

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ ПОЛЕЙ

М. В. Ивахниченко

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова, НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: info@mxdev.biz

Анализируются свойства дробных полей, возникающих в результате применения дробного ротора к известному решению электродинамической задачи. Показано, что дробный ротор описывает изменение поляризации электромагнитного поля. При этом комплексные значения дробного порядка соответствуют изменению линейной поляризации на эллиптическую. Дробный ротор может применяться для описания эффекта изменения поляризации волны, прошедшей через киральный слой. Порядок дробного ротора определяется через значение киральности, вещественные значения дробного порядка между 0 и 1 соответствуют случаю обычного диэлектрического слоя и повороту линейно поляризованной волны на угол $\pi/2$ соответственно. Ил. 4. Библиогр.: 21 назв.

Ключевые слова: дробный ротор, поляризация, киральная среда.

В последнее время аппарат дробного исчисления, использующий дробные операторы, нашел широкое применение к задачам электродинамики. Дробные операторы определяются как фрактализованные от известных операторов, в частности, дробные производные и интегралы являются обобщением обычной производной и интеграла. Метод фрактализации линейного оператора был рассмотрен в работах [1,2].

Рассмотрим линейный оператор L в линейном пространстве C^n n -мерных векторов. Новый оператор L^α называется фрактализованным или дробным оператором (от оператора L), если

- для $\alpha=1$: $L^\alpha|_{\alpha=1}=L$;
- для $\alpha=0$: $L^\alpha|_{\alpha=0}=I$ - единичный оператор;
- выполняется свойство $L^\alpha L^\beta = L^\beta L^\alpha = L^{\alpha+\beta}$.

Оператор L^α может быть построен как оператор, который имеет те же собственные вектора $\{\vec{A}_m\}$, что и исходный оператор L , но имеет собственные значения $\{(a_m)^\alpha\}$, где $\{a_m\}$ - собственные значения оператора L . Произвольный вектор \vec{H} из пространства C^n может быть разложен в линейную комбинацию собственных векторов \vec{A}_m с некоторыми коэффициентами g_m , т. е. $\vec{H} = \sum_{m=1}^n g_m \vec{A}_m$. Тогда мы определим действие оператора L^α на произвольный вектор \vec{H} следующим образом:

$$L^\alpha \vec{H} = \sum_{m=1}^n (a_m)^\alpha g_m \vec{A}_m \quad (1)$$

Таким образом, новый дробный оператор L^α может быть построен, если известны собственные векторы и собственные значения исходного линейного оператора L .

В электродинамике интерес представляет дробный оператор ротор rot^α , введенный в работе [1] для значений дробного порядка $0 < \alpha < 1$, применение которого позволяет получить новые решения уравнений Максвелла, называемые “дробными” или промежуточными решениями. Дробный оператор rot^α определяется как фрактализованный оператор к оператору rot .

Для того, чтобы получить представление для дробного ротора rot^α , удобно использовать преобразование Фурье. Используя преобразование Фурье, действующее из пространства (x, y, z) в пространство $k(k_x, k_y, k_z)$, действие оператора rot для трехмерного векторного поля $\vec{F} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z}$ может быть выражено в k -пространстве как векторное произведение вектора \vec{k} и вектора $F_k(\vec{F})$, т. е.

$$F_k(rot\vec{F})(k_x, k_y, k_z) \equiv i\vec{k} \times F_k(\vec{F}).$$

Для фиксированного вектора \vec{k} оператор $(i\vec{k} \times)$ является линейным оператором в пространстве преобразований Фурье и действие на произвольный вектор \vec{P} можно записать в виде $\vec{S} = (i\vec{k} \times)(\vec{P}) \equiv i\vec{k} \times \vec{P}$. Таким образом, если фрактализовать оператор векторного произведения $(i\vec{k} \times)^\alpha$ в пространстве образов Фурье, то дробный оператор rot^α может быть получен, применив обратное преобразование Фурье: $rot^\alpha = F_k^{-1}((i\vec{k} \times)^\alpha)$.

Для функции одной переменной $\vec{F}(z) = F_x(z)\vec{x} + F_y(z)\vec{y} + F_z(z)\vec{z}$ дробный оператор rot^α имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}^{\alpha} \vec{F}(z) = & [\cos(\pi\alpha/2)D_z^{\alpha}F_x(z) - \sin(\pi\alpha/2)D_z^{\alpha}F_y(z)]\vec{x} + \\ & + [\sin(\pi\alpha/2)D_z^{\alpha}F_x(z) + \cos(\pi\alpha/2)D_z^{\alpha}F_y(z)]\vec{y} + \delta_{0\alpha}D_z^{\alpha}F_z(z), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\delta_{0\alpha}$ - символ Кронекера; $D_z^{\alpha} \equiv_{-\infty} D_z^{\alpha}$ обозначает дробный интеграл Римана-Лиувилля, определяемый как [3]

$${}_a D_z^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^z (z-u)^{-\alpha-1} f(u) du \quad (3)$$

для $\alpha < 0$ и $z > a$. Для дробной производной ($\alpha > 0$) это определение должно быть использовано с дополнительным шагом

$${}_a D_z^{\alpha} f(z) = \frac{d}{dz^m} {}_a D_z^{\alpha-m} f(z), \text{ где } m \text{ выбрано}$$

таким образом, что $(\alpha - m) < 0$.

