РАДИОФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И ПЛАЗМЫ

УДК 537.533.3

РАСЧЁТ СОБСТВЕННОГО КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРОИЗВОЛЬНО В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ ДРЕЙФА

Г. М. Горбик[1], К. Ильенко[1], Т. Ю. Яценко[2]

[1]*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085
E-mail: kost@ire.kharkov.ua
[2]*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077

В дарвиновском приближении методом функций Грина получено выражение для квазистатического (квазистационарного) векторного потенциала, возбуждаемого в цилиндрической камере дрейфа с идеально проводящими стенками произвольными плотностью заряда и тока (например, пучком заряженных частиц), удовлетворяющими уравнению непрерывности. Найденные функции Грина представлены в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа в цилиндрической системе координат с граничными условиями Дирихле и Неймана. На основании полученных выражений для потенциалов вычислено создаваемое магнитное поле и релятивистская поправка к электрическому полю. С учетом релятивистских поправок до величин порядка поля излучения вычислен вклад в силу Лоренца, действующую на отдельные заряженные частицы пучка, со стороны наведенных пучком на стенках цилиндрической камеры дрейфа поверхностных зарядов и токов. Предложен метод, позволяющий свести задачу на отыскание векторного потенциала к системе скалярных уравнений Пуассона в цилиндрической системе координат. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова: дарвиновское приближение, кулоновская калибровка, наведенные поверхностные заряды и токи, сила Лоренца.

При теоретическом исследовании механизмов генерации электронными приборами различных типов общепринятым является разделение возбуждаемого электромагнитного поля на «волновое поле» (распространяющееся) и, так называемое, «поле пространственного заряда» (нераспространяющееся, аналогичное быстроспадающей части электромагнитного поля движущегося заряда в ближней зоне в свободном пространстве), вычисление которого является весьма сложной, но необходимой для физической электроники задачей. В литературе предложены методы оценки влияния поля пространственного заряда на работу приборов с длительным взаимодействием на замедленных (ЛБВ, ЛОВ и т. д.) [1, 2] и незамедленных волнах (гиротрон, убитрон и т. д.) [3].

Основой расчёта полей пространственного заряда в указанных приборах является квазистатическое (квазистационарное) приближение, суть которого заключается в пренебрежении в уравнениях Максвелла волновым характером электромагнитных процессов путем отбрасывания вклада электромагнитной индукции. Согласно терминологии, принятой в работе [4], такое квазистатическое приближение называется электроквазистатикой (ЭКС) и в физической электронике было, по-видимому, впервые предложено в работах [2; 5, с. 102]. В отличие от более распространенной магнитоквазистатики [4; 6, с. 203], где пренебрегается токами смещения, но учитывается магнитная индукция, в рамках ЭКС справедливо уравнение непрерывности и, следовательно, выполняется закон сохранения заряда. В рамках ЭКС баланс энергии (теорема Пойтинга) учитывает только объёмную плотность энергии электромагнитного поля, запасаемую в электрической части квазистатического поля [4]. Данный подход полностью оправдан и широко применяется при разработке и создании сильноточных нерелятивистских и слаборелятивистских приборов вакуумной электроники, в которых энергия квазистатического магнитного поля оказывается пренебрежимо малой величиной.

Однако такой подход не может обеспечить необходимую точность учета квазистатических полей для сильноточных релятивистских приборов вакуумной электроники (релятивистские гиротроны, лазеры на свободных электронах и т. д.), в которых эффекты, связанные с наличием возбуждаемого электронным потоком квазистатического магнитного поля, могут вносить вклад, сравнимый с вкладом квазистатического электрического поля. Решение задачи о наиболее полном учете эффектов пространственного заряда в существенно релятивистских приборах вакуумной электроники лежит в использовании так называемого *дарвиновского* приближения в уравнениях Максвелла [4; 7, с. 221]. В рамках этого приближения выполняется закон сохранения заряда и учитывается энергия, запасаемая как в электрической, так и в магнитной частях квазистатического поля пространственного заряда.

