

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ В ВИДЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ: ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СПЕКТРА

А. Ю. Попков, А. Е. Поединчук, И. К. Кузьмичев

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: lytc@yandex.ru

На основе метода Галеркина разработан численный алгоритм расчета спектра осесимметричных электромагнитных колебаний объемных резонаторов в виде тел вращения с идеально проводящей граничной поверхностью. Рассмотрены вопросы устойчивости и сходимости алгоритма при увеличении числа базисных функций метода Галеркина. Общие возможности алгоритма проанализированы на примере сферического резонатора. Исследованы спектры собственных частот резонаторов, границы которых образованы сферической, конической и цилиндрической поверхностями. Обнаружены собственные колебания, аналогичные по своей структуре колебаниям типа «прыгающего мячика», квазиоптических открытых двухзеркальных резонаторов со сферическими зеркалами. Ил. 6. Табл. 1. Библиогр.: 9 назв.

Ключевые слова: объемные резонаторы, расчет спектра.

В работе [1] описан полусферический открытый резонатор (ОР), в центре плоского зеркала которого расположен отрезок сверхразмерного круглого волновода. В такой открытой электродинамической системе могут возбуждаться аксиально-симметричные типы колебаний. Экспериментально показано, что в диапазоне перестройки порядка длины волны в таком резонаторе существует только одно колебание. По этой причине такая резонансная система может найти широкое применение в различных приборах и устройствах мм и субмм диапазонов длин волн. В частности, она может быть использована для измерения электрофизических свойств веществ с большими потерями. В этом случае при расположении исследуемого образца вдоль оси отрезка сверхразмерного круглого волновода ослабляется его связь с полем, что и позволяет производить необходимые измерения. Кроме этого, устраняется неоднозначность в определении резонансной частоты ОР с образцом. С другой стороны, резонансные системы подобного типа могут найти применение при создании накопителей СВЧ мощности в мм диапазоне длин волн.

Вместе с тем на практике ОР такого типа часто необходимо помещать в металлические оболочки. Поэтому вопрос о спектре резонансных частот такой открытой электродинамической системы остается открытым. Представляет также определенный практический интерес изучение структуры полей различных типов колебаний в такой резонансной системе. Рассмотрению этих вопросов и посвящена работа.

1. Постановка задачи. Рассматривается объемный резонатор в виде тела вращения с идеально проводящей граничной поверхностью. Резонатор заполнен однородной изотропной средой

с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ соответственно. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z , совпадающей с осью симметрии резонатора. Тогда граничная поверхность резонатора может быть задана уравнениями

$$\begin{aligned} x &= b(z) \cos \varphi, & 0 \leq z \leq l; \\ y &= b(z) \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь (x, y, z) – декартовы координаты; $b(z)$ – образующая граничной поверхности, которая является кусочно-дифференцируемой функцией на интервале $0 \leq z \leq l$, где l – длина резонатора вдоль оси z (см. рис. 1).

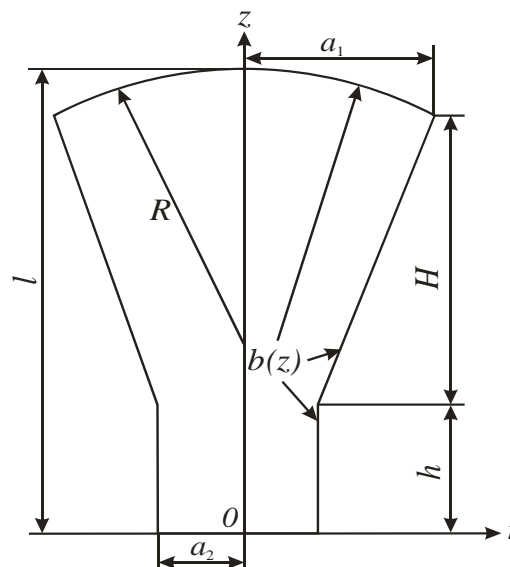


Рис. 1. Геометрия резонатора

Задача о собственных частотах и собственных колебаниях электромагнитного поля резонатора состоит в определении значений частот ω , при которых существуют нетривиальные решения однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющие условию равенства нулю тангенциальных составляющих электрического поля на граничной поверхности резонатора и условию Мейкснера [2] в окрестности ребер граничной поверхности (если такие имеются).