Используя описанную выше схему, $\operatorname{rot}^{\alpha} \vec{F}$ вектор-функции трех переменных $\vec{F} = \vec{x}e^{iax+iby+icz}$, выражающейся через экспоненты, будет иметь вид [4-6]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}^{\alpha} [\vec{x}e^{iax+iby+icz}] = & \\ = \frac{1}{k^2} \{ \vec{x}i^{\alpha} (\delta_{0\alpha} a^2 + Bk^{\alpha} (b^2 + c^2)) + & \\ + \vec{y}i^{\alpha} (\delta_{0\alpha} ab + k^{\alpha} B(Akc - Bab)) + & \\ + \vec{z}i^{\alpha} (\delta_{0\alpha} ac - k^{\alpha} B(Akb + Bac)) \} e^{iax+iby+icz}, & \end{aligned} \quad (4)$$

где $B = \cos(\frac{\pi\alpha}{2})$; $A = \sin(\frac{\pi\alpha}{2})$. При выводе выражения (4) был использован тот факт, что образ Фурье функции $e^{iax+iby+icz}$ - это дельта-функция Дирака: $F_k(e^{iax}) = \delta(k_x - a)$.

Новое "дробное" электромагнитное поле $(\vec{E}^{\alpha}, \eta_0 \vec{H}^{\alpha})$ определяется как результат применения $\operatorname{rot}^{\alpha}$ к некоторому известному полю $(\vec{E}, \eta_0 \vec{H})$, которое является решением задачи с заданными входными параметрами:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\alpha} = & (ik_0)^{-\alpha} \operatorname{rot}^{\alpha} \vec{E}; \\ \eta_0 \vec{H}^{\alpha} = & (ik_0)^{-\alpha} \operatorname{rot}^{\alpha} (\eta_0 \vec{H}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ - постоянная распространения; $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ - импеданс свободного пространства, ϵ_0, μ_0 - диэлектрическая и магнитная проницаемости. Зависимость от времени полагается $e^{-i\omega t}$.

Дробный порядок α может принимать как вещественные, так и комплексные значения. Дробное поле $(\vec{E}^{\alpha}, \vec{H}^{\alpha})$ выступает в роли про-

межуточного решения между исходным и дуальным решениями, при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ соответственно

$$(\vec{E}^{\alpha}, \eta_0 \vec{H}^{\alpha}) = \begin{cases} (\vec{E}^0, \eta_0 \vec{H}^0), \alpha = 0 \\ (\eta_0 \vec{H}^0, -\vec{E}^0), \alpha = 1 \end{cases}. \quad (6)$$

Интерес к дробным операторам связан с возможностью простого описания переходных, неидеальных ситуаций в задачах электродинамики, расширяющих известные, хорошо изученные канонические случаи.

Если исходное поле является полем излучения некоторого распределения источников тока, тогда дробное поле соответствует новым "дробным" источникам, которые обобщают канонические источники, такие как точечный диполь, нить или лист тока.

Дробные решения и соответствующие источники обсуждались в работах [4 - 8]. Дробные источники, рассмотренные в качестве зеркальных источников, могут описывать решение задач отражения волн от границы раздела. Данный подход приводит также к новым границам со специфическими свойствами. Показано, что дробные источники, полученные с помощью $\operatorname{rot}^{\alpha}$, соответствуют идеально электрически-магнитнопроводящей границе (ИЭМП), рассмотренной в работе [9]. Несмотря на то, что подобные границы имеют простое математическое описание, их физическая реализация представляет собой сложную задачу. Реализация ИЭМП рассмотрена в работах [10, 11].

Применение $\operatorname{rot}^{\alpha}$ в виде (5) гарантирует, что поле остается решением уравнения Максвелла в той же среде с параметрами ϵ_0, μ_0 [1]. Эффект дробного порядка α приводит к перемешиванию электрических и магнитных свойств в том смысле, что дробное электрическое поле - комбинация исходного электрического и магнитного поля. Это означает, что $\operatorname{rot}^{\alpha}$ изменяет поляризацию поля. Подобные явления изменения поляризации поля наблюдаются в би-изотропных средах [12] или, в частном случае, киральных средах. В данной работе дробное поле моделирует волну, прошедшую через киральный слой, при этом порядок α определяется через киральность.

