УДК 622.2:536.21

НЕОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ГОРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ

к.ф.-м.н. Венгеров И.Р. (*ДонФТИ им. А.А. Галкина НАН Украины*)

Рассмотрены неодномерные модели горной теплофизики, указаны недостатки существующей парадигмы в построении и исследовании этих моделей. Предложены точные и приближенные методы решения краевых задач теплопереноса в горных массивах, приведены конкретные примеры.

MULTIDIMENSIONAL MODELS OF MINING THERMOPHYSICS

Vengerov I.R.

Multidimensional models of mining thermophysics are discussed, disadvantages of the existing paradigm of their derivation and investigation are indicated. Approximate methods of solving the boundary tasks of heat transfer in mining masses are proposed as well, some specific examples are given.

1. Введение

Развитие теоретических основ горной теплофизики начиналось с актуальных для периода углубления действующих и строительства глубоких шахт задач, связанных с прогнозом теплового режима выработок. В последние 40–50 лет учет теплопритоков к рудничному воздуху от горного массива осуществляется посредством коэффициентов нестационарного теплообмена K_τ, для которого получены различные формулы [1–6]. При этом модели, на основе которых рассчитываются K_τ, являются одномерными краевыми задачами теплопроводности в области $r \in [R_0, \infty)$ горного массива. Здесь r – координата, отсчитываемая от центра сечения выработки, приведенного к круговому, R_0 – эквивалентный радиус такого сечения.

Однако уже достаточно давно стало ясно, что одномерные идеализации недостаточны и необходима разработка двух- и трехмерных моделей: взаимосвязанного тепломассопереноса во влагосодержащих массивах; термоупругости и термопластичности (устойчивости) массивов; сопряженного теплопереноса в системах выработка–массив; развития и тушения подземных пожаров [7–12].

В настоящее время целостная методология построения и упрощения (редукции) неодномерных моделей отсутствует, имеются лишь отдельные работы, в которых многомерные краевые задачи решаются весьма сложными методами либо редуцируются без должных оценок и обоснований. В настоящей работе на основе краткого обзора формулируются методологические принципы редукции и решения, предлагаются точные и приближенные методы для исследования неодномерных моделей, приводятся конкретные примеры.

Работа посвящается памяти д.т.н., проф. Медведева Бориса Ивановича, внесшего значительный вклад в развитие теоретических основ горной теплофизики.

2. Краткий обзор

Впервые двумерная краевая задача (в связи с моделированием температурного поля в массиве вокруг выработки прямоугольного сечения) была, видимо, рассмотрена в [1]. Ширина и высота сечения выработки составляли соответственно $2a$ = 4,8 м и $2b$ = 2,4 м. Коэффициент теплообмена между стенкой выработки и вентиляционным воздухом был постоянным и равным α = 10 ккал/м^2·ч·град. Коэффициенты тепло- и температуропроводности: λ = 1,0 ккал/м·ч·град, a = 20,3·10^{-4} м^2/ч. Ввиду симметричности задачи температурное поле рассчитывалось только в первом квадранте, который разбивался на элементарные квадратные ячейки ($\Delta x = \Delta y$ =1,2 м). Использовался метод элементарных балансов, определялись температуры в узлах расчетной сетки и теплопритоки от массива к стенкам выработки. Последние сравнивались с таковыми, найденными по аналитическим формулам для кругового сечения с эквивалентными радиусами $R_{1,э} = V/2\pi$ и $R_{2,э} = (S/\pi)^{1/2}$, где V, S – периметр и площадь сечения прямоугольной выработки. Для $R_{1,э}$ значения теплопритоков оказались несколько ниже, а для $R_{2,э}$ – выше, чем для кругового сечения, однако во всех случаях (для времен проветривания от 725 ч до 2000 ч) относительные погрешности не превышали 2,5%.

При существенном превышении шириной выработки ее высоты прямоугольное сечение в ряде работ заменялось щелью. Такая редукция осуществлялась для очистных выработок (лав) и выработанных пространств [4]. Х. Луригом рассматривалась двумерная задача, аналогичная [1], но решение ее было численным. Оно показало, что при a/b = 2,0 теплопритоки к кровле и почве на 10% превышают теплопритоки к боковым стенкам.

Моделирование двумерных полей на гидроинтеграторе (для выработок кругового, квадратного, прямоугольного и сводчатого сечений) показало [13], что средневзвешенная температура поверхности кругового сечения выработок (вводимая в силу начальной температурой асимметрии, обусловленной учетом геотермии) превышает таковые для всех других форм сечений.

Выработка некругового сечения, форма которого задавалась аналитической функцией, рассматривалась в [14]. Уравнение теплопроводности в массиве записывалось в полярных координатах $\{\rho, \varphi\}$ и решалось преобразованием Лапласа по времени t. Решение получено в форме бесконечного ряда, первый член которого соответствовал круговому сечению.

Сложные формы сечений (для усеченных дискообразных, шаровых, эллипсоидных) выработок (подземных сооружений) рассматривались А.С. Галицыным [15]. Уравнения записывались в специальных системах координат, решались интегральными преобразованиями. Вид решений весьма сложен (ряды и интегралы от комбинаций спецфункций) и для практических расчетов непригоден.

