:

$$v_0 = 1; v_1(\beta, \theta) = -\cos(\theta) + 2\beta \sin(\theta);$$

$$v_n(\beta, \theta) = P_n(\beta, \theta) -$$

$$-2\cos(\theta)P_{n-1}(\beta, \theta) + P_{n-2}(\beta, \theta)$$

при $n \geq 2$.

Легко видеть, что при $\kappa_M = 0$ величины P_{mn} и $P_{\sigma n}(\theta)$ обращаются в нуль, что свойственно изотропным средам. Кроме того, ими можно пренебречь при $\frac{\kappa_M}{\kappa} \ll 1$, что было сделано в [15]. Однако при $\frac{\kappa_M}{\kappa} \geq 1$, предложенный в работе [15], метод дает существенные погрешности, поскольку не учитывает поведение компонент дифракционного поля в окрестности геометрических сингулярностей решетки.

Предлагаемый в этой работе метод, в отличие от [15], лишен указанных выше ограниче-

ний. Анализ матричных элементов M_{mn} показал,

что ряд $\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} |M_{mn}|$ сходится и, следовательно,

матрица $\|M_{mn}\|_{m,n=-\infty}^{+\infty}$ задаёт в пространстве последовательностей l_2 ядерный оператор, а система (15) является бесконечной системой линейных алгебраических уравнений второго рода.

Согласно альтернативе Фредгольма [22] и теореме единственности задачи дифракции [19] получаем, что решение системы (15) существует единственно и может быть получено методом редукции с любой наперёд заданной точностью.

Таким образом, исходная краевая задача (1)-(5) эквивалентным образом сведена к системе линейных алгебраических уравнений (15).

Система уравнений (15) в длинноволновой области допускает приближенное аналитическое решение методом последовательных приближений, что позволяет получить приближенные представления для основных гармоник, когда $\kappa < 1$:

$$a_0 \approx \frac{A_{00}i(\kappa(\kappa^2 - \kappa_1^2) - (\kappa + \kappa_0)R_0) + 2(\kappa + \kappa_1)(\kappa - \kappa_H - \frac{\kappa_M}{2})}{A_{00}i(\kappa(\kappa^2 - \kappa_1^2) + (\kappa + \kappa_0)R_0) - 2(\kappa + \kappa_1)(\kappa - \kappa_H - \frac{\kappa_M}{2})};$$

$$b_0 \approx \frac{2\kappa i A_{00}(\kappa^2 - \kappa_1^2)}{A_{00}i(\kappa(\kappa^2 - \kappa_1^2) + (\kappa + \kappa_0)R_0) - 2(\kappa + \kappa_1)(\kappa - \kappa_H - \frac{\kappa_M}{2})}.$$
(16)

Отметим, что если частоту κ_M положить равной нулю, то выражения (16) перейдут в известные формулы Ламба [12] для решётки, находящейся на границе диэлектрического полупространства.

3. Анализ численных результатов. На основе предлагаемого здесь метода были разработаны численные алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие рассчитывать с любой наперед заданной точностью характеристики дифракционного поля электродинамической структуры – плоская ленточная решетка с ферромагнитной средой.

Например, для расчета коэффициента отражения a_0 (см. рис. 2, 3) с относительной погрешностью, составляющей 0,1%, достаточно выбрать порядок редукции системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (15) $N = \lceil \kappa \sqrt{|\varepsilon \mu_{\perp}|} \rceil + 5$, где через $\lceil \dots \rceil$ обозначена целая часть числа.

Численные эксперименты проводились для двух частотных диапазонов:

$$0 < \kappa < \kappa_H + \frac{\kappa_M}{2};$$

$$\kappa > \kappa_H + \kappa_M.$$

Характеристики феррита были выбраны согласно [23], а именно: диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 5,5$, нормированная частота ферромагнитного резонанса $\kappa_H = 0,31$, и нормированная частота намагничённости феррита $\kappa_M = 0,27$. Предполагалось, что потери в феррите отсутствуют. При выбранных параметрах феррита для первого частотного диапазона ($0 < \kappa < \kappa_H + \frac{\kappa_M}{2}$) в зоне отражения ($x > 0$) только нулевая пространственная гармоника является распространяющейся (см. (5)).