Нами применяется подход, предложенный в работах [8, 9]. Рассматривается задача на определение векторной части квазистатического четырехпотенциала и вычисление соответствующих электрического и магнитного полей пучка заряженных частиц, движущегося произвольно в цилиндрической идеально проводящей камере дрейфа. Вычислены поверхностные заряды и токи, наводимые движущимся релятивистским пучком на стенках камеры дрейфа. Приводятся выражение для квазистатического электрического поля точечного заряда в свободном пространстве, которое помимо закона Кулона содержит релятивистскую поправку, и соответствующее выражение для квазистатического магнитного поля (закон Био-Савара).

Полученные результаты завершают вычисление релятивистских квазистатических электрического и магнитного полей, создаваемых зарядом, движущимся произвольно в цилиндрической камере дрейфа [10].

1. Постановка задачи. Будем считать стенки цилиндрической камеры дрейфа идеально проводящими и не будем учитывать влияния торцевых стенок цилиндра. В кулоновской калибровке ($div\vec{A}$ = 0) уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям для скалярного $\varphi(\vec{x},t)$ и векторного $\vec{A}(\vec{x},t)$ потенциалов:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho;$$
$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi). \tag{1}$$

Здесь $\rho(\vec{x},t)$ и $\vec{j}(\vec{x},t)$ - плотности заряда и тока; $\vec{x}$ - декартовы трехмерные координаты; t - время; c - скорость света. Кулоновская калибровка является стандартной при изучении слаборелятивистской [10] и нерелятивистской [11] динамики электронных пучков. Считается, что в релятивистском случае более удобна лоренцевская калибровка, а не кулоновская (см., например, [12]). Однако именно в этой калибровке наиболее просто осуществляется переход к релятивистскому квазистатическому (квазистационарному) пределу в уравнениях Максвелла (1), что имеет несомненные преимущества для учета эффектов пространственного заряда [1, с. 232] в релятивистских приборах вакуумной электроники и при изучении вопросов транспортировки релятивистских сильноточных заряженных пучков в камерах дрейфа различной геометрии. Для цилиндрической геометрии камеры дрейфа граничные условия для потенциалов, являясь следствием условий для полей, имеют вид

$$\varphi|_{\Gamma} = 0;\quad \varphi|_{|z-\tilde{z}|\to+\infty} = 0;$$
$$\vec{A}_\tau|_{\Gamma} = 0;\ \partial(rA_r)/\partial r|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $\vec{A}_\tau$ и A_r - тангенциальная и радиальная составляющие векторного потенциала по отношению к цилиндрической поверхности камеры дрейфа Γ; координаты с тильдой относятся к области нахождения источников; в отсутствие затухания при $|z-\tilde{z}|\to+\infty$ могут существовать только убегающие направо/налево волны; ось z совпадает с осью цилиндра. Создаваемые электрическое и магнитное поля определяются обычным образом

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t};\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{3}$$

Решение уравнения для скалярного потенциала в (1) получено методом функции Грина в работе [10] для произвольной плотности заряда $\rho(\vec{x},t)$, поэтому второе слагаемое в правой части второго уравнения системы (1) можно считать известным.

Следуя подходу работы [4], пренебрежём членом $c^{-2}\partial^2\vec{A}/\partial t^2$ в левой части второго из уравнений (1), тогда решения полученной системы уравнений не будут запаздывающими и будут описывать релятивистские квазистатические (квазистационарные) электрическое и магнитное поля движущихся в цилиндрической камере дрейфа зарядов. В литературе такое квазистатическое приближение называется «дарвиновским». Отметим, что в этом приближении электрическое и магнитное поля вычисляются по общим формулам (3) в отличие от слаборелятивистского приближения ЭКС, в котором в выражении для электрического поля дополнительно пренебрегается вкладом производной по времени от векторного потенциала, хотя уравнения для скалярного и векторного потенциалов (в кулоновской калибровке) также получаются пренебрежением членом $c^{-2}\partial^2\vec{A}/\partial t^2$, а магнитная индукция вычисляется по второй формуле в (3).

