

УДК 622.831.3.001.5

Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов

## ПАРАМЕТРЫ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦА ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ ЖЕСТКИМИ ШТАМПАМИ

Таврический национальный университет  
95007, г. Симферополь, пр. Вернадского, 4

*Проведено исследование напряженного состояния образца при его одноосном сжатии между жесткими штампами с учетом внутреннего трения материала и неоднородности напряжений сжатия под штампом. Получено уравнение состояния материала на траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН). Получено распределение сжимающих напряжений под штампом и определены координаты точек пересечения ТМЭКН с контактирующими со штампами поверхностями образца. В качестве критерия разрушения материала использовался критерий Кулона. Установлена зависимость положения ТМЭКН от приложенной нагрузки. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.*

В данной работе рассматривается напряженное состояние образца горной породы при одноосном сжатии между жесткими штампами при отсутствии контактного трения, но с учетом внутреннего трения материала в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [1]. Под понятием эффективного касательного напряжения  $\tau_{ef}$  понимается активное касательное напряжение  $\tau_{\alpha}$  за вычетом фрикционной составляющей. Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона:

$$\tau_{ef} = \tau_{\alpha} - \mu\sigma_{\alpha} \leq k, \quad (1)$$

где  $\tau_{ef}$  – эффективное касательное напряжение на ТМЭКН;  $\tau_{\alpha}$  – активное касательное напряжение на ТМЭКН;  $\mu = \operatorname{tg} \rho$  – коэффициент внутреннего трения материала;  $\rho$  – угол его внутреннего трения;  $\sigma_{\alpha}$  – нормальное напряжение на ТМЭКН;  $k$  – предельная сопротивляемость материала сдвигу. Критерий (1) означает, что при  $\tau_{ef} = k$  происходит разрушение, а при  $\tau_{ef} < k$  материал находится в упругом состоянии.

Рассмотрим образец горной породы шириной  $2a$  и высотой  $h$  при одноосном сжатии вдоль оси  $OY$  между жесткими штампами силой  $P$ , как показано на рис.1, при отсутствии контактного трения. Для аналогичной задачи авторами ранее получены уравнения состояния материала с учетом внутреннего трения материала [2]. Однако при этом образец сжимался между жесткими плитами прессы и полагалось, что во всех точках образца напряжение сжатия  $\sigma_y = \text{const}$ . В данной работе напряжение  $\sigma_y$ , действующее на контактирующих со штампами поверхностях образца, рассматривается как результат воздействия на них штампами и поэтому зависит от координаты  $x$ :  $\sigma_y = \sigma_y(x)$ .

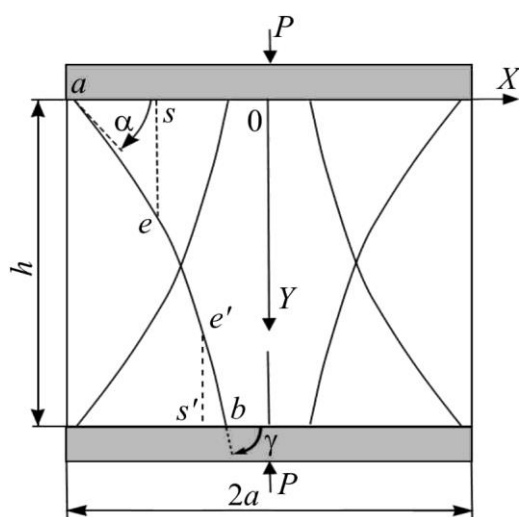


Рис. 1. Схема расположения ТМЭКН в образце горной породы при одноосном сжатии между жесткими штампами

Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично относительно его продольной оси, будем рассматривать только левую половину образца. Проведем ТМЭКН  $ab$  в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках  $a$  и  $b$  (рис.1).

Из рассмотрения равновесия двух треугольников  $aes$  и  $be's'$ , формируемых ТМЭКН  $ab$  и горизонтальными поверхностями образца, найдем математическую связь между нормальными  $\sigma_\alpha$  и касательными  $\tau_\alpha$  напряжениями через углы наклона  $\alpha$  и  $\gamma$  к оси  $X$  касательных к ТМЭКН  $ae$  и  $be'$  соответственно.

В результате суммирования проекций сил, приложенных к верхнему треугольнику  $aes$ , на площадку ТМЭКН получим:

$$\sigma_\alpha = -\frac{\sigma_{xв} - \sigma_{yв}}{2} + \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \cos 2\alpha, \quad (2)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \sin 2\alpha, \quad (3)$$

где  $\sigma_{yв}$ ,  $\sigma_{xв}$  – нормальные напряжения в точке  $a$ .