Для выбранных параметров феррита κ_H , κ_M и ε при $d/l = 0,6$ в диапазоне частот $0 < \kappa < 0,2$ модуль коэффициента отражения $|a_0|$ с графической точностью совпадает с модулем коэффициента отражения для решетки на ди-

электрическом полупространстве (рис. 2). При дальнейшем увеличении коэффициента заполнения решетки ($d/l \rightarrow 1$) электромагнитное поле начинает активно проникать в ферритовое полупространство даже при небольших значениях частотного параметра κ . Интересно отметить, что в случае отсутствия решетки ($d/l = 1$) коэффициент отражения для ферритового полупространства обращается в ноль при некотором значении нормированной частоты $\tilde{\kappa} = \sqrt{\kappa_1 \left(\kappa_H - \frac{\kappa_M}{\varepsilon - 1} \right)}$, являющемся корнем уравнения $\mu_{\perp} - \sqrt{\varepsilon \mu_{\perp}} = 0$.

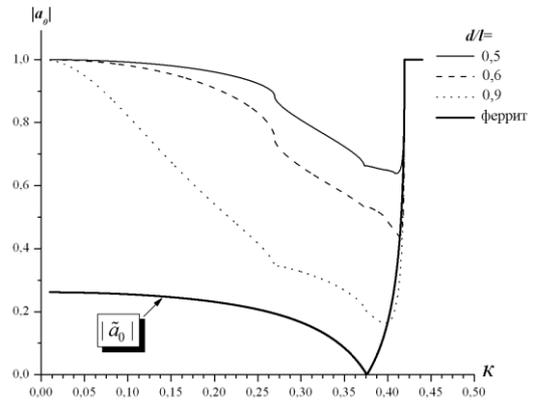


Рис. 2. Зависимости модулей коэффициентов отражения $|a_0|$ и $|\tilde{a}_0|$ от частотного параметра κ при различных значениях коэффициента заполнения d/l для $0 < \kappa < \kappa_H + \frac{\kappa_M}{2}$. Расчеты проводились для $\varepsilon = 5,5$ и $\kappa_H = 0,31$; $\kappa_M = 0,27$

Поэтому при $d/l \rightarrow 1$ зависимость модуля коэффициента отражения имеет ярко выраженный минимум в окрестности этого значения частоты.

Как показали численные эксперименты, в частотном диапазоне $0,2 < \kappa < \kappa_0 = 0,4194$ зависимость модуля коэффициента отражения имеет слабо выраженные характерные «изломы» на дискретном множестве частот (аномалии типа Вуда). Эти значения частот могут быть вычислены по формуле

$$\kappa_n^- = \sqrt{\frac{\varepsilon\kappa_1^2 + n^2 - \sqrt{(\varepsilon\kappa_1^2 + n^2)^2 - 4\varepsilon n^2 \kappa_0^2}}{2\varepsilon}},$$

где $n = 1; 2; 3; \dots$

Как легко видеть, при $n \rightarrow \infty$ эти частоты стремятся к граничной частоте магнитоэлектрической волны ферритового полупространства

$$\kappa_0 = \sqrt{\kappa_H (\kappa_H + \kappa_M)} = 0,4194.$$

В диапазоне частот

$$\kappa_0 < \kappa < \kappa_H + \frac{\kappa_M}{2} = 0,445$$

имеет место полное отражение E -поляризованной электромагнитной волны (вектор напряженности электрического поля параллелен лентам решетки) как от решетки с ферритом, так и от ферритового полупространства (см. рис. 2). Это объясняется тем, что при

$$\kappa_0 < \kappa < \kappa_H + \frac{\kappa_M}{2}$$

эффективная магнитная проницаемость феррита μ_{\perp} принимает отрицательные значения ($\mu_{\perp} < 0$) и, следовательно, даже в отсутствие потерь электромагнитное поле в ферромагнитной среде экспоненциально убывает от ее границы.