С учётом уравнений (1) в дарвиновском приближении уравнение для векторного потенциала в цилиндрической системе координат покомпонентно записывается в следующем виде:

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} = -\frac{4\pi}{c}j_r + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r};$$
$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} = -\frac{4\pi}{c}j_\theta + \frac{1}{cr}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\theta}; \tag{4}$$
$$\Delta A_z = -\frac{4\pi}{c}j_z + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z},$$

где оператор Лапласа, действующий на скалярные компоненты, в цилиндрической системе координат записывается как

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}.$$

2. Дополнительные дифференциальные соотношения. Получение решения системы уравнений (4) осложняется наличием связи первого и второго уравнений. Кроме того, радиальная компонента векторного потенциала удовлетворяет смешанному граничному условию, в то время как все остальные компоненты - однородному граничному условию Дирихле. Это не позволяет применить метод перехода к комплексным искомым функциям, предложенный в работе [13, с. 20].

Введем новые искомые функции

$$Y_r = rA_r \text{ и } Y_\theta = rA_\theta,$$

граничные условия для которых (сравните с (2)) имеют вид

$$\partial Y_r / \partial r|_\Gamma = 0 \text{ и } Y_\theta|_\Gamma = 0.$$

Умножив левые и правые части первых двух уравнений системы (4) на r, их можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Delta Y_r - \frac{2}{r}\frac{\partial Y_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial Y_\theta}{\partial \theta} = -\frac{4\pi}{c} r j_r + \frac{r}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial r}; \\ &\Delta Y_\theta - \frac{2}{r}\frac{\partial Y_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial Y_r}{\partial \theta} = -\frac{4\pi}{c} r j_\theta + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \theta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Подействуем на полученные уравнения (5) операторами $\partial/(r\partial r)$ и $\partial/(r^2\partial\theta)$ соответственно. Сложив полученные уравнения, получим

$$\Delta(div_\perp \vec{A}) = -\frac{4\pi}{c} div_\perp \vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_\perp \varphi), \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &div_\perp \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial Y_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial Y_\theta}{\partial \theta}; \\ &rot_z \vec{A} \equiv B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial Y_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial Y_r}{\partial \theta}; \\ &\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Из калибровочного условия также следует, что $div_\perp \vec{A}|_\Gamma = 0$, которое можно рассматривать как граничное условие к уравнению (6). Применив теперь к уравнениям (5) операторы $\partial/(r\partial r)$ и $\partial/(r^2\partial\theta)$ в обратном порядке и вычитая полученные уравнения, имеем

$$\Delta(rot_z \vec{A}) = -\frac{4\pi}{c} rot_z \vec{j}. \tag{8}$$

Из граничного условия для компоненты B_z следует, что $rot_z \vec{A}$ удовлетворяет граничному условию Неймана.

Таким образом, мы можем записать решения уравнений (6) и (8)

$$\begin{aligned} &div_\perp \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}') \times \\ &\times \left[div'_\perp \vec{j}(\vec{x}',t) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t'}\Delta'_\perp \varphi(\vec{x}',t) \right] d^3\vec{x}'; \\ &rot_z \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int_{V'} G_N(\vec{x};\vec{x}') rot'_z \vec{j}(\vec{x}',t) d^3\vec{x}', \end{aligned} \tag{9}$$

где штрихами у операторов обозначены производные по штрихованным переменным. $G_D(\vec{x};\vec{x}')$ - функция Грина уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат с граничным условием Дирихле, вычисленная в работе [10] и обозначенная там как $G(\vec{x};\vec{x}')$; $G_N(\vec{x};\vec{x}')$ - функция Грина уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат с граничным условием Неймана, получаемая тем же методом