В дальнейшем ограничимся осесимметричными колебаниями, а именно: будем предполагать, что напряженности электрических и магнитных полей не зависят от азимутального угла φ ($\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$). В этом случае уравнения Максвелла сводятся к двум независимым системам уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} E_\varphi = -i \frac{\omega}{c} \mu H_r, \\ \frac{\partial}{\partial z} H_r - \frac{\partial}{\partial r} H_z = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = i \frac{\omega}{c} \mu H_z; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} H_\varphi = i \frac{\omega}{c} \varepsilon E_r, \\ \frac{\partial}{\partial z} E_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z = i \frac{\omega}{c} \mu H_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon E_z, \end{cases}$$

где c – скорость света в вакууме. Системы уравнений (2) описывают колебания H -типа ($E_\varphi \neq 0, H_\varphi = 0$) и колебания E -типа ($H_\varphi \neq 0, E_\varphi = 0$). Ограничимся рассмотрением колебаний H -типа (аналогично могут быть рассмотрены колебания E -типа).

Легко показать, что в этом случае исходная граничная задача о собственных колебаниях H -типа эквивалентна нахождению волновых чисел $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$\Delta_{rz} U + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) U = 0 \quad (3)$$

в области $\{(r, z) : 0 < z < l, 0 < r < b(z)\}$ и удовлетворяют граничным условиям

$$U(0, z) = 0, \quad U(b(z), z) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\Delta_{rz} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – двумерный оператор Лапласа.

Как известно [3, 4], существует множество $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ значений волнового числа k , при которых задача (3), (4) имеет нетривиальные решения U_n . Собственные частоты и собственные колебания могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} \omega_n &= k_n \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad E_\varphi^{(n)} = U_n; \\ H_r^{(n)} &= -\frac{c}{i \omega_n \mu} \cdot \frac{\partial U_n}{\partial z}; \\ H_z^{(n)} &= \frac{c}{i \omega_n \mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r U_n). \end{aligned} \quad (5)$$

2. Численный алгоритм. Численный алгоритм решения задачи (3), (4) основан на методе Галеркина [4], основная идея которого состоит в следующем. Пусть $\phi_n(r, z)_{n=1}^\infty$ – некоторая известная система функций, удовлетворяющих граничным условиям (4). Предположим, что эта система функций полна в области $D = \{(r, z) : 0 \leq z \leq l, 0 \leq r \leq b(z)\}$, где $b(z)$ – образующая граничной поверхности резонатора.

Пусть k и $U(r, z)$ соответственно собственное волновое число и собственная функция задачи (3), (4). Тогда, в силу полноты системы функций $\phi_n(r, z)_{n=1}^\infty$, задача (3), (4) эквивалентна следующей цепочке проекционных соотношений:

$$\int_0^l dz \int_0^{b(z)} (-LU + k^2 U) \phi_n(r, z) r dz = 0, \quad (6)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Здесь через $L = -\Delta_{rz} + \frac{1}{r^2}$ обозначен дифференциальный оператор, порожденный задачей (3), (4).

В соответствии с методом Галеркина приближенное решение задачи (6) будем искать в виде

$$U(r, z) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(r, z). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), приходим к алгебраической задаче на собственные значения

$$\mathbf{A}\mathbf{C} + k^2 \mathbf{B}\mathbf{C} = 0, \quad (8)$$

где $\mathbf{C} = (c_n)_{n=1}^N$ – вектор-столбец искомых коэффициентов (см. (7)), $\mathbf{A} = \|a_{mn}\|_{m, n=1}^N$, $\mathbf{B} = \|b_{mn}\|_{m, n=1}^N$ – матрицы с матричными элементами, задаваемыми по формулам

$$a_{mn} = \int_0^l dz \int_0^{b(z)} \left(\nabla \phi_n \nabla \phi_m + \frac{\phi_n \phi_m}{r^2} \right) r dr; \quad (9)$$

$$b_{mn} = \int_0^l dz \int_0^{b(z)} \phi_n \phi_m r dr. \quad (10)$$

Таким образом, исходная задача (3), (4) сводится к поиску тех значений волнового числа k , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (8).

