

ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛОИСТО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

А. А. Булгаков¹, Е. А. Ольховский², О. В. Шрамкова¹

¹ *Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: bulgakov@ire.kharkov.ua, oksana@ire.kharkov.ua

² *Национальный технический университет „Харьковский политехнический институт”*
21, ул. Фрунзе, Харьков, 61002, Украина.

E-mail: olkhovskiy@ukr.net

В данной работе рассматривается нелинейное трехволновое взаимодействие в диэлектрической слоисто-периодической структуре. Исследуется бесконечная слоисто-периодическая структура. Предполагается, что один из слоев, образующий период, обладает нелинейной поляризацией. Нелинейный диэлектрик обладает анизотропией класса $\bar{4}2m$, а его оптическая ось направлена вдоль оси периодичности. Проанализированы условия синхронизма. Анизотропия данного класса симметрии приводит к тому, что волны TM - поляризации при нелинейном взаимодействии связаны с TE - волнами, а TE - волны с TM - волнами. Рассматриваются резонансы, которые характерны для периодической среды. Показано, что резонансы существенно увеличивают эффективность взаимодействия. Ил. 2. Библиогр.: 9 назв.

Ключевые слова: трехволновое взаимодействие, условия синхронизма, нелинейные свойства.

Нелинейное трехволновое взаимодействие электромагнитных волн является одним из широко используемых на практике физических явлений для преобразования частот. Многочисленные исследования [1-5] показали, что применение периодических нелинейных структур может существенно увеличить интенсивность взаимодействия волн. Причиной этого является брэгговский резонанс, который может наблюдаться как на периоде, так и на отдельных слоях структуры [4,5].

Для аналитического анализа трехволновых процессов взаимодействия используется предположение о малости нелинейных слагаемых. Это условие хорошо выполняется в твердых телах. Отличительной особенностью данной работы является учет периодичности структуры и непрерывности полей на границах слоев. Для теоретического анализа обычно используется методика, описанная в работе [6]. Кроме того, рассматриваются процессы с изменением поляризации при нелинейном взаимодействии.

Нами исследованы возможности увеличения эффективности нелинейного взаимодействия при использовании периодических структур содержащих нелинейные слои. Это связано с тем, что в периодической структуре возможно возникновение специфических нелинейных резонансов. Эти резонансы возникают в результате набега фаз электромагнитных полей взаимодействующих волн, связанных с периодичностью структуры. Аналогичный резонанс в однородных структурах не существует.

1. Постановка задачи. Дисперсионное соотношение. Рассмотрим периодическую неограниченную структуру, образованную повторе-

нием двух слоев диэлектриков. Выберем геометрию задачи таким образом, чтобы ось Oz была перпендикулярна границам слоев, а ось Ox - параллельна им. Распространение волн исследуется в плоскости xOz . Индексами 1 и 2 будем отмечать соответственно параметры нелинейного и линейного слоев. Предполагаем, что нелинейный диэлектрик обладает анизотропией класса $\bar{4}2m$, тогда тензор нелинейной восприимчивости d имеет вид [7]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Такой вид тензора имеет материал KDP (KH_2PO_4), второй слой - изотропный однородный диэлектрик (например, фторопласт, плавленый кварц).

Необходимо отметить, что вдоль оси Oy слои предполагаются однородными, поэтому можно положить, что $\partial/\partial y = 0$. В результате этого уравнения Максвелла для каждого слоя распадаются на две поляризации. Отличительная особенность данной задачи состоит в том, что для изотропного однородного диэлектрика уравнения Максвелла распадаются на две независимые поляризации с компонентами полей E_x, E_z, H_y (TM - волны) и H_x, H_z, E_y (TE - волны), а в анизотропном нелинейном диэлектрике нелинейные слагаемые для компонентов полей одной поляризации входят в состав уравнений другой поляризации:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{xx}}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{8\pi}{c} d_{14} \frac{\partial}{\partial t} E_z E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{zz}}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{8\pi}{c} d_{36} \frac{\partial}{\partial t} E_x E_y \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{yy}}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{8\pi}{c} d_{14} \frac{\partial}{\partial t} E_z E_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Для изотропного однородного диэлектрика в данных уравнениях следует приравнять нулю правую часть.

Граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границах слоев. Для учета периодичности воспользуемся теоремой Флоке [8]. В результате получаем дисперсионное соотношение для рассматриваемой структуры:

для TM - волн

$$\begin{aligned} \cos kd &= \cos k_{z1}d_2 \cos k_{z2}d_2 - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_{xx}} + \frac{k_{z2}\varepsilon_{xx}}{k_{z1}\varepsilon_2} \right) \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2 ; \end{aligned} \quad (3)$$

для TE - волн

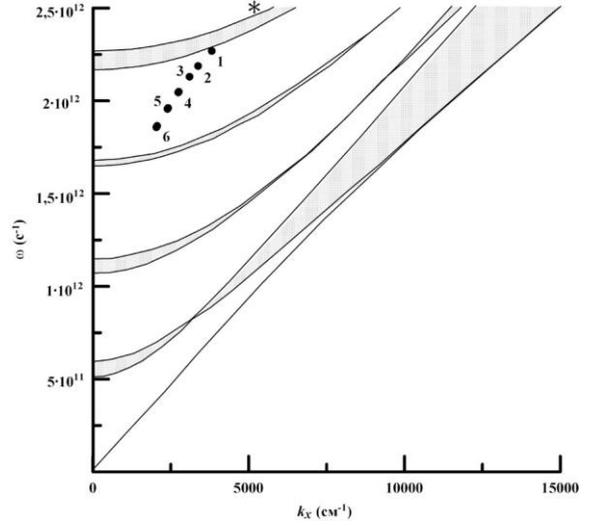
$$\begin{aligned} \cos kd &= \cos k_{z1}d_2 \cos k_{z2}d_2 - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} + \frac{k_{z2}}{k_{z1}} \right) \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2 , \end{aligned} \quad (4)$$

где \bar{k} - блоховское волновое число, которое по своему смыслу является усредненным по периоду структуры поперечным волновым числом;

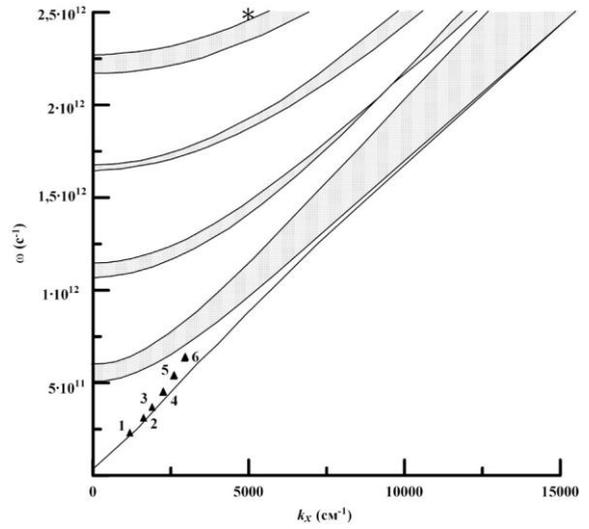
$$k_{z1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} - k_x^2 \right)}; \quad k_{z2} = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_x^2 \right)}$$

поперечные волновые числа для первого и второго слоев структуры.

На рис. 1 представлена зонная структура спектра для TM поляризации, полученная численным решением (3). На рис. 2 приведена зонная структура для TE поляризации - (4). При расчете использовались следующие параметры: $\varepsilon_{xx} = 2,25$; $\varepsilon_{yy} = 2,25$; $\varepsilon_{zz} = 2,1$; $\varepsilon_2 = 4,0$; $d_1 = 7,2 \cdot 10^{-4}$ см; $d_2 = 3,1 \cdot 10^{-4}$ см. На этих рисунках запрещенные зоны заштрихованы.



а)



б)

Рис. 1. Зонная структура спектра TM -волн и расположение взаимодействующих волн: * - волна накачки ωk_x ; \bullet , \blacktriangle - волны взаимодействия $\omega' k'_x$, $\omega'' k''_x$; цифры соответствуют волнам, участвующим во взаимодействии

2. Решение нелинейной задачи. Анализ условий синхронизма. Запишем уравнения (2) в символьном виде

$$\hat{L}f = \hat{H}(f, f). \quad (5)$$

Здесь \hat{L} - линейный дифференциальный оператор, который представляет собой квадратную матрицу, составленную из операторов линейризованной системы уравнений; \hat{H} - оператор-столбец, составленный из нелинейных слагаемых; f - решение линейризованной системы уравнений $\hat{L}(f) = 0$.

Для получения системы динамических уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие, воспользуемся формулой Грина [8]

$$\int_a^b \left[\tilde{f}^* \hat{L} f - \hat{L} \tilde{f}^* f \right] dv = f \tilde{f}^* \Big|_a^b, \quad (6)$$

где \hat{L} - транспонированный оператор \hat{L} ; f, \tilde{f}^* - собственные функции операторов \hat{L} и \hat{L} соответственно; v - координатное пространство, в котором действуют операторы \hat{L} и \hat{L} . В правой части формулы (6) записаны граничные условия. Смысл данной формулы заключается в том, что собственные функции транспонированного линейного дифференциального оператора ортогональны к правой части системы линейных дифференциальных уравнений (5).