Подставляя выражения (2) и (3) в выражение (1), определим эффективное касательное напряжение  $\tau_{ef}$  в верхнем треугольнике  $aes$ :

$$\tau_{ef} = \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \sin 2\alpha - \mu \left( -\frac{\sigma_{xв} - \sigma_{yв}}{2} + \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \cos 2\alpha \right). \quad (4)$$

Действуя по аналогии, получим для нижнего треугольника  $be's'$ :

$$\sigma_{\gamma} = \frac{\sigma_{xн} + \sigma_{yн}}{2} - \frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \cos 2\gamma, \quad (5)$$

$$\tau_{\gamma} = -\frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \sin 2\gamma,$$

$$\tau_{ef} = -\frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \sin 2\gamma - \mu \left( \frac{\sigma_{xн} + \sigma_{yн}}{2} - \frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \cos 2\gamma \right), \quad (6)$$

где  $\sigma_{yн}$ ,  $\sigma_{xн}$  – нормальные напряжения в точке  $b$ .

Продифференцируем по  $\alpha$  уравнение (2):

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_{xв} + \sigma_{yв}) \sin 2\alpha.$$

С учетом выражения (3) можем записать:

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\tau_{\alpha}.$$

Подставляя в это уравнение критерий Кулона (1), получим важное дифференциальное уравнение для верхнего треугольника  $be's'$ :

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_{\alpha}). \quad (7)$$

Действуя аналогично, получим для нижнего треугольника  $be's'$ :

$$\frac{d\sigma_{\gamma}}{d\gamma} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_{\gamma}). \quad (8)$$

Каждое из уравнений (7) и (8) является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Решение этого уравнения сводится к интегрированию его на ТМКЭН между точками  $a$  и  $b$ :

$$\int_a^b \frac{d\sigma_{\alpha}}{(\tau_{ef} + \mu\sigma_{\alpha})} = -2 \int_a^b d\alpha,$$

откуда

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_{\alpha}) \Big|_a^b = -2\mu\alpha \Big|_a^b.$$

Полагаем, что условие  $\tau_{ef} = k$ , являющееся условием разрушения материала, достигается в треугольнике  $aes$  раньше, чем в треугольнике  $be's'$ . Это соответствует экспериментальным данным и практическим наблюдениям о том, что в ряде случаев разрушение образцов начинается из угла. Тогда в точке  $a$   $\tau_{ef} = k$ . С учетом этого получим:

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma) - \ln(k + \mu\sigma_\alpha) = -2\mu(\gamma - \alpha). \quad (9)$$

Найдем угол наклона касательной  $\alpha$ , при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение. Для этого производную  $\frac{\partial\tau_{ef}}{\partial\alpha}$  (4) приравняем нулю:

$$\frac{\partial\tau_{ef}}{\partial\alpha} = (\sigma_{xв} + \sigma_{yв}) \cos 2\alpha + \mu(\sigma_{xв} + \sigma_{yв}) \sin 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\mu} = -\operatorname{ctg} \rho \quad (10)$$

и для угла  $\alpha$  получаем:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}.$$

По аналогии найдем угол наклона касательной  $\gamma$  для нижнего треугольника  $be's'$ , при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение:

$$\frac{\partial\tau_{ef}}{\partial\gamma} = -(\sigma_{xн} - \sigma_{yн}) \cos 2\gamma - \mu(\sigma_{xн} - \sigma_{yн}) \sin 2\gamma = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{1}{\mu} = -\operatorname{ctg} \rho. \quad (11)$$

Из выражений (10) и (11) следует, что углы наклона касательной к ТМЭКН в точках  $a$  и  $b$  равны, то есть

$$\gamma = \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}. \quad (12)$$

Таким образом, ТМЭКН является прямой, как и в случае, когда полагалось, что во всех точках образца напряжение сжатия  $\sigma_y = \operatorname{const}$  [2].

Из изложенного следует, что учет внутреннего трения материала приводит к увеличению угла наклона ТМЭКН относительно оси  $OX$ , а следовательно, к уменьшению поверхности разрушения, что означает увеличение сопротивляемости материала разрушению.