Эффективное, с вычислительной точки зрения, решение задачи (8), а, следовательно, и задачи (3), (4), предполагает: во-первых, выбор достаточно простой базисной системы функций $\phi_n(r, z)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих граничным условиям (4), и, во-вторых, вычисление матричных элементов (4), (10) с гарантированной точностью. В качестве базисных функций $\phi_n(r, z)_{n=1}^{\infty}$ выберем систему функций, по-видимому, впервые предложенную в [5]

$$\phi_n(r, z) = b^{-1}(z) J_1 \left(\frac{\mu_p}{b(z)} r \right) \sin \frac{\pi m}{l} z, \quad (11)$$

где $J_1 \left(\frac{\mu_p}{b(z)} r \right)$ – функция Бесселя первого порядка; $n = (p, m)$; $p, m = 1, 2, \dots$; μ_p – p -й корень функции Бесселя $J_1(\mu_p) = 0$. Функции из (11) удовлетворяют граничным условиям (4). Кроме того, можно показать (см., например, [6]), что эта система функций обладает свойством сильной минимальности в энергетическом пространстве, порожаемом дифференциальным оператором в (6). Это свойство системы функций (11) гарантирует устойчивость численного алгоритма решения уравнения (8) по отношению к погрешности в расчете матричных элементов (9) и (10).

Подставляя (11) в (9) и (10), после ряда преобразований получаем

$$a_{mm'}^{pp'} = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_p)}{2l} \begin{cases} \pi m m' \delta_{mm'} + 2\mu_p^2 \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \right] \sin mx \sin m' x dx, & p = p', \\ \frac{4\mu_p \mu_{p'} J_0(\mu_{p'})}{(\mu_p^2 - \mu_{p'}^2) J_0(\mu_p)} \int_0^{\pi} \left[2 \frac{\mu_p^2 + \mu_{p'}^2}{\mu_p^2 - \mu_{p'}^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \sin mx \sin m' x - \right. \\ \left. - \frac{\dot{a}}{a} (m' \cos m' x \sin mx - m \cos mx \sin m' x) \right] dx, & p \neq p'; \end{cases} \quad (12)$$

$$b_{mm'}^{pp'} = \frac{\pi J_0^2(\mu_p)}{2} \delta_{mm'} \delta_{pp'}, \quad m, m' = 1, 2, \dots, M, \quad p, p' = 1, 2, \dots, P, \quad (13)$$

где $a(x) = b \left(\frac{lx}{\pi} \right)$; точка обозначает операцию дифференцирования; $\delta_{mm'}$ – символ Кронекера.

Используя полученные представления для матричных элементов (12), (13), можно представить (8) в следующей векторной форме:

$$\mathbf{C}^p + \sum_{p'=1}^P \bar{\mathbf{A}}^{pp'} \mathbf{C}^{p'} + \bar{k}^2 \bar{\mathbf{B}} \mathbf{C}^p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (14)$$

Здесь $\mathbf{C}^p = (c_m^p)_{m=1}^M$, $p = 1, 2, \dots, P$ – неизвестные вектор-столбцы; $\bar{\mathbf{A}}^{pp'}$, $\bar{\mathbf{B}}$ – квадратные матрицы порядка M , матричные элементы которых имеют вид

$$\bar{a}_{mm'}^{pp'} = \begin{cases} \frac{\mu_p^2}{\pi m m'} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \right] \sin mx \sin m' x dx, & p = p', \\ \frac{4\mu_p \mu_{p'} J_0(\mu_{p'})}{\pi m m' (\mu_p^2 - \mu_{p'}^2) J_0(\mu_p)} \int_0^{\pi} \left[2 \frac{\mu_p^2 + \mu_{p'}^2}{\mu_p^2 - \mu_{p'}^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \sin mx \sin m' x - \right. \\ \left. - \frac{\dot{a}}{a} (m' \cos m' x \sin mx - m \cos mx \sin m' x) \right] dx, & p \neq p'; \end{cases} \quad (15)$$

$$\bar{b}_{mm'}^{pp'} = \frac{\delta_{mm'}}{m m'}, \quad (16)$$

где $\bar{k} = \frac{kl}{\pi}$ – нормированное волновое число.

Таким образом, если \bar{k} и \mathbf{C}^p , $p=1, 2, \dots, P$ – решение уравнения (14), то приближенное решение задачи (3), (4) можно представить в виде

$$U(r, z) = \sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^M c_m^p b^{-1}(z) J_1\left(\frac{\mu_p}{b(z)} r\right) \sin \frac{\pi m}{l} z. \quad (17)$$

На основании метода Галеркина можно утверждать, что при увеличении $P \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$ решение задачи (14) стремится к решению задачи (3), (4).