$$\begin{aligned} &G_D(\vec{x};\vec{x}') = \frac{4}{a}\left[\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{e^{-\nu_{0q}|\zeta-\zeta'|}}{2\nu_{0q}} \frac{J_0(\nu_{0q}\iota)J_0(\nu_{0q}\iota')}{J_1^2(\nu_{0q})} + \sum_{\substack{n=1\\q=1}}^{+\infty} \frac{e^{-\nu_{nq}|\zeta-\zeta'|}}{\nu_{nq}} \frac{J_n(\nu_{nq}\iota)J_n(\nu_{nq}\iota')}{J_{n+1}^2(\nu_{nq})} \cos[n(\theta-\theta')] \right]; \\ &G_N(\vec{x};\vec{x}') = \frac{4}{a}\left[\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{e^{-\nu'_{0q}|\zeta-\zeta'|}}{2\nu'_{0q}} \frac{J_0(\nu'_{0q}\iota)J_0(\nu'_{0q}\iota')}{J_0^2(\nu'_{0q})} + \sum_{\substack{n=1\\q=1}}^{+\infty} \frac{\nu'_{nq}e^{-\nu'_{nq}|\zeta-\zeta'|}}{\nu'^2_{nq}-n^2} \frac{J_n(\nu'_{nq}\iota)J_n(\nu'_{nq}\iota')}{J_n^2(\nu'_{nq})} \cos[n(\theta-\theta')] \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь ν_{nq} и ν'_{nq} - q-е корни уравнений $J_n(x) = 0$ и $J'_n(x) = 0$ соответственно, штрих обозначает производную по аргументу; a - радиус камеры дрейфа; $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\iota = r/a$, $\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$ и $\zeta = z/a$ - безразмерные цилиндрические координаты.

3. Выражения для векторного и скалярного потенциалов. С учетом обозначений (7) уравнения (5) записываются в виде

$$\begin{aligned} &\Delta Y_r = -\frac{4\pi}{c} r j_r + \frac{r}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial r} + 2 div_\perp \vec{A}; \\ &\Delta Y_\theta = -\frac{4\pi}{c} r j_\theta + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \theta} + 2 rot_z \vec{A}, \end{aligned}$$

в которых правые части можно считать известными величинами в силу результатов работы [10] и соотношений (9) и (10). Поэтому выражения для компонент векторного потенциала можно представить в интегральной форме с помощью найденных выше функций Грина:

$$\begin{aligned}
A_r(\vec{x},t) &= \frac{1}{rc}\int_{V'} G_N(\vec{x};\vec{x}')\left[\; r'j_r(\vec{x}',t) - \frac{r'}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi(\vec{x}',t)}{\partial t\partial r'} - \frac{c}{2\pi}div'_{\perp}\vec{A}(\vec{x}',t)\;\right]d^3\vec{x}';\\
A_\theta(\vec{x},t) &= \frac{1}{rc}\int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}')\left[\; r'j_\theta(\vec{x}',t) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi(\vec{x}',t)}{\partial t\partial \theta'} - \frac{c}{2\pi}rot'_z\vec{A}(\vec{x}',t)\;\right]d^3\vec{x}';\\
A_z(\vec{x},t) &= \;\frac{1}{c}\int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}')\left[\; j_z(\vec{x}',t) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi(\vec{x}',t)}{\partial t\partial z'}\;\right]d^3\vec{x}'.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для полноты приведем и выражение для скалярного потенциала, полученное нами в работе [10]:

$$\varphi(\vec{x},t) = \int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}')\rho(\vec{x}',t)d^3\vec{x}' \,. \tag{12}$$

Следует отметить, что имеется четыре дифференциальных соотношения на три компоненты векторного потенциала $\vec{A}$. Три соотношения даются уравнениями (4), а четвертое - это кулоновская калибровка. Выражения (11) удовлетворяют уравнениям (4) по построению. Громоздкое вычисление показывает, что на решениях (11) с учетом (12) тождественно выполняется кулоновское калибровочное условие, если и только если плотности заряда и тока удовлетворяют уравнению непрерывности.

4. Квазистатические поля и сила со стороны наведенных зарядов и токов. На основании полученных интегральных представлений (11) и (12) и определений (3) получим интегральные представления для квазистатических полей, создаваемых произвольными плотностями заряда и тока, удовлетворяющими уравнению непрерывности. Для удобства представим полное поле $\vec{E}$ в виде

$$\vec{E} = \vec{E}^C + \vec{E}^F \,,$$

где $\vec{E}^C = -\vec{\nabla}\varphi$ и $\vec{E}^F = -c^{-1}\partial\vec{A}/\partial t$ - «кулоновская» и «фарадеевская» части квазистатического электрического поля:

$$\begin{aligned}
E_r^C(\vec{x},t) &= -\frac{1}{r}\int_{V'} G_N(\vec{x};\vec{x}')\left[\; \frac{1}{r'}\frac{\partial(r'^2\rho(\vec{x}',t))}{\partial r'} + \frac{1}{2\pi}\int_{V''}\frac{\partial^2\rho(\vec{x}'',t)}{\partial z''^2}d^3\vec{x}''\;\right]d^3\vec{x}';\\
E_\theta^C(\vec{x},t) &= -\frac{1}{r}\int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}')\frac{\partial\rho(\vec{x}',t)}{\partial\theta'}d^3\vec{x}'; \quad E_z^C(\vec{x},t) = -\int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}')\frac{\partial\rho(\vec{x}',t)}{\partial z'}d^3\vec{x}'
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
E_r^F(\vec{x},t) &= -\frac{1}{rc^2}\int_{V'} G_N(\vec{x};\vec{x}')\left[r'\frac{\partial j_r(\vec{x}',t)}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\int_{V'} G_N(\vec{x}';\vec{x}'')\left(\frac{1}{r''}\frac{\partial^3(r''^2\rho(\vec{x}'',t))}{\partial t^2\partial r''} + \frac{1}{2\pi}\int_{V'''} G_D(\vec{x}'';\vec{x}''')\times\right.\right.\\
&\left.\left.\times\frac{\partial^4\rho(\vec{x}''',t)}{\partial t^2\partial z'''^2}d^3\vec{x}'''\right)d^3\vec{x}'' + \frac{1}{2\pi}\int_{V'} G_D(\vec{x}';\vec{x}'')\left(\frac{\partial^2 j_z(\vec{x}'',t))}{\partial t\partial z''} - \frac{1}{4\pi}\int_{V'''} G_D(\vec{x}'';\vec{x}''')\frac{\partial^4\rho(\vec{x}''',t)}{\partial t^2\partial z'''^2}d^3\vec{x}'''\right)d^3\vec{x}''\right]d^3\vec{x}';\\
E_\theta^F(\vec{x},t) &= -\frac{1}{rc^2}\int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}')\left[r'\frac{\partial j_\theta(\vec{x}',t)}{\partial t} + \right.\\
&\left. -\frac{1}{4\pi}\int_{V''} G_D(\vec{x}';\vec{x}'')\left(\frac{\partial^3\rho(\vec{x}'',t)}{\partial t^2\partial\theta''} + \frac{1}{2\pi}\int_{V''} G_N(\vec{x}'';\vec{x}''')rot'''_z\frac{\partial\vec{j}(\vec{x}''',t)}{\partial t}d^3\vec{x}'''\right)d^3\vec{x}''\right]d^3\vec{x}';\\
E_z^F(\vec{x},t) &= -\frac{1}{c^2}\int_{V'} G_D(\vec{x};\vec{x}')\left[\frac{\partial j_z(\vec{x}',t)}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\int_{V'} G_D(\vec{x}';\vec{x}'')\frac{\partial^3\rho(\vec{x}'',t)}{\partial t^2\partial z''}d^3\vec{x}''\right]d^3\vec{x}'.
\end{aligned} \tag{13}$$

Компоненты магнитного квазистатического поля имеют вид

$$B_r(\vec{x},t)=\frac{1}{rc}\int_{V'}G_D(\vec{x};\vec{x}')\left[\ r'rot'_r\vec{j}(\vec{x}',t)+\frac{1}{2\pi}\int_{V''}G_N(\vec{x}';\vec{x}'')rot''_z\frac{\partial\vec{j}(\vec{x}'',t)}{\partial z''}d^3\vec{x}''\ \right]d^3\vec{x}';$$
$$B_\theta(\vec{x},t)=\frac{1}{rc}\int_{V'}G_N(\vec{x};\vec{x}')\left[\ r'rot'_\theta\vec{j}(\vec{x}',t)-2j_z(\vec{x}',t)+\frac{1}{2\pi}\int_{V''}G_D(\vec{x}';\vec{x}'')\frac{\partial^2\rho(\vec{x}'',t)}{\partial t\partial z''}d^3\vec{x}''\ \right]d^3\vec{x}'; \quad (14)$$
$$B_z(\vec{x},t)=\frac{1}{c}\int_{V'}G_N(\vec{x};\vec{x}')rot'_z\vec{j}(\vec{x}',t)d^3\vec{x}'.$$