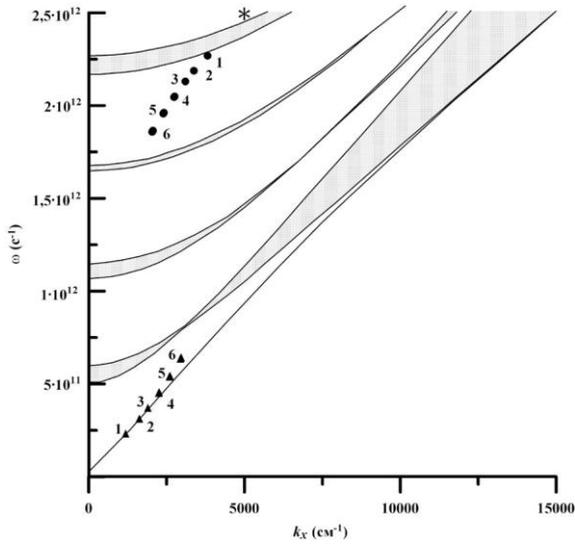


Рис. 2. Зонная структура спектра TE -волн и расположение взаимодействующих волн: * - волна накачки ωk_x ; ●, ▲ - волны взаимодействия $\omega' k'_x$, $\omega'' k''_x$; цифры соответствуют волнам, участвующим во взаимодействии

Решение для величин электрического и магнитного полей будем искать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} C_k(t) (\vec{e}(z) + \\ &+ \vec{e}^{(ad)}(z)) \exp(-i\omega_k t + ik_x x), \\ \vec{H} &= \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} C_k(t) (\vec{h}(z) + \\ &+ \vec{h}^{(ad)}(z)) \exp(-i\omega_k t + ik_x x). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $C_k(t)$ - амплитуда k -й гармоники; \vec{E}, \vec{H} - поля этой гармоники; $\vec{e}^{(ad)}$ и $\vec{h}^{(ad)}$ - до-

полнительные слагаемые, которые описывают отклонения направления полей от линейных, вызванные действием нелинейных механизмов. Дополнительные слагаемые должны удовлетворять тем же граничным условиям, которые выполняются в линейном случае.

Воспользовавшись выражением (6), получаем уравнения для амплитуд взаимодействующих волн

$$\begin{aligned} \frac{d C_k^{TM}}{dt} &= W_{k,k',k''} C_{k'}^{TM} C_{k''}^{TE}, \\ \frac{d C_k^{TE}}{dt} &= W_{k,k',k''} C_{k'}^{TM} C_{k''}^{TM}. \end{aligned} \quad (8)$$

Матричные элементы $W_{k,k',k''}$ для TM - и TE -волн имеют вид

$$\begin{aligned} W_{k,k',k''}^{TM} &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\omega' + \omega''}{S} \times \\ &\times \int_0^{d_1} \left[d_{14} e_{x1}^* e'_{z1} e''_{y1} + e_{x1}^* e'_{y1} e''_{z1} + \right. \\ &+ d_{36} e_{z1}^* e'_{x1} e''_{y1} + e_{z1}^* e'_{y1} e''_{x1} \left. \right] dv, \\ W_{k,k',k''}^{TE} &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\omega' + \omega''}{S} \times \\ &\times \int_0^{d_1} d_{14} e_{y1}^* e'_{z1} e''_{x1} + e_{y1}^* e'_{x1} e''_{z1} dv, \end{aligned} \quad (9)$$

где S - энергия k -й волны в каждом слое. Физический смысл $W_{k,k',k''}$ заключается в том, что это отношение энергии, связанной с нелинейным взаимодействием волн, к энергии самой волны.

Необходимо отметить, что при интегрировании соотношений (9) и (10) возникают условия синхронизма

$$\begin{aligned} \omega' + \omega'' - \omega &= 0, \\ k'_x + k''_x - k_x &= 0, \\ \bar{k}' + \bar{k}'' - \bar{k} + 2\pi n / (d_1 + d_2) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отличительная особенность этих соотношений в данном случае состоит в том, что отсутствует закон сохранения для поперечных компонент волновых векторов $k_{z1}^{TM,TE}, k_{z2}^{TM,TE}$, и появился новый закон для компонент блоховских векторов. Наличие слагаемого $2\pi n / (d_1 + d_2)$ связано с номером зоны пропускания n , который отсчитывается от самой нижней зоны (см. рис. 1, 2). Эти выражения должны быть дополнены дисперсионными соотношениями для взаимодействующих волн. Из системы уравнений Максвелла (2) следует, что трехволновые нелинейные взаимодей-