Покажем теперь, что уравнения (14) являются хорошо известной обобщенной задачей на собственные значения и собственные векторы матриц конечного порядка. С этой целью введем матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ и вектор-столбец $\bar{\mathbf{C}}$ по формулам

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}^{11} & \bar{\mathbf{A}}^{12} & \dots & \bar{\mathbf{A}}^{1P} \\ \bar{\mathbf{A}}^{11} & \mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}^{22} & \dots & \bar{\mathbf{A}}^{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{A}}^{P1} & \bar{\mathbf{A}}^{P2} & \dots & \mathbf{I} + \bar{\mathbf{A}}^{PP} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{B}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\mathbf{B}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^1 \\ \mathbf{C}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}^P \end{pmatrix},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица порядка M , а $\bar{\mathbf{A}}^{pp}$ и $\bar{\mathbf{B}}$ – квадратные матрицы порядка M (см. (15), (16)). В этих обозначениях (14) принимает вид

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{C}} + \bar{k}^2 \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}} = 0. \quad (18)$$

Следовательно, уравнение (18) является обобщенной задачей на собственные значения \bar{k}^2 и собственные векторы $\bar{\mathbf{C}}$ пары матриц конечного порядка $P \cdot M$.

Матричные элементы этих матриц могут быть вычислены по формулам (15), (16) с помощью соответствующих квадратурных формул. Как следует из (15), эти матричные элементы являются интегралами от быстро осциллирующих функций. Поэтому при их расчетах использовались специализированные квадратурные формулы Филона [7].

Заметим, что матрицы $\bar{\mathbf{A}}^{pp'} = \left\| \bar{a}_{mm'}^{pp'} \right\|_{m, m'=1}^M$ обладают свойствами симметрии, а именно: $\bar{a}_{mm'}^{pp'} = \bar{a}_{m'm}^{pp}$ и $\bar{a}_{mm'}^{pp'} = \frac{J_0(\mu_{p'})}{J_0(\mu_p)} \bar{a}_{m'm}^{p'p}$. Учет этих свойств позволяет сократить время расчета матричных элементов матрицы $\bar{\mathbf{A}}^{pp'}$.

Численное решение уравнения (18) может быть проведено стандартными методами [8]. К сожалению, получить оценку скорости сходимости ($P \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$) приближенных волновых чисел к точным в общем случае ($b(z)$ – достаточно произвольная функция) невозможно. Поэтому при исследовании сходимости и устойчивости алгоритма определяющее значение имеет численный эксперимент.

Прежде чем излагать результаты численного эксперимента, отметим следующее. Пусть образующая граничной поверхности резонатора функция $b(z)$ является постоянной величиной. Тогда легко показать, что из (15), (16) и (18) прямым вычислением получается явная формула для собственных волновых чисел задачи (3), (4)

$$k_{mn} = \frac{\pi m^2}{l^2} + \frac{\mu_p^2}{b^2}, \quad p, m = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

которые соответствуют осесимметричным колебаниям H -типа цилиндрического резонатора круговой формы с радиусом b и длиной l . Следовательно, в этом случае численный алгоритм (15)-(18) позволяет определять собственные волновые числа с точностью расчета корней μ_p функции Бесселя $J_1(x)$. Очевидно, это справедливо и при выполнении следующего условия на функцию $b(z)$:

$$\left| \frac{\dot{b}(z)}{b(z)} \right| \leq 1, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (20)$$

Исследование сходимости и устойчивости численного алгоритма при изменении количества базисных функций (см. (17)) проверялось на примере резонатора сферической формы. Выбор такого резонатора обусловлен двумя причинами. Во-первых, собственные волновые числа осесимметричных колебаний H -типа (E_φ, H_r, H_z) такого резонатора могут быть вычислены с гарантированной точностью, как корни функции Бесселя полуцелого индекса. Во-вторых, функция $b(z) = \sqrt{z(2R-z)}$, $0 \leq z \leq 2R$, является образующей сферического резонатора (R – радиус резонатора), и следовательно, отношение $\frac{\dot{b}(z)}{b(z)} = \frac{R-z}{z(2R-z)}$ неограниченно возрастает при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow 2R$. Поэтому этот резонатор, с геометрической точки зрения, существенно отличается от цилиндрического резонатора, для которого алгоритм дает точный результат.