Дробные поля анализировались в работах многих авторов в различных задачах электродинамики, таких как распространение в бесконечной киральной среде [13], волноводах [14], зада-

чах отражения от импедансных границ [15-18], прохождение через киральный слой [19].

Цель данной работы - описать физические свойства дробного поля и показать возможные применения для описания решений задач электродинамики. Изучены поляризационные свойства дробного поля и показано, что дробное поле может описывать волну, прошедшую через киральный слой.

1. Дробный ротор и дробные поля.

Оператор дробного ротора rot^α был введен в работе [1]. Дробное поле определяется из уравнения (5).

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в бесконечном (безграничном) изотропном пространстве, характеризующемся диэлектрической и магнитной проницаемостями (ϵ_0, μ_0) . Не нарушая общности, можно считать, что волна распространяется вдоль оси y и выражается через две независимые компоненты

$$E_z = D_e e^{iky}, H_z = D_m e^{iky}, \quad (7)$$

где D_e, D_m - произвольные амплитуды электрического и магнитного полей соответственно. Остальные компоненты могут быть найдены из уравнения Максвелла. Используя выражения для дробного ротора (2), (4), компоненты поля $\vec{E}^\alpha (E_x^\alpha, E_y^\alpha, E_z^\alpha)$, $\vec{H}^\alpha (H_x^\alpha, H_y^\alpha, H_z^\alpha)$ выражаются через компоненты исходного поля [4,5]:

$$E_z^\alpha = BE_z + A\eta_0 H_z, \quad (8)$$

$$\eta_0 H_z^\alpha = -AE_z + B\eta_0 H_z, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E_x^\alpha &= BE_x + A\eta_0 H_x, E_y^\alpha = BE_y + A\eta_0 H_y, \\ \eta_0 H_x^\alpha &= B\eta_0 H_x - AE_x, \eta_0 H_y^\alpha = B\eta_0 H_y - AE_y, \end{aligned} \quad (10)$$

где $A = \sin(\pi\alpha/2)$; $B = \cos(\pi\alpha/2)$.

Дробное поле $(\vec{E}^\alpha, \eta\vec{H}^\alpha)$ для $0 < \alpha < 1$ описывает поле, промежуточное между исходным $(\vec{E}, \eta\vec{H})$ и дуальным $(\eta\vec{H}, -\vec{E})$ решениями. Этот факт фрактализует принцип двойственности уравнений Максвелла и был подробно изучен в работе [1]. Однако дробный порядок α в определении дробного поля может принимать значения больше 1, а также может быть комплексным числом. При этом дробное поле остается решением уравнений Максвелла. В частности, при $1 < \alpha < 2$ поле $(\vec{E}^\alpha, \eta\vec{H}^\alpha)$ выступает как промежуточное решение между $(\eta\vec{H}, -\vec{E})$ и $(-\vec{E}, -\eta\vec{H})$. В общем случае, когда $\alpha > 0$, дробное решение можно описать как промежуточное между исходным

и дуальным полями на каждом из интервалов [20]:

- для $4n < \alpha < 4n+1$ - между $(\vec{E}, \eta\vec{H})$ и $(\eta\vec{H}, -\vec{E})$;

- для $4n+1 < \alpha < 4n+2$ - между $(\eta\vec{H}, -\vec{E})$ и $(-\vec{E}, -\eta\vec{H})$;

- для $4n+2 < \alpha < 4n+3$ - между $(-\vec{E}, -\eta\vec{H})$ и $(-\eta\vec{H}, \vec{E})$;

- для $4n+3 < \alpha < 4n+4$ - между $(-\eta\vec{H}, \vec{E})$ и $(\vec{E}, \eta\vec{H})$,

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Рассматривая поле (\vec{E}, \vec{H}) в изотропной среде, излученное некоторым распределением электрического и магнитного токов с плотностями \vec{j}_{e0} и \vec{j}_{m0} соответственно, новое дробное поле $(\vec{E}^\alpha, \vec{H}^\alpha)$ от поля (\vec{E}, \vec{H}) определяет поле излучения уже новых "дробных" источников $(\vec{j}^{e,\alpha}, \vec{j}^{m,\alpha})$, которые могут быть выражены через исходные токи как [4, 5]:

$$\vec{j}_{e,\alpha} = \cos(\pi\alpha/2)\vec{j}_{e0} + \sin(\pi\alpha/2)\vec{j}_{m0}, \quad (11)$$

$$\vec{j}_{m,\alpha} = -\sin(\pi\alpha/2)\vec{j}_{e0} + \cos(\pi\alpha/2)\vec{j}_{m0}.$$