вия TE - колебаний происходят только при наличии компонент TM - полей (рис. 2), а TM - волны взаимодействуют с полями TM - и TE - волн (рис. 1, а, б). Поэтому соотношения синхронизма (11) должны быть дополнены двумя дисперсионными уравнениями для обеих поляризаций (3) и (4). Заметим, что ω' и ω'' входят во все соотношения симметрично (в том числе и в формулы для матричных элементов W), и поэтому они могут меняться местами. Таким образом, из этих соотношений следует, что в процессе нелинейного взаимодействия происходит изменение поляризации волн.

В работе численно было получено решение условий синхронизма (11) с учетом дисперсионных соотношений (3, 4). Зависимости $\omega' k'_x$ и $\omega'' k''_x$ для $\omega = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ и $k_x = 5000 \text{ см}^{-1}$ приведены на рис. 1, а, б и 2. Здесь звездочка относится к волне накачки, а кружками и треугольниками обозначены волны, с которыми происходит взаимодействие. Зависимость $\omega' k'_x$ обозначена кружками, а $\omega'' k''_x$ - треугольниками. Одинаковые цифры возле значков соответствуют волнам, для которых выполняются законы сохранения (11). Из этих рисунков следует, что волны распада могут находиться в различных зонах пропускания. Наибольший интерес представляют те решения уравнений синхронизма, при которых волны распада попадают на границу зон пропускания, т. е. Блоховское волновое число пропорционально целому числу π/d [4], или выполняются дополнительные условия для поперечных волновых чисел [8].

Для получения зависимости амплитуд взаимодействующих волн от времени необходимо проинтегрировать систему уравнений (8):

$$\begin{cases} \frac{dC_k}{dt} = W_k C_{k'} C_{k''}, \\ \frac{dC_{k'}}{dt} = W_{k'} C_k C_{k''}^*, \\ \frac{dC_{k''}}{dt} = W_{k''} C_k C_{k'}^*. \end{cases} \quad (12)$$

Будем предполагать, что $|C_k| \gg |C_{k'}|, |C_{k''}|$, тогда изменением амплитуды этой волны можно пренебречь, а система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d|C_{k'}|}{dt} = |W_{k'}| |C_{k''}| C_k \cos \theta' - \Phi, \\ \frac{d|C_{k''}|}{dt} = |W_{k''}| |C_{k'}| C_k \cos \theta'' - \Phi. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $W_{k,k',k''} = W \exp(i\theta)$; $W_{k',k,-k''} = W' \exp(i\theta')$; $W_{k'',k,-k'} = W'' \exp(i\theta'')$; $C_{k'} t = C' t e^{i\varphi' t}$; $C_{k''} t = C'' t e^{i\varphi'' t}$. Мы предполагаем, что волна с амплитудой C_k является волной накачки. Изменением ее амплитуды пренебрегаем и считаем, что $C_k = C_k(0)$. В данных соотношениях θ - фаза W , $\Phi = \varphi' - \varphi''$, φ', φ'' - фазы амплитуд взаимодействующих волн.

Как показывают дальнейшие исследования [9], Φ стремится к постоянному значению. Мы будем предполагать, что $\Phi \rightarrow 0$. Из системы уравнений (13) получим закон сохранения для амплитуд взаимодействующих волн

$$\frac{|C'|^2}{|W'| \cos \theta'} - \frac{|C''|^2}{|W''| \cos \theta''} = K. \quad (14)$$

Постоянная K может быть выражена через начальные значения амплитуд

$$K = \frac{C'^2(0)}{|W'| \cos \theta'} - \frac{C''^2(0)}{|W''| \cos \theta''}.$$

Интегрируя соотношения (13), получим зависимость амплитуд от времени

$$\begin{aligned} C' &= C'(0) \exp \alpha t; \\ C'' &= C''(0) \exp \alpha t; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha = \sqrt{W' W'' C^2 \cos \theta' \cos \theta''}. \quad (16)$$

Это решение показывает, что при малых значениях времени происходит нарастание амплитуд волн $C_{k'}$ и $C_{k''}$. Это решение остается верным до тех пор, пока выполняется условие $C_k(0) \gg C_{k'}, C_{k''}$. С физической точки зрения это решение означает, что при нелинейном взаимодействии происходит перекачка от волны с наибольшей частотой к двум другим волнам. А в дальнейшем происходит перекачка энергии от волн из ω' и ω'' к волне с наибольшей частотой ω . Это означает, что θ' и θ'' или лежат в одной четверти, или принадлежат верхней или нижней половине окружности [9].