Результаты расчета для сферического резонатора при различных наборах базисных функций (11) приведены на рис. 2 ($kR=4,4936$ – кривая 1, $kR=9,3612$ – кривая 2, $kR=15,0972$ – кривая 3). Точные значения собственных волновых чисел, нормированных на радиус R резона-

тора, показаны горизонтальными пунктирными линиями. Треугольными метками изображены приближенные собственные волновые числа, полученные при решении уравнения (18) для $P=4$ и нескольких значений параметра $M=10, 20, \dots, 60$.

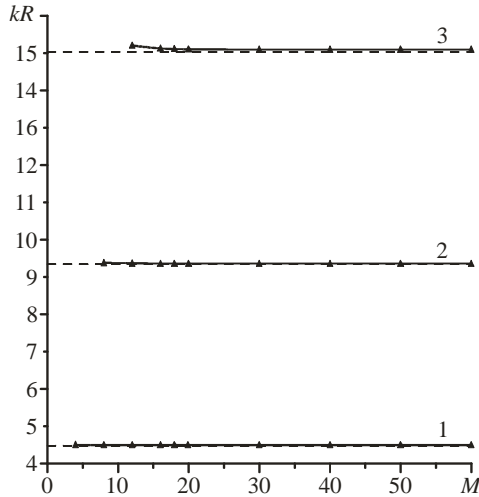


Рис. 2. Сходимость алгоритма при вычислении собственных чисел на примере сферы

С ростом параметра $M \rightarrow \infty$ приближенные значения волновых чисел монотонно убывают и стремятся к точным значениям. Следует отметить, что такое поведение приближенных волновых чисел при увеличении числа базисных функций характерно для вариационных методов расчета собственных чисел [4]: предложенный алгоритм дает для собственных волновых чисел приближение с избытком.

В таблице приведены некоторые собственные волновые числа сферического резонатора и их приближенные значения, полученные при ($P=4, M=50$).

Колебания H_{01q} для сферы $M=50, P=4$

q	Точная формула kR	Расчет kR
1	4,493409	4,493583
2	5,763459	5,763985
3	6,987932	6,989512
4	8,182561	8,185459
5	9,355812	9,361185
6	10,512835	10,521794
7	11,657032	11,671593
8	12,790782	12,813638
9	13,915823	13,951820
10	15,033469	15,097158

Максимальная относительная погрешность не превосходит 0,5%. Анализ результатов численного эксперимента показал, что в случае

осесимметричных колебаний с малым числом вариаций по радиусу для расчета собственных волновых чисел с относительной погрешностью, не превышающей 1% достаточно выбрать параметр $M=3[kR]$, где $[kR]$ – целая часть собственного волнового числа kR .

Наряду с собственными волновыми числами проводился расчет соответствующих им собственных векторов $(c_m^p)_{m=1}^M, p=1, 2, \dots, P$ (см. (17)). Для вычисления собственных векторов использовался алгоритм обратных итераций [8]. Результаты расчетов приведены на рис. 3, 4. В качестве критерия точности вычисления собственных векторов использовалась квадратичная норма

$$\delta(M) = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^M |c_m^p(M) - c_m^p(M-10)|^2}{\sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^M |c_m^p(M)|^2}}, \quad (21)$$

где $(c_m^p)_{m=1}^M, p=1, 2, \dots, P$ – собственные векторы, полученные при фиксированном значении параметра P и меняющемся значении параметра M . Для трех приближенных значений собственных волновых чисел на рис. 3 показаны типичные зависимости величины $\delta(M)$ как функции параметра M ($kR=4,4936$ – кривая 1; $kR=9,3612$ – кривая 2; $kR=15,0972$ – кривая 3). Как видно, с ростом M функция $\delta(M)$ монотонно убывает и уже при $M=50$ величина $\delta(M)$ не превосходит 10^{-2} .

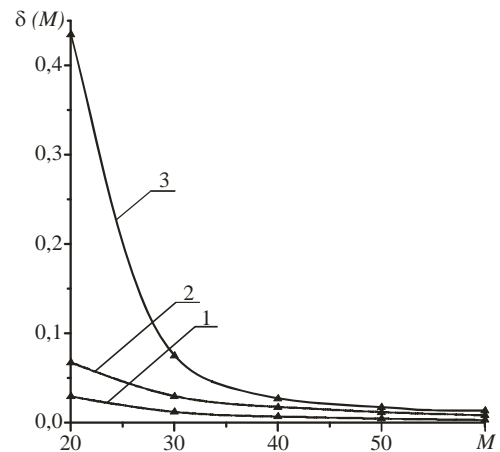


Рис. 3. Сходимость алгоритма при вычислении собственных векторов на примере сферы

На рис. 4 изображены линии постоянных значений собственных электрических полей (E_φ – компонента) в плоскости $\varphi = \text{const}$, отвечающие этим собственным векторам (см. (17)). Поскольку собственные векторы могут быть определены с точностью до постоянного множи-

теля, то было использовано условие нормировки $\sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^M |c_m^p|^2 = 1$. Отметим, что распределение полей собственных колебаний, приведенные на рис. 4,

достаточно хорошо совпадают с соответствующими распределениями, полученными при строгом решении задачи о собственных колебаниях сферического резонатора. Расчет проведен для тех же собственных волновых чисел, что и на рис. 3.

