Клевец Н.И. **УДК 338.65+658.003(075.8)**

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК МНОГОПРОДУКТОВОГО ПРОИЗВОДСТВА

Актуальность. Маржинальный анализ, как мощный инструмент поддержки принятия управленческих решений, получает все большее распространение на практике [1, 3, 4]. Не смотря на то, что он был разработан во второй половине девятнадцатого века, некоторые методические вопросы в случае многопродуктового производства остаются не решенными.

Анализ публикаций. Маржинальный анализ является эффективным методом определения точек безубыточности производства (критических точек), в которых реализованный выпуск продукции покрывает издержки производства, т.е. отсутствует прибыль [1, 3, 4]. В случае однопродуктового производства задача поиска критических точек легко решается, т.к. таких точек всего две. Первая критическая точка соответствует минимальному выпуску, а вторая – максимальному. Промежуток между минимальным и максимальным выпуском является областью безубыточного производства предприятия.

В случае многопродуктового выпуска задача определения координат критических точек имеет бесконечное множество решений. По этой причине разработка методики расчета координат критических точек многопродуктового выпуска является актуальной проблемой.

Цель работы - разработка методики определения координат критических точек многопродуктового выпуска.

Постановка задачи. Предположим, что предприятие выпускает ровно столько продукции, сколько может реализовать на своей доле рынка. При этом его производственные возможности не ограничены. Пусть для каждого i-го вида продукции $(i=1,\ldots,n)$ **известны:** функции спроса на продукцию $D_i(q_i)$, цены продукции p_i, фиксированные издержки производства Fc_i, удельные издержки Vc_i. Необходимо **найти** минимальный и максимальный выпуск продукции всех видов (в совокупности), при котором предприятие работает без убытков, а так же оптимальный выпуск, при котором прибыль предприятия максимальна.

Прибыль предприятия без учета налогов описывается следующей функцией n переменных[1-4]:

$$\pi(Q)=\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\cdot D_i(q_i)-Fc_i-Vc_i\cdot q_i\right], \qquad (1)$$

где $Q=\{q_1,\ldots,q_n\}$ - вектор выпусков продукции.

Так как мы предполагаем, что производственные возможности предприятия не ограничены, то функции спроса в (1), будут выпуклыми вверх вследствие насыщения рынка.

Для отчетливого выявления рассматриваемой проблемы начнем решение поставленной задачи с тривиального случая однопродуктового выпуска, часто рассматриваемого в литературе [1-4].

Однопродуктовое производство $(n=1)$

Предположим, что цена продукции, постоянные и удельные издержки не зависят от выпуска[1]. Пусть функция спроса описывается следующим выражением:

$$D_1(q)=(12-q)q, \qquad (2)$$

где q - объем выпуска продукции в натуральных единицах.

В (2) предполагается, что спрос измеряется в единицах продукции, не смотря на то, что функция спроса является полиномом второй степени.

Предположим, что $Fc_1=50$ д.е., а $Vc_1=6{,}5$ д.е./единицу продукции.

На рисунке 1 показаны графики: функции выручки, вычисляемой по формуле

$$R(Q)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot D_i(q_i), \qquad (3)$$

функции суммарных издержек, вычисляемой по формуле

$$C(Q)=\sum_{i=1}^{n}\left[Fc_i+Vc_i\cdot q_i\right], \qquad (4)$$

и функции прибыли, вычисляемой по формуле (1).

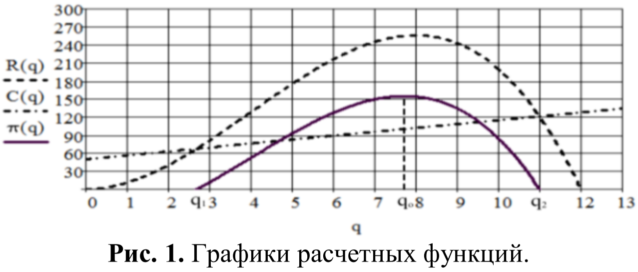

Рис. 1. Графики расчетных функций.