Весьма сложные методы (тепловых потенциалов, граничных интегральных уравнений) использовались также в [16, 17], где рассматривались температурные поля в массивах вокруг выработок некругового сечения и с учетом геотермии. Для нескольких частных случаев решение было доведено до конца, в частности было показано, что использование для определения радиуса R_0 эквивалентного кругового сечения формулы $R_0 = 2S/V$ (рекомендуемой в ряде руководств) ведет к завышению среднеинтегральных значений $K_{\tau,\text{ср}}$. Для прямоугольных выработок, в частности, при отношениях ширины к высоте 1; 2; 3; 4, погрешности $K_{\tau,\text{ср}}$ составляют соответственно 2,5; 10,2; 17,3; 26,3% [16].

В упомянутых моделях двумерные температурные поля возникали под действием двух факторов: отличия формы сечения выработки от кругового; учета геотермической начальной температурной неоднородности массива. К двух- и трехмерным моделям ведут и другие факторы – неоднородность (слоистая плоская или радиальная) и (или) анизотропия теплофизических свойств горных массивов [4,7–10,16–18]. Другая группа неоднородных моделей возникает при рассмотрении сопряженного теплопереноса в системах массив–выработка (различные технологические и аварийные режимы вентиляции) [4–6,8,10–18]. Обычно такие модели упрощаются без достаточно строгих оценок и обоснований.

Неодномерные модели теплопереноса используются в многочисленных теплофизических приложениях. Анализ источников (более восьмисот) показал [19], что:

1) двух- и трехмерные краевые задачи ставятся как для линейных, так и для нелинейных уравнений переноса;

2) они решаются аналитическими, численными и гибридными методами;

3) эти методы сводятся к двум группам – без понижения и с понижением размерности (редукцией) задачи;

4) методы без понижения размерности ведут к весьма громоздким вычислениям и конечным результатам;

5) методы с понижением размерности используют различные упрощающие предположения и оценки порядков величин для обоснования редукции исходной задачи.

3. Методологические принципы

Рассмотрим некоторые количественные характеристики двумерного температурного поля в горном массиве вокруг выработки прямоугольного сечения [1]. Двумерная охлажденная зона имеет неодинаковую протяженность вдоль осей Ox, Oy и луча, исходящего из центра кровли под углом 45° к Oy (центры начала координат и сечения выработки совпадают; оси Ox, Oy нормальны соответственно боковой стенке и кровле выработки). Длину векторов, отложенных от точек на стенках выработки по трем указанным направлениям до точек массива, температура в которых отлична от $T_\text{п}$ на 10^{-3}°С и менее, обозначим δ_i; это и будут размеры охлажденной зоны в различных направлениях ($i = x$ – вдоль Ox, $i = y$ – вдоль Oy, $i = 0$ – вдоль луча под $<$ 45° к Oy).

Для времени охлаждения массива τ_1 = 725 ч (≈ 1 месяц) согласно [1] имеем: $\delta_x^{(1)} = \delta_y^{(1)}$ = 6,0 м; $\delta_0^{(1)}$ = 6,72 м. Для времени охлаждения τ_2 = 2000 ч (≈ 2,8 месяца): $\delta_x^{(2)} = \delta_y^{(2)}$ = 9,6 м; $\delta_0^{(2)}$ = 10,15 м. Температуры массива на осях Ox и Oy вблизи стенок выработки несколько отличаются, сближаясь по мере удаления от них. Перепады температур ΔT_x и ΔT_y между этими температурами и температурами в точках, отстоящих на 1,2 м от осей Ox и Oy и лежащих на линиях, параллельных координатным осям, невелики и максимальны на стенках выработки. Для кровли $\Delta T_y^{(1)} = 23\cdot10^{-4}$°С, $\Delta T_y^{(2)} = 24\cdot10^{-4}$°С. Для боковой стенки $\Delta T_x^{(1)} = 4\cdot10^{-2}$°С, $\Delta T_x^{(2)} = 3\cdot10^{-2}$°С. Отношения плотностей потоков тепла к центру кровли (q_y) и к центру боковой стенки (q_x): $q_y^{(1)}/q_x^{(1)}$ = 0,9; $q_y^{(2)}/q_x^{(2)}$ = 0,83. Отношения этих величин на границах охлажденных зон к таковым на стенках выработки: $q_{\delta,x}^{(1)}/q_x^{(1)} = 1{,}3\cdot10^{-3}$; $q_{\delta,y}^{(1)}/q_y^{(1)} = 2\cdot10^{-3}$; $q_{\delta,x}^{(2)}/q_x^{(2)} = 1{,}2\cdot10^{-3}$; $q_{\delta,y}^{(2)}/q_y^{(2)} = 2{,}5\cdot10^{-3}$.

Из этих данных следуют принципы $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$ (первая группа).

$\mathbf{A_1}$. Охлажденная зона в массиве имеет максимальную протяженность в направлении, где охлаждающие действия кровли и боковой стенки суммируются; по осям Ox и Oy ее протяженность примерно одинакова; границы охлажденной зоны являются практически адиабатическими.