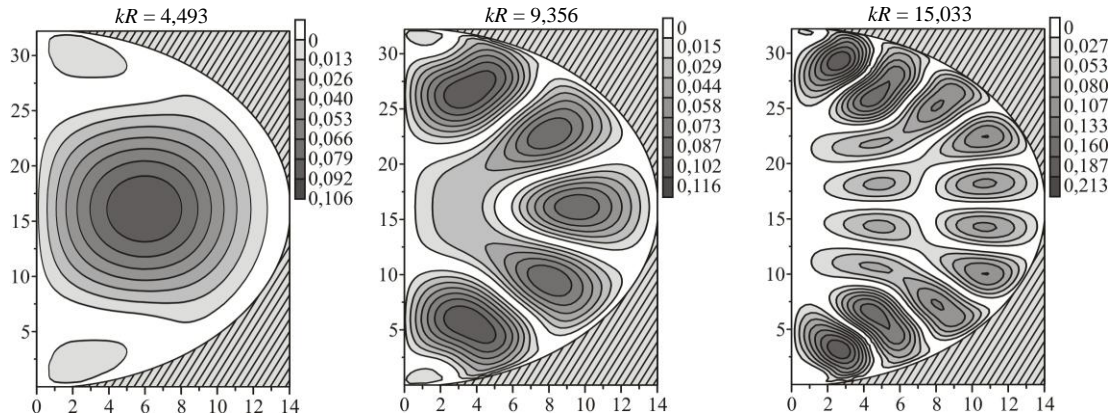


Рис. 4. Примеры распределения полей для сферы

Таким образом, результаты численного эксперимента убедительно свидетельствуют об устойчивости и сходимости предложенного алгоритма для расчета как собственных волновых чисел, так и отвечающих им собственных колебаний.

С помощью разработанного алгоритма было проведено исследование спектра собственных частот объемных резонаторов, границы которых образованы тремя типами поверхностей: сферической, конической и цилиндрической (см. рис. 1). Геометрические параметры резонатора были выбраны такими же, как в работе [1]: радиус кривизны и апертура сферического зеркала соответственно $R = 39$ мм и $2a_1 = 38$ мм; радиус и длина цилиндрической части граничной поверхности соответственно $a_2 = 9$ мм и $h = 12,5$ мм. Резонансная длина волны резонатора изменялась в пределах $6 \leq \frac{l}{\lambda} \leq 9$, где l – длина резонатора

вдоль оси симметрии (ось Oz). На рис. 5 для рассматриваемого диапазона длин волн показаны линии равных амплитуд E_φ компоненты электрического поля некоторых аксиально-симметричных собственных колебаний. Как видно, все колебания имеют довольно сложную структуру поля. Анализ численных результатов показал, что в рассматриваемом резонаторе существуют колебания, которые можно идентифицировать как колебания типа «прыгающего мячика»

с собственными волновыми числами $\frac{kl}{\pi} \cong n$, где

n – целое положительное число. Так, в указанном выше диапазоне длин волн это колебания с $kl = 49,713$ и $kl = 52,785$. Для формирования этих

колебаний основную роль играют сферическая и цилиндрическая части граничной поверхности, а ее коническая часть находится в области экспоненциально слабого поля. С увеличением волнового числа kl поле таких колебаний все более локализуется в окрестности оси симметрии резонатора. Такие свойства собственных колебаний позволяют сделать вывод о возможности существования их и в соответствующем открытом резонаторе (отсутствует коническая часть граничной поверхности). Этот вывод хорошо согласуется с результатами работы [1], где экспериментально показано, что в таком открытом резонаторе возможно возбуждение аксиально-симметричных колебаний, которые близки по своей структуре колебаниям типа «прыгающего мячика».