Отметим, что дробные токи распределены в том же объеме, что и исходные токи. Применение оператора rot^α приводит к комбинации исходных электрического и магнитного токов. В частном случае, когда исходный магнитный ток отсутствует, т. е. $\vec{j}_{m0} = 0$, получаем

$$\vec{j}_{e,\alpha} = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\vec{j}_{e0}, \quad \vec{j}_{m,\alpha} = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\vec{j}_{e0} \quad (12)$$

Дробные токи (12) представляют собой промежуточное состояние между электрическим и магнитным токами, так как при $\alpha=1$ присутствует только магнитный ток, $\vec{j}_{e,\alpha}|_{\alpha=1} = 0$, $\vec{j}_{m,\alpha}|_{\alpha=1} = -\vec{j}_{e0}$, равный по плотности исходному электрическому. С другой стороны, поле \vec{E}^α должно удовлетворять уравнению Гельмгольца с функцией $rot^\alpha(\vec{j}_{e0})$ в правой части, т. е. дробное поле $(\vec{E}^\alpha, \vec{H}^\alpha)$ есть поле, излученное электрическим током с плотностью

$$\vec{f}^{\alpha,e} = -rot^\alpha(\vec{j}_{e0}). \quad (13)$$

Таким образом, распределение электрического тока с плотностью $\vec{f}^{\alpha,e} = -rot^\alpha(\vec{j}_{e0})$, которая в общем случае может иметь сложный вид, и комбинация электрического и магнитного

токов (12) эквивалентны в том смысле, что токи в обоих случаях излучают одно и то же результирующее поле.

2. Применение дробных источников.

Дробные источники могут быть использованы в качестве источников-образов при решении задач отражения от границ.

Рассмотрим вертикально расположенный электрический диполь

$$\vec{j}^e(\vec{r}) = \vec{z}\delta(\vec{r} - \vec{z}h), \quad (14)$$

находящийся на высоте $z=h$ над плоскостью $z=0$. Известно, что для некоторых границ, например, для идеально электрически (ИЭП) или магнитнопроводящих (ИМП) границ, отраженное поле может быть представлено как поле излучения диполя, расположенного зеркально при $z=-h$. В качестве зеркального источника рассмотрим дробный источник (12), где в качестве исходного источника $\vec{j}_{e0} = \vec{z}\delta(\vec{r} + \vec{z}h)$ выбран источник, который описывает решение для ИЭП. Оказывается, что граница, соответствующая этому дробному зеркальному источнику, является (ИЭМП) границей, введенной в работе [9], и описываемая граничным условием (ГУ)

$$H + ME = 0 \quad (15)$$

с некоторым коэффициентом M . Можно показать связь дробного порядка α с коэффициентом M

$$\text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) = M. \quad (16)$$

ИЭП и ИМП границы соответствуют значению $\alpha=0$ и $\alpha=2$. Значение $\alpha=1$ ($M = \pm 1$) соответствует случаю, когда образом электрического диполя (14) является магнитный диполь

$$\vec{j}_{e,\alpha}|_{\alpha=1} = 0, \quad \vec{j}_{m,\alpha}|_{\alpha=1} = \pm \vec{z}\delta(\vec{r} + \vec{z}h). \quad (17)$$

3. Поляризация дробного поля.

Дробное поле от плоской волны представляет собой волну, распространяющуюся в том же направлении, что и исходная волна. Оператор rot^α изменяет поляризацию поля. Если исходная волна - линейно поляризованная и вектор электрического поля составляет угол δ_0 с осью x , то для вещественных значений α дробное электрическое поле \vec{E}^α остается линейно поляризованным, однако вектор \vec{E}^α повернут на угол $\delta_\alpha = \delta_0 + \pi\alpha/2$. Для комплексных значений α применение rot^α к линейно поляризованной волне приводит к эллиптически поляризованной плоской волне.

В качестве примера рассмотрим исходное поле в виде плоской волны, излученной комбина-

цией электрического и магнитного "листов" тока $(\vec{j}_{e0}, \vec{j}_{m0})$, распределенных в плоскости $y=0$ с плотностями

$$\vec{j}_e = \vec{x}J_e\delta(y), \quad \vec{j}_m = -\eta\vec{x}J_m\delta(y), \quad (18)$$

где

$$J_e = |J_e|e^{-i\psi_e}, \quad J_m = |J_m|e^{-i\psi_m}. \quad (19)$$

Поляризация дробного поля определяется поляризацией исходного поля и дробным порядком α . Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда $\beta_0 = 0$ и $\psi_e = 0$. Вектор поляризации для электрического поля \vec{E}^α может быть представлен в виде [21]

$$P^\alpha(t) = \frac{1}{|E^\alpha|} \times \\ \times \text{Re}\left\{\frac{\eta}{2}[\vec{x}J_e^\alpha \mp \vec{z}J_m^\alpha]\cos(-\omega t \pm ky)\right\}. \quad (20)$$

Верхний (нижний) знак выбирается для значений $y < 0$ ($y > 0$).