Отметим, что квазистатическое поле, создаваемое произвольно движущимся в свободном пространстве точечным зарядом величины e, в дарвиновском приближении с точностью до величин порядка поля излучения имеет вид

$$\vec{E}^{qs}_{DW}(\vec{x},t)=$$
$$=e\frac{\vec{x}-\vec{\tilde{x}}}{|\vec{x}-\vec{\tilde{x}}|^3}\left[1+\frac{\tilde{\upsilon}^2}{2c^2}-\frac{3}{2}\frac{(\vec{\tilde{\upsilon}}(\vec{x}-\vec{\tilde{x}}))^2}{c^2|\vec{x}-\vec{\tilde{x}}|^2}\right]; \quad (15)$$
$$\vec{B}^{qs}_{DW}(\vec{x},t)=e\frac{[\vec{\tilde{\upsilon}},(\vec{x}-\vec{\tilde{x}})]}{c|\vec{x}-\vec{\tilde{x}}|^3},$$

где $\vec{\tilde{x}}(t)$ - текущая координата заряда, а $\vec{\tilde{\upsilon}}(t)\equiv$ $\equiv d\vec{\tilde{x}}(t)/dt$ - его скорость (см. [7, с. 217]). Видно, что квазистатическое магнитное поле определяется законом Био-Савара, тогда как квазистатическое электрическое поле содержит релятивистскую поправку к закону Кулона (см. [14]).

В работе [10] для точечной слаборелятивистской частицы с зарядом e, произвольно движущейся в цилиндрической камере дрейфа, показано, что при малых расстояниях от стенки, поверхностные наведенные заряды оказывают существенное влияние на её движение. В релятивистском случае сила взаимодействия определяется как релятивистской квазиэлектростатической составляющей силы Лоренца, так и вкладом со стороны квазистатического магнитного поля. В дарвиновском приближении квазиэлектростатическая и квазимагнитостатическая составляющие силы определяются методом, приведенным в [10], только с учетом вихревой части электрического поля и магнитной индукции. Для этого необходимо вычислить плотность квазистатических наведенных поверхностных зарядов и токов

$$\sigma(\theta,\zeta,t)=-\frac{1}{4\pi}E_r(\vec{x},t)\Big|_{r=a};$$
$$\kappa_\theta(\theta,\zeta,t)=\ \frac{c}{4\pi}B_z(\vec{x},t)\Big|_{r=a};$$
$$\kappa_z(\theta,\zeta,t)=-\frac{c}{4\pi}B_\theta(\vec{x},t)\Big|_{r=a}.$$

Нерелятивистская квазиэлектростатическая часть $\vec{F}^e_{non-rel}(\vec{x},t)$ силы Лоренца определятся формулой (17) работы [10] (закон Кулона):

$$\vec{F}^e_{non-rel}(\vec{x},t)=e\int_{S'}\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\Bigg|_{\iota'=1}\sigma(\theta',\zeta',t)dS'=$$
$$=ea^2\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta'\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\Bigg|_{\iota'=1}\sigma(\theta',\zeta',t)d\theta', \quad (16)$$

где $|\vec{x}-\vec{x}'|=[\,\iota^2+\iota'^2-2\iota\iota'\cos(\theta-\theta')+(\zeta-\zeta')^2]^{1/2}$; e - величина заряда, находящегося в точке $\vec{x}$ в момент времени t. Релятивистская поправка имеет вид [14]

$$\vec{F}^e_{rel}(\vec{x},t)=-\frac{e}{c^2}\int_{S'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\Bigg|_{\iota'=1}\frac{\partial\vec{\kappa}(\theta',\zeta',t)}{\partial t}dS'=$$
$$=-\frac{ea^2}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta'\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\Bigg|_{\iota'=1}\frac{\partial\vec{\kappa}(\theta',\zeta',t)}{\partial t}d\theta', \quad (17)$$