В этой связи было проведено сравнение результатов экспериментальных измерений и результатов расчетов с помощью разработанного алгоритма для резонатора, геометрия которого показана на рис. 1. На рис. 6 приведена расчетная зависимость резонансной частоты f от длины l

резонатора для колебания с $\frac{kl}{\pi} \cong 16$ (сплошная

линия). Здесь же показана экспериментальная зависимость $f = \Phi(l)$ треугольными метками.

В эксперименте резонатор имел те же геометрические размеры. Отличие состояло лишь в том, что в нем отсутствовала коническая часть граничной поверхности (на рис. 5 она обозначена пунктирной линией). Как видно из рис. 6, наблюдается удовлетворительное совпадение (различие составляет менее 1 %) расчетных и экспериментальных значений частоты во всем диапазоне перестройки резонатора по длине.

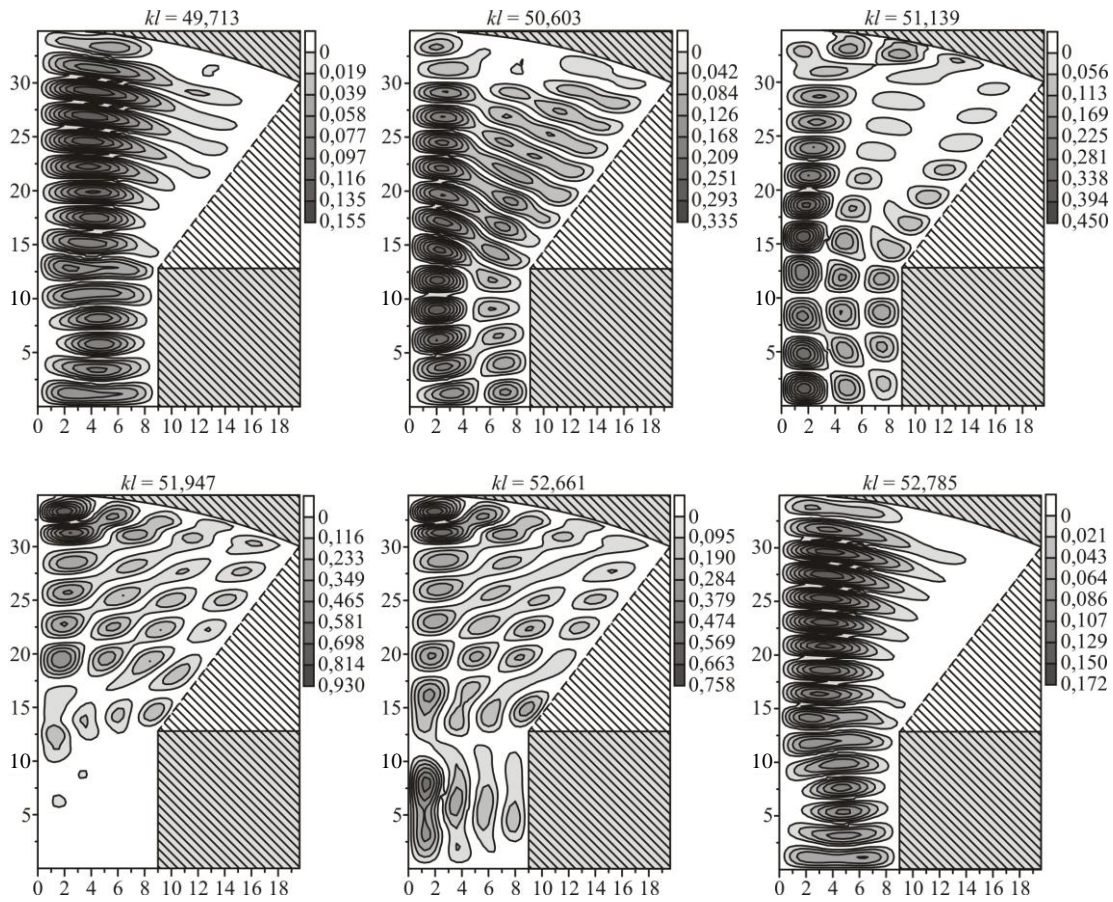


Рис. 5. Примеры распределения полей в исследуемом резонаторе

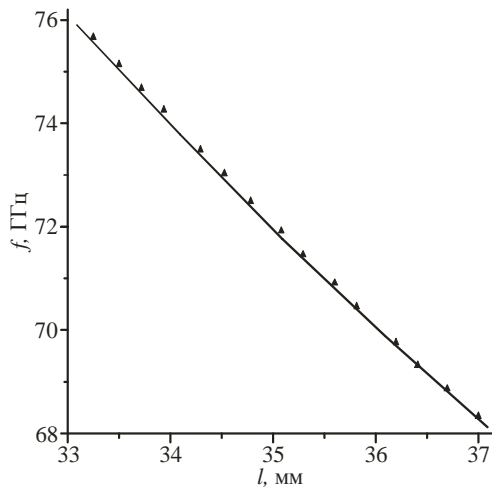


Рис. 6. Зависимость резонансной частоты от длины резонатора

Выводы. Разработан численный алгоритм для расчета спектра собственных частот и осесимметричных колебаний объемных резонаторов в виде тел вращения с идеально проводящей граничной поверхностью. Рассмотрены вопросы устойчивости и сходимости этого алгоритма при увеличении числа базисных функций.

Общие возможности численного алгоритма и основные особенности его реализации проиллюстрированы на примере объемного резонатора сферической формы. Предложенный алгоритм был использован для исследования спектра собственных частот объемного резонатора, граница которого образована сферической, конической и цилиндрической поверхностями. С помощью численных экспериментов обнаружены собственные колебания типа «прыгающего мячика», для которых коническая часть граничной поверхности находится в области экспоненциально слабого поля. Это дает определенную основу для применения разработанного численного алгоритма при расчете собственных частот некоторых классов открытых резонаторов в виде тел вращения, в которых основным механизмом возбуждения высокочастотных колебаний является образование внешних каустик (бочкообразные, двухзеркальные открытые резонаторы и т. п.).

1. *Kuzmichev I. K., Melezhhik P. N. and Poedinchuk A. Ye.* An open resonator for physical studies // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. – 2006. – 27, No. 6. – P. 857-869.
2. *Mexiner J.* The behavior of electromagnetic fields at edges // *IEEE Trans.* – 1972. – V. AP-20, No. 7. – P. 442-446.