Амплитуды J_e^α, J_m^α выражаются

$$J_e^\alpha = |J_e^\alpha|e^{i\psi_e^\alpha} = BJ_e - AJ_m, \quad (21)$$

$$J_m^\alpha = |J_m^\alpha|e^{i\psi_m^\alpha} = AJ_e + BJ_m.$$

Рассмотрим два случая: исходное поле линейно поляризованное или имеет эллиптическую поляризацию.

Если исходное поле линейно поляризованное, тогда для вещественных значений α вектор \vec{E}^α тоже имеет линейную поляризацию, но вектор повернут на угол δ_α , определяющийся из соотношения $\text{tg}\delta_\alpha = \mp |J_e^\alpha|/|J_m^\alpha|$:

$$\delta_\alpha = \delta_0 + \pi\alpha/2. \quad (22)$$

Если α комплексное, тогда дробное поле становится эллиптически поляризованным. Рис. 1, 2 показывают изменение поляризации дробного электрического поля для чисто мнимых значений α .

В случае, когда исходное поле имеет эллиптическую поляризацию, при этом вектор поляризацию образует эллипс с осями $a = J_e$, $b = J_m$, тогда дробное поле при $0 < \alpha < 1$ имеет эллиптическую поляризацию, но оси эллипса повернуты на некоторый угол относительно координатных осей (рис. 2). При $\alpha=1$ эллипс имеет главные оси $a_\alpha = b$ и $b_\alpha = a$. В частном случае, когда исходное поле имеет круговую поляризацию, оператор rot^α не изменяет поляризации.

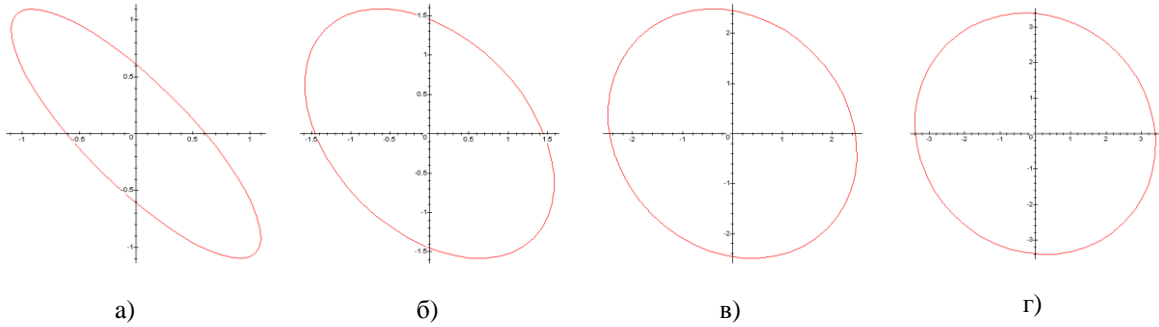


Рис. 1. Вектор поляризации дробного поля для случая линейно поляризованного исходного поля и значений параметров $\psi_e = 0$, $\psi_m = 0$, $|J_e| = |J_m| = 1$: а) - $\alpha = 0,2i$; б) - $\alpha = 0,5i$; в) - $\alpha = 0,8i$; г) - $\alpha = i$