Для поведения модуля коэффициента отражения в частотном диапазоне $\kappa > \kappa_M + \kappa_H$ характерны следующие особенности. Существуют два типа значений частотного параметра κ , при которых зависимость модуля коэффициента отражения $|a_0|$ претерпевает ярко выраженные «изломы» (аномалии Вуда). Им соответствуют следующие значения частотного параметра:

$$\kappa_n^+ = \sqrt{\frac{\varepsilon\kappa_1^2 + n^2 + \sqrt{(\varepsilon\kappa_1^2 + n^2)^2 - 4\varepsilon n^2 \kappa_0^2}}{2\varepsilon}} \quad \text{и}$$

$$\kappa_n^0 = n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Причем значения $\kappa = \kappa_n^+$ зависят от параметров ферромагнитной среды, а $\kappa = \kappa_n^0$ ($n \geq 1$) определяются только решеткой (напомним, что рассматривается нормальное падение возбуждающей волны).

Легко показать, что при $n \rightarrow \infty$ значение частотного параметра κ_n^+ стремится к значению

$$\frac{|n|}{\sqrt{\varepsilon}},$$

которое соответствует аномалии Вуда для решетки, расположенной на изотропном полупространстве с диэлектрической проницаемостью ε . Кроме того, в диапазоне частот $\kappa_H + \kappa_M < \kappa < \kappa_1^+$ модуль коэффициента отраже-

ния $|a_0|$ имеет локальный минимум, значение которого уменьшается с увеличением коэффициента заполнения решетки (см. рис. 3). Интересно также то, что с увеличением параметра d/l ($d/l \rightarrow 1$) значения модуля коэффициента отражения, отвечающие указанному выше минимуму, располагаются на линии, характеризующей зависимость модуля коэффициента отражения от ферритового полупространства (см. рис. 3).

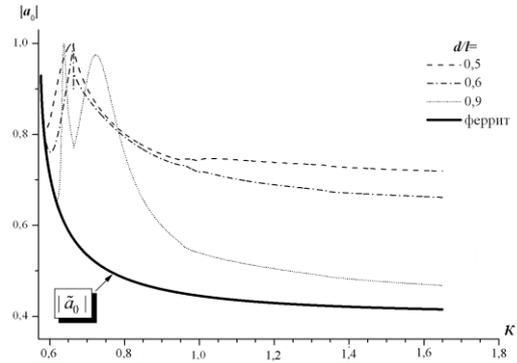


Рис. 3. Зависимости модулей коэффициентов отражения $|a_0|$ и $|\tilde{a}_0|$ от частотного параметра κ при различных значениях коэффициента заполнения d/l для $\kappa_H + \kappa_M < \kappa$. Расчеты проводились для $\varepsilon = 5,5$ и $\kappa_H = 0,31; \kappa_M = 0,27$

Из рис. 3, что в окрестности частоты $\kappa = \kappa_1^+$ поведение коэффициента отражения a_0 имеет резонансный характер, что обусловлено возникновением в ферритовом полупространстве высших распространяющихся пространственных гармоник при $\kappa > \kappa_1^+$. При дальнейшем увеличении κ ($\kappa \gg 1$) значения $|a_0|$ стремятся к коэффициенту отражения для решетки, расположенной на изотропном диэлектрическом полупространстве.

Для практических приложений представляет интерес выяснение границы применимости приближенного представления для коэффициента отражения a_0 и (16). На рис. 4 приведены сравнения зависимостей $|a_0|$ от нормированной частоты, полученных из системы уравнений (15) и приближенной формулы (16). Из рис. 4 видно, что аномалии Вуда приближенной формулой не описываются. Графическое совпадение для «точных» и «приближенных» кривых имеет место в диапазоне частот $0 < \kappa < 0,15$. Действительно, как видно из таблицы, расхождение между точным и приближенным значениями модуля коэффициента отражения составляет при $\kappa = 0,15$ - 1,14%, при $\kappa = 0,2$ уже 3,1%, а при $\kappa = 0,3$ - 11%.