3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: в 2-х т. – М.: Гостехиздат, 1951. – Т. 1. – 476 с.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: в 2-х т. – М.: Гостехиздат, 1951. – Т. 2. – 544 с.
5. Канторович Л. В. Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
6. Слепян Г. Я. К расчету собственных электромагнитных колебаний тел вращения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1977. – 17, № 3. – С. 776-780.
7. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 232 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. – М.: Наука, 1970. – 832 с.
9. Уилксон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

THE COMPLEX SHAPED CAVITY AXIALLY SYMMETRIC RESONATORS. THE NUMERICAL ALGORITHM FOR EIGENFREQUENCY SPECTRUM CALCULATION

A. Y. Popkov, A. Ye. Poedinchuk,
I. K. Kuzmichev

Bubnov-Galerkin method is applied for calculation axially symmetrical types of electromagnetic field oscillations for cavity rotational symmetry resonators with infinite conductivity boundaries. The problems of algorithm convergence and stability when the number of the basics functions in Bubnov-Galerkin method increases are considered. The general algorithm abilities is analyzed with spherical shape resonator. The eigenfrequency spectrums for resonators constructed by spherical,

cone and cylindrical shaped surfaces is examined. The oscillations with existence of caustic which is typical for quasi-optical resonators with spherical shaped reflectors are found.

Key words: cavity resonators, eigenfrequency spectrum.

ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ У ВИГЛЯДІ ТІЛ ОБЕРТАННЯ СКЛАДНОЇ ФОРМИ: ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ СПЕКТРА

О. Ю. Попков, А. Є. Поєдинчук,
І. К. Кузьмичов

На основі метода Галеркіна розроблено чисельний алгоритм розрахунку спектра вісесиметричних електромагнітних коливань об'ємних резонаторів у вигляді тіл обертання з ідеально провідною граничною поверхнею. Розглянуто питання стійкості та збіжності алгоритму при збільшенні числа базисних функцій методу Галеркіна. Загальні можливості алгоритму проаналізовані на прикладі сферичного резонатора. Досліджено спектри власних частот резонаторів, межі яких утворені сферичною, конічною та циліндричною поверхнями. Знайдені власні коливання, аналогічні за своєю структурою коливанням типу «м'ячика, що стрибає», квазіоптичних відкритих дводзеркальних резонаторів зі сферичними дзеркалами.

Ключові слова: об'ємні резонатори, розрахунок спектра.

Рукопись поступила 5 августа 2008 г.