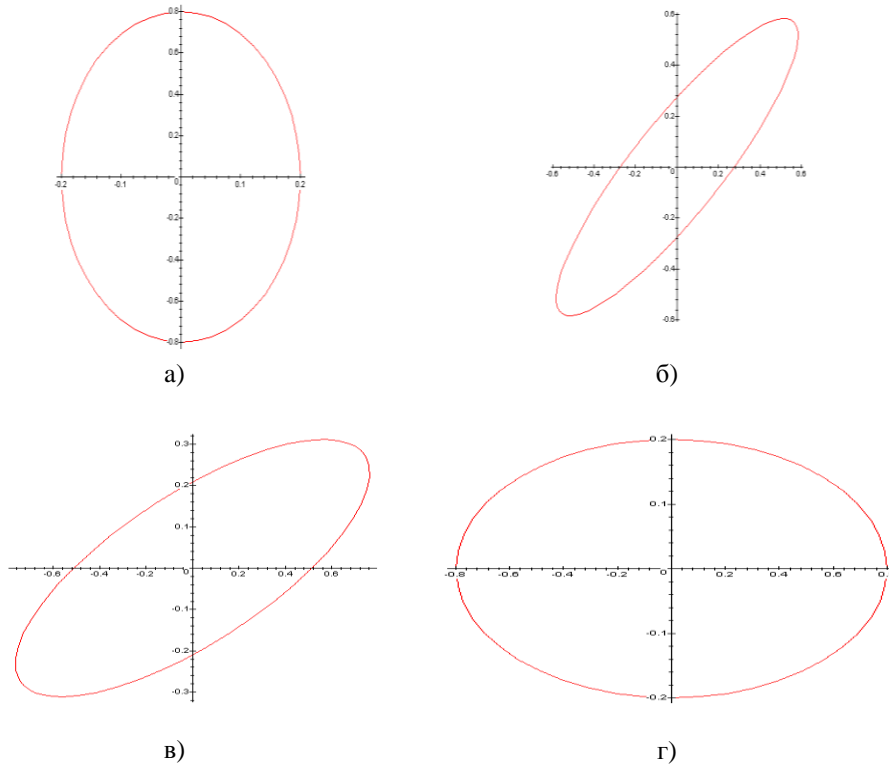


Рис. 2. Вектор поляризации дробного поля для случая эллиптически поляризованного исходного поля и значений параметров $\psi_e = 0$, $\psi_m = \pi/2$, $|J_e| = 0,2$, $|J_m| = 0,8$: а) - $\alpha = 0$ - эллипс с осями 0,8 и 0,2; б) - $\alpha = 0,2$, в) - $\alpha = 0,8$; г) - $\alpha = 1,0$ - эллипс с осями 0,2 и 0,8

4. Прохождение волны через киральный слой. Рассмотрим прохождение плоской волны, падающей из свободного пространства (с параметрами ϵ_0 , μ_0) на би-изотропный слой [12] толщины L (рис. 3). Би-изотропная среда ($0 < y < L$) характеризуется материальными уравнениями

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \xi \vec{H}, \quad \vec{B} = \zeta \vec{E} + \mu \vec{H}, \quad (23)$$

где параметры $(\epsilon, \mu, \xi, \zeta)$ являются скалярами: ϵ , μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости, коэффициенты ξ , ζ могут быть выраже-

ны посредством параметра Теллегена χ и киральности κ :

$$\xi = (\chi - i\kappa)\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \quad \zeta = (\chi + i\kappa)\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \quad (24)$$

Известно, что киральный слой поворачивает поляризацию прошедшего поля. Прошедшую волну можно выразить, используя матрицу прохождения $\vec{T}_{31}^{\square} : \vec{E}^t = \vec{T}_{31}^{\square} \vec{E}^i$, которая для нормального падения выражается как

$$\vec{T}_{31}^{\square} = T_{31} R(-\kappa, k_2 L), \quad (25)$$

где $\kappa_r = \kappa \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 / (\varepsilon \mu)}$; матрица $R(\psi)$ обозначает матрицу поворота на угол ψ ; коэффициент T_{31} определяется соотношением

$$T_{31} = \frac{2\eta_0\eta_2}{2\eta_0\eta_2 \cos(k_2L) + i(\eta_0^2 + \eta_2^2) \sin(k_2L)} \quad (26)$$

Здесь $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$; $\eta_2 = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2}$;
 $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$.

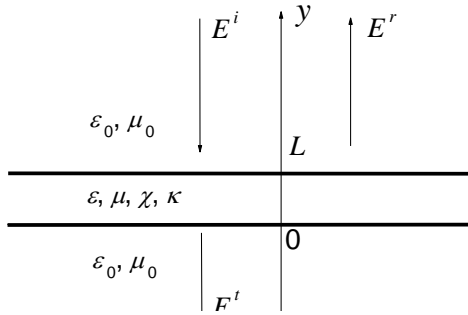


Рис. 3. Геометрия задачи прохождения плоской волны через киральный слой

На рис 4 представлены некоторые численные результаты для $|T_{31}|$. Дробное поле может моделировать поле, прошедшее через киральный слой. В качестве исходного решения рассмотрим задачу прохождения падающей волны через диэлектрический слой. В этом случае коэффициент прохождения T_{31}^0 может быть найден из (25), (26), положив $\kappa=0$. Определим новое дробное решение от исходного решения следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\alpha,i} &\equiv \vec{E}^i, \quad \vec{H}^{\alpha,i} \equiv \vec{H}^i, \\ \vec{E}^{\alpha,t} &= (ik)^{-\alpha} \text{rot}^\alpha \vec{E}^t, \\ \vec{H}^{\alpha,t} &= (ik)^{-\alpha} \text{rot}^\alpha \vec{H}^t, \end{aligned} \quad (27)$$

где (\vec{E}^i, \vec{H}^i) , (\vec{E}^t, \vec{H}^t) - падающее и прошедшее поля исходной задачи соответственно.