Выводы. Нами проведено аналитическое исследование нелинейного трехволнового взаимодействия электромагнитных волн в неограниченной периодической диэлектрической структуре. В результате обнаружено, что в периодических структурах нелинейный резонанс имеет место в том случае, если набег фаз взаимодействующих волн таков, что отсутствует зависимость от координаты вдоль направления периодичности.

Выяснено, что при наличии брэгговского или нелинейного резонансов [4,8] происходит значительное возрастание коэффициентов нелинейного взаимодействия. Причем при нашем расчете нелинейные резонансы могут увеличивать эффективность взаимодействия в несколько десятков раз.

Показано, что в некоторых классах кристаллической симметрии нелинейное взаимодействие приводит к изменению поляризации волн.

Работа выполнена в рамках гранта ДФФД Министерства образования и науки Украины № Ф 16/16.

1. *Belyakov V. A., Shipov N. V.* On the enhancement of the nonlinear frequency transformation // *Phys. Lett., A.* - 1981. - 86, N2. - P.94-98.
2. *Беляков В. А., Шипов Н. В.* К теории нелинейно-оптического преобразования частоты в халестерических жидких кристаллах // *Журн. эксперим. и теорет. физики.* - 1982. - 82, №4. - С.1159-1169.
3. *Шияновский С. В.* О генерации второй гармоники в хиральных жидких кристаллах // *Успехи физ. наук.* - 1982. - 27, №3. - С.361-367.
4. *Пожар В. Э., Чернозатонский Л. А.* Повышение эффективности параметрической генерации в периодических средах // *ФТТ.* - 1985. - 27, №3. - С.682-685.
5. *Bulgakov A. A., Bulgakov S. A. and Vazquez L.* Second harmonic Resonant excitation in optical periodic structures with nonlinear anisotropic layers // *Phys. Rev. E.* - 1998. - 58. - P.7887-7898.
6. *Булгаков А. А., Ханкина С. И., Яковенко В. М.* Трехволновые процессы в ограниченных полупроводниках и диэлектриках // *Физика твердого тела.* - 1980. - 22, №8. - С.2536-2538.
7. *Yariv A., Yeh P.* *Optical waves in crystals.* New York: J.Wiley & Sons, Inc., 1984. - 616 p.
8. *Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Тетервов А. П.* Высоочастотные свойства полупроводников со сверхрешеткой. - М.: Наука, 1989. - 288 с.
9. *Weiland J., Wilhelmsson H.* *Coherent Non-linear Interaction of Waves In Plasma.* Oxford, NewYork, Toronto, Sidney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1997. - 214 p.

THREE-WAVE INTERACTIONS OF THE ELECTROMAGNETIC WAVES IN A LAYERED PERIODIC STRUCTURE

A. A. Bulgakov, Y. A. Olkhovskiy, O. V. Shramkova

In this work, we consider three-wave interaction in dielectric layered-periodic structure. We investigate an infinite dielectric layered-periodic structure. One of the layers forming a period is assumed to have nonlinear polarization. The nonlinear dielectric is assumed to have $42m$ anisotropy and its optical axis is directed along the axis of periodicity. The synchronism conditions are analyzed. The anisotropy of this symmetry class leads to the fact that the TM polarization waves are connected with the TE waves. The TE waves are connected with the TM waves. It is considered the resonances that are specific to a periodic medium. It is demonstrated the resonances significantly increase are efficiency of nonlinear interaction.

Key words: three-wave interactions, synchronism conditions, nonlinear properties.

ТРИХВИЛЬОВІ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У ШАРУВАТО-ПЕРІОДИЧНІЙ СТРУКТУРІ

О. О. Булгаков, Є. О. Ольховський,
О. В. Шрамкова

У даній роботі розглядається трихвильова взаємодія в діелектричній шарувато-періодичній структурі. Досліджується безмежна шарувато-періодична структура. Передбачається, що один із шарів, що утворює період, має нелінійну поляризацію. Нелінійний діелектрик має анізотропію класу $42m$, а його оптична вісь спрямована уздовж осі періодичності. Проаналізовано умови синхронізму. Анізотропія даного класу симетрії приводить до того, що хвилі *TM*-поляризації при нелінійній взаємодії пов'язані з *TE*-хвилями, а *TE*-хвилі із *TM*-хвилями. Розглядаються резонанси, які характерні для періодичного середовища. Показано, що резонанси істотно збільшують ефективність взаємодії.

Ключові слова: трихвильова взаємодія, умови синхронізму, нелінійні властивості.

Рукопись поступила 7 февраля 2007 г.