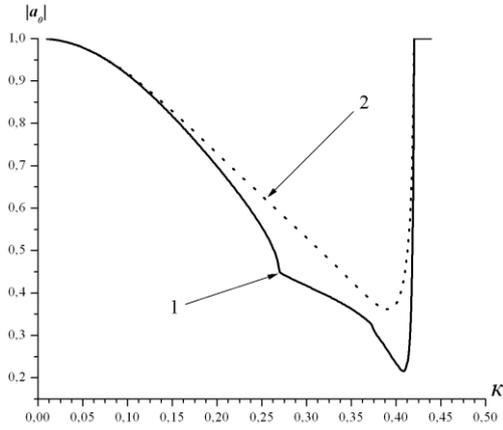


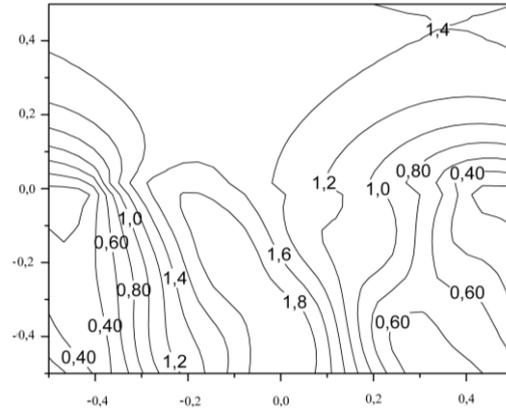
Рис. 4. Графики расчётов модуля коэффициента отражения по 1 - «точным» и 2 - «приближённым» формулам

Таблица

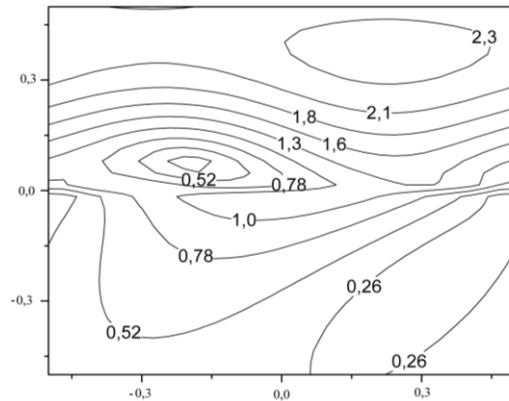
κ	$ a_0 $ - точное	$ a_0 $ - приближенное
0,01	0,999183	0,999183
0,02	0,996686	0,99669
0,03	0,992458	0,992479
0,04	0,98647	0,986539
0,05	0,978719	0,978887
0,06	0,969222	0,96957
0,07	0,958022	0,958664
0,08	0,945181	0,946265
0,09	0,930782	0,932492
0,1	0,914918	0,917478
0,11	0,897696	0,901364
0,12	0,879228	0,884297
0,13	0,859625	0,866423
0,14	0,838999	0,847883
0,15	0,817452	0,828812
0,16	0,795073	0,809333
0,17	0,771938	0,789556
0,18	0,748097	0,769579
0,19	0,723574	0,749483
0,2	0,698356	0,729336
0,25	0,555284	0,629207
0,3	0,41671	0,530131

Результаты, полученные при проведении исследований коэффициента отражения в одно-волновом диапазоне ($\kappa < 1$), дают полную информацию о дифракционном поле в дальней зоне от решетки, т. е. при $\frac{|x|}{l} \kappa \gg 1$. Тем не менее, для различных приложений несомненный интерес представляет структура дифракционного поля в ближней зоне ($\frac{|x|}{l} \kappa \approx 1$) решетки, расположенной на границе ферромагнитной среды (идеального феррита). Одним из возможных способов описания структуры дифракционного поля является изображение линий равных амплитуд и равных фаз компонент электромагнитного поля. На рис. 5 приведены распределения линий равных амплитуд E_z -компоненты ($|E_z(x, y)| = \text{const}$) напря-

женности электрического поля при резонансных значениях частотного параметра κ . Из рис. 4 видно, что при $\kappa = 0,4018$ модуль коэффициента отражения $|a_0|$ имеет ярко выраженный минимум. Структура поля при этом значении частотного параметра приведена на рис 5,а.