Дробное решение (27) характеризуется матрицей прохождения

$$\vec{E}^{\alpha,t} = \vec{T}^{\alpha} \vec{E}^{\alpha,i}, \quad (28)$$

которая может быть найдена в виде

$$\begin{aligned} T^\alpha &= T_{31} \begin{pmatrix} \cos(\pi\alpha/2) & \sin(\pi\alpha/2) \\ -\sin(\pi\alpha/2) & \cos(\pi\alpha/2) \end{pmatrix} = \\ &= T_{31} R(\pi\alpha/2). \end{aligned} \quad (29)$$

Из сопоставления матриц \vec{T}^{α} (25) и \vec{T}_{31} (29) находим уравнение, связывающее дробный порядок α с киральностью κ и толщиной слоя L :

$$\pi\alpha/2 = -\kappa_r k_2 L. \quad (30)$$

Таким образом, дробное поле от поля, прошедшего через обычный диэлектрический слой, моделирует поле, прошедшее через киральный слой той же толщины. Степень дробности определяется через киральность и толщину слоя из уравнения (30).

В данной модели дробного поля, поле, прошедшее через киральный слой, определяется как дробное поле от поля, прошедшего через обычный диэлектрический слой той же толщины. Эффект применения дробного ротора к полю, прошедшему через обычный диэлектрический слой, может описывать киральность.

Значение $\alpha=1$ связано с поворотом на угол $\pi/2$.

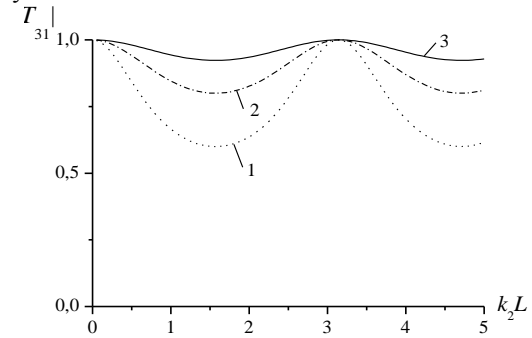


Рис. 4. Коэффициент прохождения $|T_{31}|$ для кирального слоя, как функция от толщины k_2L , для значений параметра $\eta_2 = 1,5; 2,0; 3,0$: 1 - ; 2 - - - - ; 3 - —

Моделирование кирального слоя было рассмотрено также в [19], где прошедшая волна представлялась как дробное поле от падающего поля

$$\vec{E}^t = (ik)^{-\alpha} \text{rot}^\alpha [|\vec{E}^t| \vec{E}^i]. \quad (31)$$

При этом значение $\alpha=0$ соответствует случаю, когда киральный слой отсутствует.

Дробное поле также может быть использовано для моделирования отражения от би-изотропного слоя. Би-изотропный слой на идеально проводящей границе был рассмотрен в работе [18]. В случае отраженного поля дробный порядок α связан с параметром Теллегена и не зависит от параметра киральности.

Выводы. Рассмотрение дробного ротора связано с возможностью получения дробных промежуточных решений. Дробное решение может быть рассмотрено как оператор, изменяющий поляризацию поля. При этом дробные источники поля, представленные как комбинация исходных электрического и магнитного токов, могут моделировать отраженное поле от границ специального вида (импедансного типа с анизотропным импедансом, ИЭМП). Для задачи прохождения плоской волны через киральный слой показана связь

дробного порядку с киральністю. Показан фізичний сенс оператора ротора в розглянутих задачах. Дробні оператори можуть бути використані як математичний апарат для опису інших проміжних станів в електродинаміці.

Автор виражає вдячність Велиєву Е. І. за постановку задачі і корисні дискусії.