С учетом (12) из (9) получим  $\ln \frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = 0$  и следовательно:

$$\frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = 1. \quad (13)$$

Из выражений (5) и (6) с учетом (12) находим:

$$\sigma_\gamma = \frac{1}{2}\sigma_{xH}(1 + \sin \rho) + \frac{1}{2}\sigma_{yH}(1 - \sin \rho); \quad (14)$$

$$\tau_{ef} = \frac{1}{2\cos \rho}\sigma_{xH}(1 + \sin \rho) + \frac{1}{2\cos \rho}\sigma_{yH}(1 - \sin \rho). \quad (15)$$

Из [2] можем записать для точки  $a$ :

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_{yB}(1 - \sin \rho). \quad (16)$$

Из (15) находим:

$$\sigma_{xH} = \frac{\sigma_{yH}(1 - \sin \rho) - 2\tau_{ef} \cos \rho}{(1 + \sin \rho)}. \quad (17)$$

С учетом (17) выражение (14) примет вид:

$$\sigma_\gamma = \sigma_{yH}(1 - \sin \rho) - \tau_{ef} \cos \rho. \quad (18)$$

Подставляя в выражение (13) выражения для  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\gamma$  из (16) и (18) соответственно, получаем:

$$\tau_{ef} = \frac{k - \mu \left( \sigma_{yH} - \frac{1}{2}\sigma_{yB} \right) (1 - \sin \rho)}{(1 - \sin \rho)}. \quad (19)$$

Для сравнения с результатами, получаемыми без учета внутреннего трения, рассмотрим частный случай, когда  $\mu = 0$  и, следовательно,  $\rho = 0$ . Из выражения (19) получаем  $\tau_{ef} = k$ , что совпадает с результатами [4].

В случае, когда  $\sigma_{yH} = \sigma_{yB} = \sigma_y$ , получаем:

$$\tau_{ef} = \frac{2k - \mu\sigma_y(1 - \sin \rho)}{2(1 - \sin \rho)},$$

что совпадает с результатами [2].

Поскольку на горизонтальную поверхность образца действует жесткий штамп, то распределение нагрузки под штампом определяется из решения для контактной задачи теории упругости [3]:

$$\sigma_y(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (20)$$

где  $P$  – сжимающая сила, действующая на штамп;  $x$  – текущая абсцисса;  $a$  – половина области контакта после сжатия.

Из (20) очевидно, что  $\sigma_y(x)$  неограниченно возрастает при подходе к границам участка контакта  $x = \pm a$ . Однако в действительности реальный профиль штампа не имеет в сечении прямых углов, а имеет углы, закругленные с малым, но конечным радиусом. При учете кривизны закраин штампа распределение нагрузки под штампом определяется по формуле:

$$\sigma_y(x) = \frac{2P \left[ (\pi - 2\varphi_0) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \ln \left| \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \right| \right]}{\pi a (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)} + \frac{2P \sin \varphi_0 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{(\varphi_1 + \varphi_0)}{2} \operatorname{tg} \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)}{2} \right|}{\pi a (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)}, \quad (21)$$

где  $\sin \varphi_1 = \frac{x}{a}$ ;  $\sin \varphi_0 = \frac{a_1}{a}$ ;  $r$  – радиус закраин штампа;  $a = a_1 + r$ .

Для установления распределения нагрузки на контактирующих поверхностях образца (для верхней –  $\sigma_{yв}$ , для нижней –  $\sigma_{yн}$ ) воспользуемся выражением (21). Для верхней поверхности в него подставляем  $\sin \varphi_1 = \frac{x_г}{a}$ ,  $x_г = a_1 - \delta$ , где  $x_г$  – координата точки  $a$ ;  $\delta$  – малый параметр, значение которого задается при решении конкретной задачи. Для нижней поверхности –  $\sin \varphi_1 = \frac{x_н}{a}$ , где  $x_н$  – координата точки  $b$ . Затем, подставляя в (19)  $\sigma_{yв}$  и  $\sigma_{yн}$ , можно найти  $\tau_{ef}$ .

Поскольку при разрушении на ТМЭКН  $\tau_{ef} = k$ , это, в свою очередь, дает возможность определить для каждой конкретной задачи значения координат  $x_г$  точки  $a$  и  $x_н$  точки  $b$ , что позволяет построить ТМЭКН, поскольку, как было указано выше, она является прямой. Для определения этих координат был разработан алгоритм, реализованный в среде Microsoft Excel.