[1] Это предположение не является обязательным.

Из данного графика следует, что область безубыточного производства расположена между первой критической точкой $q_1 = 2{,}69$ единиц продукции и второй критической точкой $q_2 = 11{,}0$ единиц продукции. Максимум прибыли достигается при выпуске $q_o = 7{,}72$ единиц продукции.

В случае однопродуктового выпуска координаты критических точек и точки оптимального выпуска легко получить, решая уравнения $\pi(q) = 0$ и $\partial\pi(q)/\partial q = 0$, соответственно [1-4]. В системах автоматизированных вычислений это можно сделать, используя встроенные функции решения уравнений или оптимизации.

Как видим, в случае однопродуктового производства рассматриваемая задача легко и однозначно решается.

Двухпродуктовое производство $(n = 2)$

В случае двухпродуктового выпуска необходимо добавить еще одну функцию спроса, например, такую:

$$D_2(q) = (20 - q)q. \qquad (5)$$

На рисунке 2 показаны графики функций спроса на продукцию, использованные в расчетах.

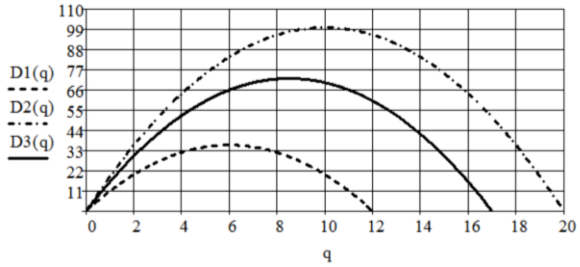

Рис. 2. Функции спроса на продукцию предприятия.

Предположим, что $Fc_2 = 25$ д.е., а $Vc_2 = 4{,}2$ д.е./единицу продукции.

На рисунке 3 показан график функция прибыли и плоскость $\pi(Q) = 0$, пересечение которой с графиком функции прибыли дает границу области безубыточного производства.

В связи с тем, что область безубыточности ограничена не двумя точками, как в случае однопродуктового производства, количество точек безубыточности становится бесконечно большим и это усложняет выбор правильной, с точки зрения руководства предприятия, точки. С другой стороны, бесконечное множество комбинаций выпуска продукции, при которых производство безубыточно, открывает возможности определения такого набора выпускаемой продукции, который будет удовлетворять различным неформализованным требованиям, учитывающим конъюнктуру рынка.

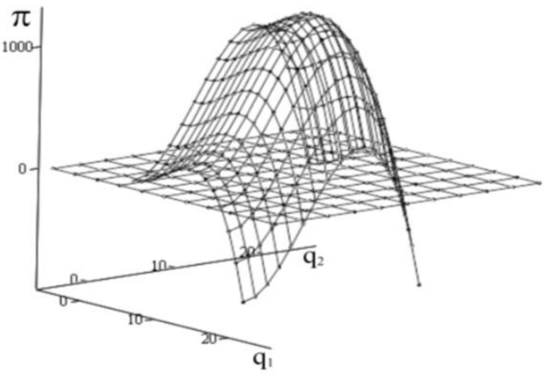

Рис. 3. Функция прибыли двухпродуктового производства.

Аналогами критических точек однопродуктового производства в данном случае будут критические точки, имеющие минимальное и максимальное расстояние от начала координат. С экономической точки зрения первая точка соответствует минимальному (по количеству) выпуску, а вторая – максимальному выпуску.

Расстояние от начала координат до критической точки вычисляется по формуле:

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}. \qquad (6)$$

На рисунке 4 показаны линии уровня двухпродуктовой функции прибыли. Линия уровня, ограничивающая область безубыточного производства (нулевой уровень прибыли) выделена жирным. Критическая точка Q_1, соответствует минимальному выпуску продукции. В данном случае она имеет координаты (выпуски): $q_1 = 0;\ q_2 = 2{,}17$. Расстояние от начала координат до первой критической точки $\rho_1 = 2{,}17$, т.к. продукция первого вида в первой критической точке не выпускается.