где $\vec{\kappa}\equiv\kappa_\theta\vec{e}_\theta+\kappa_z\vec{e}_z$; $\vec{e}_\theta$ и $\vec{e}_z$ - орты цилиндрической системы координат. Суммарная квазиэлектростатическая часть силы Лоренца в дарвиновском приближении равняется

$$\vec{F}^e_{DW}(\vec{x},t)=\vec{F}^e_{non-rel}+\vec{F}^e_{rel}$$

(сравните также с (15)). Для расчета квазимагнитостатической части силы Лоренца воспользуемся законом Био-Савара [14] и в обозначениях формул (16) и (17) получим

$$\vec{F}^m_{DW}(\vec{x},t)=\frac{e}{c^2}\int_{S'}\frac{[\vec{\upsilon},[\vec{\kappa}(\theta',\zeta',t),(\vec{x}-\vec{x}')]]}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\Bigg|_{\iota'=1}dS'=$$
$$=\frac{ea^2}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta'\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[\vec{\upsilon},[\vec{\kappa}(\theta',\zeta',t),(\vec{x}-\vec{x}')]]}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\Bigg|_{\iota'=1}d\theta',$$

где $\vec{\upsilon}(\vec{x},t)$ - скорость заряда. Полное выражение для «квазистатической» силы Лоренца в дарвиновском приближении имеет вид

$$\vec{F}^{qs}_{DW}(\vec{x},t)=\vec{F}^e_{DW}+\vec{F}^m_{DW}. \quad (18)$$

Выводы. Таким образом, основываясь на предложенном нами методе сведения векторной задачи для уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат к системе скалярных уравнений, в дарвиновском приближении найдены собственные квазистатические электрическое и магнитное поля, создаваемые произвольными, удовлетворяющими уравнению непрерывности, плотностями заряда и тока в цилиндрической камере дрейфа. Выражения (13) определяют вихревые составляющие квазистатического электрического поля, что позволяет более полно учитывать «ёмкостные» эффекты при расчетах слаборелятивистской и релятивистской динамики заряженных пучков. «Индуктивные» эффекты принимаются во внимание при учете квазистатических магнитных полей (14). В этом же приближении, с точностью до величин порядка сил, создаваемых полем излучения пучка, найдены выражения для силы Лоренца, действующей на заряженную частицу, со стороны наводимых пучком на стенках камеры дрейфа плотностей зарядов и токов. Полученные выражения для полей и сил замыкают построение аналитической схемы для численного моделирования динамики криволинейных сильноточных релятивистских пучков заряженных частиц методом крупных частиц с учётом влияния стенок цилиндрической камеры дрейфа и квазистатических полей пространственного заряда.

Отметим, что иерархия слагаемых (по степеням υ/c) в силе Лоренца (18) позволяет предложить следующую методику их учета в задачах транспортировки: в нерелятивистском случае ($\upsilon/c \le 0{,}3$) важен только вклад электрического поля (закон Кулона), а для слаборелятивистского и, при определенных условиях, релятивистского случаев ($0{,}3 < \upsilon/c \le 0{,}8$ и $0{,}8 < \upsilon/c < 1$ соответственно) - дарвиновское приближение (закон Кулона с релятивистскими поправками и закон Био-Савара). В этом смысле в подходе [2; 5, с. 102] было бы более последовательно полностью пренебречь магнитной индукцией - это бы не отразилось ни на выполнении закона сохранения заряда (уравнение непрерывности), ни на балансе энергии (теорема Пойтинга).

Авторы благодарны Н. Г. Дон, Л. А. Пазынину, Ю. В. Тарасову и А. Б. Яковлеву за плодотворные обсуждения.