В качестве примера было рассмотрено сжатие нагрузкой  $P = 2,5$  кН между штампами образца из песчано-цементного материала (ПЦМ), у которого ширина  $2a = 55$  мм, высота  $h = 55$  мм, радиус закраин штампа  $r = 2$  мм, предельная сопротивляемость материала сдвигу  $k = 200$  кН/м<sup>2</sup>. В силу симметрии нагружения и деформирования образца относительно его продольной оси рассматривалась только его левая половина, соответствующая условию  $-a \leq x \leq 0$ . Распределение напряжений  $\sigma_y(x)$  под штампом, определенное с помощью (21), в этом случае показано на рис. 2.

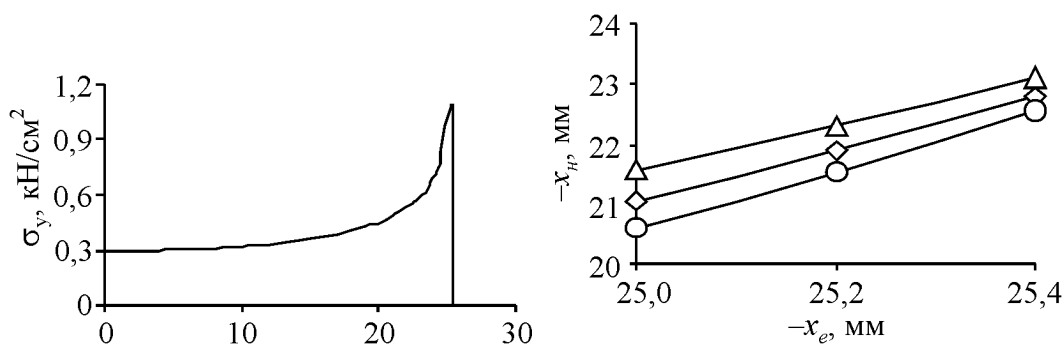


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_y(x)$  под штампом, определенное с помощью (21)

Рис. 3. Зависимости координаты  $x_b$  точки  $b$  от координаты  $x_a$  точки  $a$  при нагрузках  $P$ , kN:  $\Delta$  – 1,0;  $\diamond$  – 1,5 и  $\circ$  – 2,5

Из рис. 2 видим, что напряжения  $\sigma_y(x)$  в образце из ПЦМ под штампом практически постоянны в средней части образца и значительно возрастают к его краям, что определяет расположение ТМЭКН.

Результаты определения зависимостей координаты  $x_b$  точки  $b$  от координаты  $x_a$  точки  $a$  при нагрузках  $P = 1,0; 1,5$  и  $2,5$  kN приведены на рис. 3. Здесь необходимо отметить, что при расчетах этих зависимостей было принято условие  $\sigma_{yn} \geq \left( \frac{1}{2} \sigma_{y\theta} + k \frac{\cos \rho}{1 - \sin \rho} \right)$ , которое следует из физической обоснованности соотношения величин  $\tau_{ef}$  и  $k$ , определяемого выражением (19).

Из рис. 3 следует, что увеличение нагрузки  $P$  приводит к снижению абсолютного значения координаты  $x_b$  точки  $b$ , то есть точка  $b$  при этом удаляется от свободной боковой грани образца. К этому же приводит и уменьшение абсолютного значения координаты  $x_a$  точки  $a$ , то есть удаление точки  $a$  от свободной боковой грани образца.

Следует подчеркнуть, что при этом точка  $a$  с координатой  $x_a = -25,4$  мм находится на расстоянии  $\delta = 0,1$  мм от закраины, что составляет всего  $0,0036$  от значения полуширины образца, равного  $a = 27,5$  мм, т.е.  $\delta/a \ll 1$ . Это позволяет считать точку  $a$  с координатой  $x_a = -25,4$  мм практически угловой и выполнение в ней равенств  $\tau_{ef} = k$  и  $\sigma_{x\theta} = 0$  является вполне допустимым, что, в свою очередь, обосновывает возможность применения всего изложенного.

Следует подчеркнуть, что при этом точка  $a$  с координатой  $x_a = -25,4$  мм находится на расстоянии  $\delta = 0,1$  мм от закраины, что составляет всего  $0,0036$  от значения полуширины образца, равного  $a = 27,5$  мм, т.е.  $\delta/a \ll 1$ . Это позволяет считать точку  $a$  с координатой  $x_a = -25,4$  мм практически угловой и выполнение в ней равенств  $\tau_{ef} = k$  и  $\sigma_{x\theta} = 0$  является вполне допустимым, что, в свою очередь, обосновывает возможность применения всего изложенного.