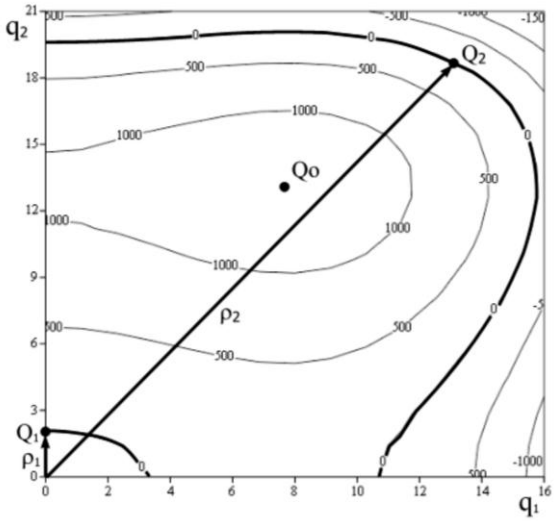

Рис. 4. Карта двухпродуктовой функции прибыли.

Вторая критическая точка Q_2 имеет координаты: $q_1 = 13{,}26;\ \ q_2 = 18{,}68$. Расстояние от начала координат до этой точки является максимальным для изолинии нулевого уровня и равно $\rho_2 = 22{,}91$.

Точка Q_O соответствует максимуму прибыли и имеет координаты $q_1 = 7{,}72$; $q_2 = 13{,}23$. Максимальная прибыль равна $\pi_{max} = 1259{,}31$ д.е. Для определения оптимальных выпусков продукции необходимо решить систему уравнений:

$$\partial\pi(Q)/\partial q_1 = 0,\ \ \partial\pi(Q)/\partial q_2 = 0 \qquad (7)$$

Полученные значения координат оптимального выпуска соответствуют максимумам функций прибыли для соответствующих видов продукции. Это вполне естественно, т.к. суммарная функция прибыли (1) является аддитивной. Такой результат будет получаться при любом количестве наименований продукции при условии, что отсутствуют ограничения на используемые ресурсы.

По густоте линий уровня функции прибыли можно судить о скорости изменения прибыли при движении от точки оптимального выпуска в любом направлении. А именно, чем гуще проведены линии уровня, тем быстрее изменяется функция. В частности, можно сделать вывод, что прибыль более устойчива к уменьшению выпуска относительно оптимального значения (при движении к началу координат), чем к увеличению выпуска по отношению к оптимальному значению (при движении к правому верхнему углу карты).

Перейдем к рассмотрению случая многопродуктового выпуска, при котором отсутствует возможность графического изображения функции прибыли.

Многопродуктовое производство $(n \ge 3)$

Для того чтобы не загромождать изложение предложенной методики определения критических точек многопродуктового производства ограничимся решением задачи для трехпродуктового выпуска.

На рисунке 2 сплошной линией показан график функции спроса для продукции третьего вида. Аналитически спрос на продукцию третьего вида описывается следующим выражением:

$$D_3(q) = (17 - q)q. \qquad (8)$$

Положим фиксированные издержки при выпуске третьего вида продукции равными $Fc_3 = 47$ д.е., а удельные - $Vc_3 = 5{,}9$ д.е./шт.

Решая задачу минимизации выпуска продукции при условии равенства нулю функции прибыли, найдем первую критическую точку для трехпродуктового выпуска: $q_1 = 0;\ \ q_2 = 2{,}79;\ q_3 = 0.$ Расстояние от начала координат до первой критической точки $\rho_1 = 2{,}79$, т.к. продукция первого и третьего вида в первой критической точке не выпускается.

Координаты второй критической точки Q_2 равны: $q_1 = 13{,}22;\ \ q_2 = 18{,}62,\ q_3 = 16{,}57$. Расстояние от начала координат до этой точки является максимальным и равно $\rho_2 = 28{,}21$. Отметим, что точки, являющиеся решением уравнения $\pi(Q) = 0$, в данном случае расположены на некоторой поверхности, т.к. они имеют три координаты.