1. *Engheta N.* Fractional Curl Operator in Electromagnetics // Microwave and Optical Technology Letters. - 1998. - 17, N2. - P.86-91.
2. *Ozaktas H. M., Zee Zalevsky, Kutay M. A.* The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing. - New York: Willey, 2001. - 532 p.
3. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. - PA, Langhorne: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. - 688 p.
4. *Veliev E., Ivakhnychenko M.* Fractional curl operator in radiation problems // Proceedings of MMET*04, Dniepropetrovsk. - 2004. - P.231-233.
5. *Veliev E., Ivakhnychenko M.* Elementary fractional dipoles // Proceedings of MMET*06, Kharkiv. - 2006. - P.485-487.
6. *Naqvi Q. A., Rizvi A. A.* Fractional dual solutions and corresponding sources // Progress in Electromagnetics Research, PIER. - 2000. - 25. - P.223-238.
7. *Engheta N.* On Fractional Calculus and Fractional Multipoles in Electromagnetism // IEEE Trans. Antennas & Propagation. - 1996. - 44, N4. - P.554-566.
8. *Engheta N.* Use of Fractional Integration to Propose Some 'Fractional' Solutions for the Scalar Helmholtz Equation // a chapter in Progress in Electromagnetics Research (PIER), Monograph Series, Vol.12, Jin A. Kong, ed.EMW Pub., Cambridge, MA. - 1996. - 44, N4. - P.107-132.
9. *Lindell I. V., Sihvola A. H.* Transformation method for Problems Involving Perfect Electromagnetic Conductor (PEMC) Structures // IEEE Trans. Antennas Propag. - 2005. - 53. - P.3005-3011.
10. *Lindell I. V., Sihvola A. H.* Realization of the PEMC Boundary // IEEE Trans. Antennas Propag. - 2005. - 53. - P.3012-3018.
11. *Hanninen I., Lindell I. V., Sihvola A. H.* Realization of Generalized Soft-and-Hard Boundary // Progress In Electromagnetics Research, PIER. - 2006. - 64. - P.317-333.
12. *Lindell I. V., Sihvola A. H., Tretyakov S. A., Viitanen A. J.* Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media. - Boston.: Artech House, 1994. - 352 c.
13. *Hussain A., Naqvi Q. A.* Fractional curl operator in chiral medium and fractional non-symmetric transmission line // Progress in Electromagnetic research, PIER. - 2006. - 59. - P.199-213.
14. *Hussain A., Ishfaq S., Naqvi Q. A.* Fractional curl operator and fractional waveguides // Progress in Electromagnetic research, PIER. - 2006. - 63. - P.319-335.
15. *Engheta N.* Fractionalization Methods and their Applications to Radiation and Scattering Problems // Proceedings of MMET*00, Kharkiv. - 2000. - P.34-40.
16. *Veliev E., Engheta N.* Fractional curl operator in reflection problems // Proceedings of MMET*04, Dniepropetrovsk. - 2004. - P.228-230.
17. *Ahmedov T. M., Ivakhnychenko M. V., Veliev E.* New generalized electromagnetic boundaries - fractional operators approach // Proceedings of MMET*06, Kharkiv. - 2006. - P.434-437.
18. *Ivakhnychenko M. V., Veliev E., Ahmedov T.M.* Fractional operators approach in electromagnetic wave reflection problems // JEMWA. - 2007. - 21, N13. - P.1787-1802.
19. *Naqvi S. A., Naqvi Q. A., Hussain A.* Modelling of transmission through a chiral slab using fractional curl operator // Optics Communications. - 2006. - 266. - P.404-406.
20. *Naqvi Q. A., Abbas M.* Complex and higher order fractional curl operator in electromagnetics // Optics Communications. - 2004. - 241. - P.349-355.
21. *Ishimaru A.* Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering. - NJ, Englewood.: Prentice-Hall, 1991. - 637 p.

POLARIZATION PROPERTIES OF FRACTIONAL FIELDS

M. V. Ivakhnychenko

Properties of the fractional field, defined as a result of application of fractional curl operator to known solution of some electromagnetic problem, are analyzed. It is shown, that fractional curl is related with polarization rotation of electromagnetic field. Besides, complex values of the fractional order corresponds to transformation of linear polarization to the elliptic one. Fractional curl can be utilized to describe effect of polarization transformation of the field, transmitted through chiral layer. The order of fractional curl is obtained from the chirality parameter, limit values of the fractional order 0 and 1 correspond to dielectric layer and the rotation of linear polarized wave by angle $\pi/2$, respectively.

Keywords: fractional curl operator, polarization, chiral medium.

ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ДРОБОВИХ ПОЛЕЙ

М. В. Івахніченко

Аналізуються властивості дробових полів, що виникають в результаті застосування дробового ротора к відомому рішенню електродинамічної задачі. Показано, що дробовий ротор описує зміну поляризації електромагнітного поля. При цьому комплексні значення дробового показника відповідають зміні лінійної поляризації на еліптичну. Дробовий ротор може застосовуватися для опису ефекту змінення поляризації хвилі, що пройшла через киральний шар. Порядок дробового ротора знаходиться через значення киральності, дійсні значення дробового порядку між 0 та 1 відповідають випадку звичайного діелектричного шару та повороту лінійно поляризованої хвилі на кут $\pi/2$ відповідно.

Ключові слова: дробовий ротор, поляризація, киральне середовище.

Рукопись поступила 12 апреля 2007 г.