При значении  $x_a = -25,4$  мм получим  $x_b = -22,6$  мм. Это означает, что ТМЭКН выйдет из точки  $a$  на расстоянии  $2,1$  мм (учитывая радиус закраин штампа  $r = 2$  мм) от свободной боковой грани образца и пересечет горизонтальную ось симметрии образца на расстоянии  $3,5$  мм от этой же грани образца. Поскольку кроме рассмотренной ТМЭКН, исходящей из верхнего угла образца, имеется симметричная ей ТМЭКН, исходящая из его нижнего угла, произойдет откол от свободной боковой грани образца сегмента прак-

тически треугольной формы высотой 3,5 мм, что достаточно хорошо соответствует картинам разрушения образцов из ПЦМ, получаемым из эксперимента (рис. 4).

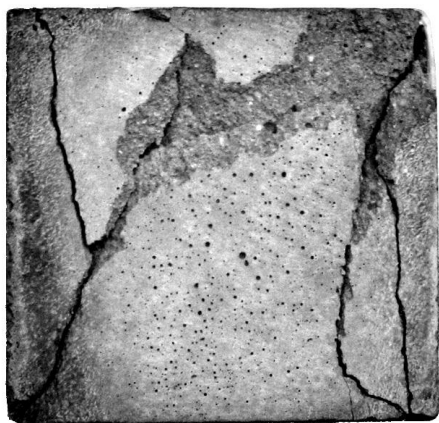


Рис. 4. Образец из песчано-цементного материала, разрушенный одноосным сжатием

Отметим, что при рассмотрении задачи о сжатии прямоугольной пластинки между плитами пресса, когда возникающие при сжатии силы трения по контактирующим поверхностям достаточны для того, чтобы препятствовать перемещениям точек соприкосновения в направлении оси  $Ox$ , нормальные напряжения распределяются по плоскостям соприкосновения также неравномерно [5]. Наименьшее напряжение имеет место посередине ширины пластинки (при  $x = 0$ ) и составляет примерно 70% от величины наибольшего напряжения вблизи свободной стороны пластинки.

Таким образом, учет неравномерности распределения нормальных сжимающих напряжений на поверхностях образца, контактирующих с жесткими штампами или плитами пресса, при котором напряжения являются наименьшими в средней части образца и увеличиваются вблизи его свободных граней, является достаточно обоснованным.

1. *Васильев Л.М.* Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями [Текст] / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межведомств. сб. науч. работ. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. – Вып. 42. – С. 73–80.
2. *Локшина Л.Я.* Расчет предела прочности хрупких материалов с учетом внутреннего трения [Текст] / Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. трудов. - Днепропетровск, 2009. – № 82. – С. 199–206.
3. *Штаерман И.Я.* Контактные задачи теории упругости [Текст] / И.Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
4. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности [Текст] / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 419 с.
5. Тимошенко С.П. Курс теории упругости [Текст] / С.П. Тимошенко. – К.: Наукова думка, 1972. – 508 с.



*Л.Я. Локишина, Ю.А. Костандов*

#### ПАРАМЕТРИ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ЗРАЗКА ГІРСЬКОЇ ПОРОДИ ПРИ ОДНООСНОМУ СТИСКУВАННІ ЖОРСТКИМИ ШТАМПАМИ

Проведено дослідження напруженого стану зразка при його одноосному стискуванні між жорсткими штампами з урахуванням внутрішнього тертя матеріалу і неоднорідності напружень стискування під штампом. Отримано рівняння стану матеріалу на траєкторії максимальних ефективних дотичних напружень (ТМЕДН). Отримано розподіл стискуючої напруги під штампом і визначені координати точок пересічення ТМЕДН з поверхнями зразка, що контактують зі штампами. В якості критерію руйнування матеріалу використовується критерій Кулона. Встановлена залежність положення ТМЕДН від прикладеного навантаження. Проведено порівняння отриманих результатів з експериментальними даними.

*L.Ya. Lokshyna, Yu.A. Kostandov*

#### THE LIMITING STATE PARAMETERS OF ROCK SPECIMEN AT UNIAXIAL COMPRESSION BY RIGID STAMPS

Research of the specimen stressed state at its uniaxial compression between hard stamps taking into account the material internal friction and heterogeneity of tensions of compression under a stamp is executed. Obtained the equation of state of the material on the maximum effective tangential stresses trajectory (METST). Received distribution of compressive stresses under the stamp and the coordinates of intersection points of METST with the surfaces of the specimen, which are in direct contact with the stamps. As a criterion of the destruction material the Coulomb Fracture Criterion was used. The dependence of METST position from the applied load was set. The comparison of obtained results with the experimental data is executed.