Максимальное значение функции прибыли при оптимальном выпуске $Q_O = \{7,72;\ 13,23;\ 11,16\}$ единиц продукции равно $\pi_{max} = 1873,81$ д.е.

Подставляя значения выпусков в формулы (1) – (4) и (6) можно вычислить соответствующие параметры работа производственной подсистемы предприятия.

Расчет показателей оптимального выпуска при отсутствии ограничений (как рассмотрено выше) представляет значительный интерес при формировании краткосрочных планов деятельности предприятия. Этот же подход позволяет выполнить расчеты и для случая ограниченных ресурсов. При этом можно задать требуемый уровень прибыли, например, для $\pi(Q) = 1000$ д.е., получаем, для минимального выпуска: $Q_{min} = \{1.61;\ \ 8,12;\ 5,96\}$ единиц продукции соответствующего вида, $\rho_{min} = 10.2$; для максимального выпуска: $Q_{max} = \{11.63; 17,05; 15,00\}$ единиц продукции, $\rho_{max} = 25,51$.

Аналогично можно решить задачу определения минимального выпуска продукции при ограничениях на выпуски. Например, предположим, что предприятие может выпускать не более 5 единиц продукции второго вида; прибыль, при этом, должна быть равна 1000 д.е. Указав это условие в ограничениях задачи, получим: $Q_{min} = \{5,63;\ 5,0;\ 9,14\}$ единиц продукции, $\rho_{min} = 11.84$; $Q_{max} = \{9,51;\ 5,0;\ 12,92\}$ единиц продукции, $\rho_{max} = 16,81$. Эти расчеты позволяют сделать вывод, что ограничения на выпуск продукции сужают область безубыточности производства.

Приведенные выше примеры маржинального анализа не исчерпывают возможности данной методики. Более подробно возможности маржинального анализа изложены в [3,4].

В случае анализа долгосрочного периода деятельности предприятия, описанная выше экономико–математическая модель, может быть дополнена условиями изменения спроса от цены изделий, цены продукции от выпуска, а так же постоянных и удельных издержек от выпуска. В этом случае функция прибыли (целевая функция задачи нелинейного программирования) будет иметь вид:

$$\pi(Q) = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i(q_i) \cdot D_i(q_i, p_i) - Fc_i(q_i) - Vc_i(q_i) \cdot q_i \right]. \quad (9)$$

Такая модель позволяет учесть требования практически всех подсистем предприятия при принятии управленческих решений, т.е. осуществить системный подход к управлению предприятием. Общая схема расчетов при этом не меняется и не представляет трудностей при использовании ЭВМ.

Используя результаты маржинального анализа можно формировать эталонные значения показателей деятельности предприятия в заданные моменты времени и тем самым осуществлять подготовку объективного управленческого контроля работы всех подсистем предприятия.

В приложении приведена программа анализа безубыточности многономенклатурного производства, написанная на встроенном языке системы MathCAD.

Выводы

1. Маржинальный анализ является мощным инструментом подготовки управленческих решений на основе системного подхода.
2. Предложенная методика определение области безубыточности путем определения минимального и максимального выпуска продукции.
3. Результаты маржинального анализа могут служить компонентами вектора-эталона для управленческого контроля деятельности предприятия, как в краткосрочном, так и в долгосрочном периоде.

Источники и литература:

1. Ковалев В. В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия : учеб. / В. В. Ковалев, О. Н. Волкова. – М. : ТК Велби; Проспект, 2005. – 424 с.
2. Колемаев В. А. Математическая экономика : учеб. / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
3. Савицька Г. В. Економічний аналіз діяльності підприємства : навч. посіб. / Г. В. Савицька. – К. : Знання, 2007. – 668 с.
4. Сио К. К. Управленческая экономика / К. К. Сио. – М. : ИНФРА-М, 2000. – 671 с.