1. *Кац А. М., Ильина Е. М., Манькин И. А.* Нелинейные явления в СВЧ приборах О-типа с длительным взаимодействием. - М.: Сов. радио, 1975. - 296 с.
2. *Солнцев В. А.* Возбуждение однородных и периодических волноводов сторонними токами // Журн. техн. физики. - 1968. - 38. - С.100-108.
3. *Кураев А. А.* Паразитные колебания в генераторах *Е*-типа, связанные с действием высокочастотных полей пространственного заряда // Радиотехника и электроника. - 1966. - 11. - С.156-158.
4. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. - 2007. - 75. - P.230-239.
5. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. - М.: Сов. радио, 1973. - 400 с.
6. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965. - 704 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. - М.: Наука, 1988. - 512 с.
8. *Gorbik G. M., Ilyenko K. V.* Four-vector potential for point charge moving arbitrarily in cylindrical waveguide / 11th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (Kharkiv, 26-29 June 2006): Conference Proceedings. - Kharkiv, 2006. - P.437-439.
9. *Горбик Г. М., Ильенко К. В.* Четыре-потенциал, возбуждаемый произвольно движущимся точечным зарядом в цилиндрической камере дрейфа / 16-я международ. Крымская конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (Севастополь, 11-15 сент. 2006 г.): Тез. докл. - Севастополь - 2006. - С.251-252.
10. *Горбик Г. М., Ильенко К. В., Яценко Т. Ю.* К расчёту силы, действующей на движущийся заряд в цилиндрической камере дрейфа // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2004. - 9, №3. - С.556-561.
11. *Кураев А. А.* Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. - Минск: Наука и техника, 1971. - 312 с.
12. *Hartemann F.* Eulerian formalism of linear beam-wave interactions // Phys. Rev. A. - 1990. - 42. - P.2906-2914.
13. *Левин Л.* Теория волноводов. Методы решения волноводных задач. - М.: Радио и связь, 1981. - 312 с.
14. *Griffiths D. J.* Time-dependent generalization of the Bio-Savart and Coulomb laws // Am. J. Phys. - 1991. - 59. - P.111-117.

CALCULATION OF QUASISTATIC EIGEN-FIELD OF A CHARGE, WHICH MOVES ARBITRARILY IN CYLINDRICAL DRIFT TUBE

G. M. Gorbik, K. Ilyenko, T. Yu. Yatsenko

In the Darwin model using the Green's function method, we found the solutions for quasistatic (quasistationary) vector potential excited in cylindrical drift tube with perfectly conducting walls by arbitrary charge and current densities (e.g., by a charged beam), which satisfy the continuity equation. Green's functions are expressed as expansion in eigen-functions of the Laplace operator in cylindrical coordinate system with the Dirichlet and Neumann boundary conditions. Having obtained solutions for potentials, we find expressions for the induced magnetic field and relativistic correction to the electric field. Taking into account relativistic corrections to the order of field of radiation, we also found the force acting on the moving point charges of the beam from the induced by itself on the drift tube walls surface charges and currents. A method, which enables one to reduce the problem for vector potential to a system of scalar Poisson equations in cylindrical coordinate system, is proposed.

Key words: Darwin model, Coulomb gauge, induced surface charges and currents, Lorentz force.

ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНОГО КВАЗІСТАТИЧНОГО ПОЛЯ ЗАРЯДУ, ЩО ДОВІЛЬНО РУХАЄТЬСЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ КАМЕРІ ДРЕЙФУ

Г. М. Горбик, К. Ільєнко, Т. Ю. Яценко

У дарвінівському наближенні методом функцій Гріна отримано вираз для квазістатичного (квазістаціонарного) векторного потенціалу та відповідного магнітного поля, які створюються у циліндричній камері дрейфу із ідеально провідними стінками довільною густиною заряду та струму (наприклад, пучком заряджених частинок), що задовольняють рівнянню неперервності. Отримані функції Гріна подано у вигляді розкладання за власними функціями оператора Лапласа в циліндричній системі координат із граничними умовами Діріхле та Ноймана. Ґрунтуючись на отриманих виразах для потенціалів, обраховано магнітне поле та релятивістську поправку до електричного поля. З урахуванням релятивістських поправок до величин порядку поля випромінювання обраховано внесок у силу Лоренца, яка діє на окремі заряджені частинки пучка, що рухається, із боку наведених пучком на стінках камери дрейфу поверхневих зарядів і струмів. Запропоновано метод, який дозволяє звести задачу пошуку векторного потенціалу до системи скалярних рівнянь Пуассона у циліндричній системі координат.

Ключові слова: дарвінівське наближення, кулонівська калібровка, наведені поверхневі заряди та струми, сила Лоренца.

Рукопись поступила 26 февраля 2007 г.