а)



б)

Рис. 5. Распределение линий равных амплитуд $|E_z(x, y)| = \text{const}$ при различных значениях частотных и геометрических параметров: а) $\kappa_M = 0,27; \kappa_H = 0,31; \epsilon = 5,5; d/l = 0,8; \kappa = 0,4018$; б) $\kappa_M = 0,27; \epsilon = 5,5; \kappa_H = 0,31; d/l = 0,9; \kappa = 0,6195$

Интересно то, что, несмотря на нормальное падение на решетку с ферромагнитной средой возбуждающей волны $E_z \propto e^{-ikx}$, линии равных амплитуд дифракционного поля имеют и притом ярко выраженную асимметрию. Этот эффект обусловлен невзаимностью ферромагнитной среды.

На рис. 5,б приведены линии $|E_z(x, y)| = \text{const}$ для одного из резонансов отражения в диапазоне $\kappa > \kappa_H + \kappa_M$ (см. рис. 3). Видно (рис. 5,б), что в этом случае дифракционное поле локализовано в окрестности границы ферромагнитной среды.

Выводы. Таким образом, предложен метод решения задач дифракции *E*-поляризованных электромагнитных волн на ленточных решётках, расположенных на границе гиротропных ферромагнитных сред.

В основе этого метода лежит процедура аналитической регуляризации, использующая явное решение краевой задачи Римана-Гильберта с коэффициентом сопряжения, зависящим от частоты возбуждающей волны.

В случае *H*-поляризации рассматриваемая электродинамическая задача эквивалентна задаче дифракции плоской волны на ленточной решетке, расположенной на границе диэлектрического полупространства. При рассмотрении указанной задачи используется классическая процедура метода задачи Римана-Гильберта [10, 11].

Разработаны численные алгоритмы и компьютерные программы, реализующие этот метод. Проведены исследования зависимости коэффициента отражения ленточной решётки с идеальной ферромагнитной средой. Установлен частотный диапазон, где имеет место явление полного отражения *E*-поляризованной плоской волны.

Получены приближённые формулы для расчёта амплитуд основных пространственных гармоник дифракционного поля. Установлены границы частотного диапазона, где погрешность этих формул составляет около 1%.

В заключение отметим, что предлагаемый здесь метод исследования задач дифракции плоских волн на решетках, расположенных на границах анизотропных (гиротропных) сред, несложно обобщить на случаи, когда падение плоских волн - наклонное (произвольное).

1. Бабушкин А. В., Бучельников В. Д., Бычков И. В. Отражение электромагнитных волн от поверхности феррита кубической симметрии // Физика твердого тела. - 2002. - 44, вып.12. - С.2183-2188.
2. Ваиковский А. В., Локк Э. Г. Поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик, окружённой полупространством с отрицательной диэлектрической проницаемостью // Радиотехника и электроника. - 2002. - 1. - С.97-102.
3. Ваиковский А. В., Локк Э. Г. Обратные поверхностные электромагнитные волны в композитных структурах, использующих ферриты // Радиотехника и электроника. - 2003. - 48. - С.169-176.
4. Масалов С. А., Рыжак А. В., Сухаревский О. И., Шкиль В. М. Физические основы диапазонных технологий типа «Стелс». - Санкт-Петербург: ВИКУ им. Можайского. - 1999. - 163 с.
5. Бровенко А. В., Мележик П. Н., Поединчук А. Е. Дифракция плоской электромагнитной волны на металлической решётке с магнитоактивной плазмой // Известия вузов. Радиофизика. - 2004. - XLVII, №8. - С.638-649.
6. Brovenko A., Melezhih P., Poyedinchuk A., Yashina N. and Granet G. Surface Resonances of metal stripe Grating on the Plane boundary of metamaterial // Progress in Electromagnetic Research. - 2006. - N63. - P.209-222.
7. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Наука, 1967. - 683 с.

8. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. - М.: Физматгиз, 1994. - 464 с.
9. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. - М.: Наука, 1990. - 433 с.
10. Агранович З. С., Марченко В. А., Шестопалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // Журн. техн. физики. - 1962. - 32, №4. - С.381-394.
11. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Солонуб В. Г. Дифракция волн на решётках. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. - 278 с.
12. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Дифракционные решётки. - Киев: Наук. думка, 1986. - 232 с. - (Резонансное рассеяние волн: в 2-х т., Т.1).
13. Абдулкадыров В. А., Гестрина Г. Н. Взаимодействие электромагнитной волны с анизотропной диэлектрической подложкой при наличии периодических экранов // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2004. -9, №1. - С.185-90.
14. Абдулкадыров В. А., Гестрина Г. Н. Отражательные особенности системы периодических экранов с гиротропным заполнением // Электромагнитные волны и электрон. системы. - 2004. - 9, №3-4. - С.52-58.
15. Хорошун В. В. Дифракция плоских электромагнитных волн на металлической решётке с гиромангнитной средой // Радиотехника. - 1967. - Вып.4. - С.20-25.
16. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. The vortex Lattice Method in the electromagnetic wave Diffraction on the Method grating with gyrotropic Layer // International Conference on Mathematical methods in electromagnetic theory MMET 2000, Kharkov, Ukraine, September 12-15. - P.578-580.
17. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - М.: Наука, 1985. - 256 с.
18. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики. - Харьков: Основа, 1997. - 285 с.
19. Хёйл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. - М.: Мир, 1964. - 428 с.
20. Мухслишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. - 599 с.
21. Сегё Г. Ортогональные многочлены. - М.: Физматгиз, 1962. - 500 с.
22. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1984. - 750 с.
23. Елисеева С. В., Семенов Д. И. Спектр собственных электромагнитных волн периодической структуры ферромагнетик-полупроводник // Журн. техн. физики. - 2005. - 75, вып.7. - С.106-111.

THE WAVE DIFFRACTION BY A GRATING ATTACHED TO HYROMAGNETIC MEDIUM BOUNDARY

A. V. Brovenko, P. N. Melezhih,
A. Ye. Poyedinchuk, A. S. Troshchylo

A new method is suggested for solving the problem of electromagnetic wave diffraction by a strip grating placed at the boundary of a hyrotropic ferromagnetic medium. The method is based on the analytical regularization procedure and uses explicit solution of the Riemann-Hilbert boundary value problem with the conjugation coefficient depending on the excitation wave frequency. Numerical algorithms and calculating programs realizing the method have been designed. The reflection coefficient of a strip grating attached to an ideal ferromagnetic medium is studied as a function of the excitation wave frequency. The frequency region of the total reflection of an *E*-polarized plane wave has been found. Long-wavelength approximation formulas describing the principal

harmonics of diffraction spectrum have been obtained. The frequency range of their application is shown.

Key words: strip grating, hyromagnetic medium, system of dual series equations, analytical regularization technique, wave diffraction.

ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ НА ГРАТЦІ, ЩО РОЗТАШОВАНА НА МЕЖІ ГІРОМАГНІТНОГО СЕРЕДОВИЩА

А. В. Бровенко, П. М. Мележик,
А. Ю. Поєдинчук, О. С. Трощило

Запропоновано новий метод розв'язання задач дифракції електромагнітних хвиль на стрічкових ґратках, що розташовані на межі гіротропних феромагнітних середовищ. Основою цього методу є процедура аналітичної регуляризації, що використовує явний розв'язок граничної задачі Рімана-

Гільберта з коефіцієнтом спряження, який залежить від частоти збуджуючої хвилі.

Розроблено чисельні алгоритми та комп'ютерні програми, що реалізують цей метод. Проведено дослідження залежності коефіцієнту відбиття стрічкової ґратки з ідеальним феромагнітним середовищем від частоти збуджуючої хвилі. Встановлено той частотний діапазон, де має місце явище повного відбиття E -поляризованої плоскої хвилі.

У довгохвильовій області для амплітуд основних гармонік дифракційного спектру одержано наближені формули. Встановлено частотний діапазон, де вони можуть бути застосовані.

Ключові слова: стрічкові ґратки, гіромагнітне середовище, система парних сумарних рівнянь, метод аналітичної регуляризації, дифракція хвиль.

Рукопись поступила 22 июня 2007 г.