$\mathbf{B_1}$. Температурные различия по мере удаления от стенок выработки для равноотстоящих от них точек нивелируются.

$\mathbf{C_1}$. Оси Ox и Oy являются практически адиабатическими границами (АГ); для «адиабатических стержней» – полос шириной 0,1 м, содержащих в себе АГ Ox и Oy как оси симметрии, можно считать соответственно $\partial T/\partial y \simeq 0$ и $\partial T/\partial x \simeq 0$.

Полагаем далее, что эти принципы справедливы для двумерных температурных полей в массивах вокруг выработок всех симметричных форм (круговой, прямоугольной, квадратной, эллиптической). Обоснование понятия «охлажденная зона» было дано в [1], а обоснованность принципов $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$ вытекает, кроме [1], также из известных в теплофизике (но сформулированных позднее) принципов «поэтапного моделирования», «местного влияния», «локализации» [20,21].

Вторая группа методологических принципов содержит способы априорных оценок возможностей редукции краевых задач (понижения размерностей трех- и двумерных задач).

$\mathbf{A_2}$. Один из методов редукции – покоординатного спуска [22], требует обоснования утверждения, что $T(x,y,t) \simeq T(x,t)$ (далее, не ограничивая общности, рассматриваем редукцию двумерных задач к одномерным). Для выполнения последнего приближенного равенства необходимо, чтобы в области ω определения $T(x,y,t)$ (x, $y \in \omega$) было: $\partial T/\partial y \simeq 0$ (или $\partial T/\partial y \ll \partial T/\partial x$). Для осуществления этих (дифференциальных) оценок необходимо постулировать аппроксимацию температурного поля в ω – $\hat{T}(x,y,t)$, удовлетворяющую краевым условиям (всем или частично). Тогда для оценок можно воспользоваться условиями $\partial\hat{T}/\partial y \simeq 0$ или $\partial\hat{T}/\partial y \ll \partial\hat{T}/\partial x$. Возможно также использование конечных (алгебраических) оценок типа $[T_п(H_2) - T_п(H_1)]/(H_2 - H_1) \ll [T_п(H_{ср}) - T_0]/R_з$, где $T(H_2)$, $T_п(H_1)$ – температуры в нетронутом массиве на глубинах H_2 и H_1 вокруг вертикального ствола, $H_{ср} = (H_1 + H_2)/2$, $R_з = R_з(t)$ – ширина охлажденной зоны вокруг ствола. Это неравенство показывает, что вертикальная компонента потока тепла существенно меньше радиальной, т.е. можно считать (полагая вертикальной ось Oz) $T(z,r,t) \simeq T(r,t)$.

B$_2$. Другой, широко распространенный метод понижения размерности краевых задач теплофизики – усреднение температуры по одной из координат. Вводится оператор усреднения [23] (для примера – по y; $x, y \in \omega = \{x \in (0, L_1), y \in (0, L_2)\}$)

$$S\{T(x,y,t)\} = U(x,t) = \frac{1}{L_2}\int_0^{L_2} T(x,y,t)\mathrm{d}y. \quad (1)$$

При применении его к краевым задачам относительно функций $T(x,y,t)$ возможны случаи: 1) заданы граничные условия II рода – $\lambda(\partial T/\partial y)_{y=0} = q^{(-)}(x,t)$, $\lambda(\partial T/\partial y)_{y=L_2} = q^{(+)}(x,t)$; 2) заданы те же, но однородные условия АГ – $q^{(-)}(x,t) = q^{(+)}(x,t) = 0$; 3) заданы (при $y = 0$, $y = L_2$) граничные условия I, III или IV родов. В первом случае оператор $S\{T(x,y,t)\}$ переводит краевую задачу в одномерную относительно функции $U(x,t)$, но в краевой части уравнения появляется «источник тепла» (функция плотности которого задана, так как $q^{(+)}(x,t)$ и $q^{(-)}(x,t)$ известны). Во втором случае (границы $y = 0$ и $y = L$ – «адиабатические стержни») уравнение одномерно, а функция $U(x,t)$ – квазиодномерное приближение). По квазиодномерному приближению $U(x,t)$ можно приближенно найти $T(x,y,t)$, если известны граничные температуры $T(x,0,t) = \mu^{(-)}(x,t)$ и $T(x,L_2,t) = \mu^{(+)}(x,t)$. Последнее требует реализации одного из вариантов: 1) в случае 3), когда при $y = 0$ и $y = L_2$ задано какое-либо из граничных условий – «переопределенная задача» (так как эти границы – АГ); 2) частный случай варианта 1) – $y = 0$ и $y = L_2$ – границы охлажденной зоны, на которых $T \approx T_п = \mathrm{const}$ и которые, кроме того, являются АГ; 3) граничные условия I рода – функции $\mu^{(-)}(x,t)$ и $\mu^{(+)}(x,t)$ заданы; 4) граничные условия III или IV родов – функции $\mu^{(-)}(x,t)$ и $\mu^{(+)}(x,t)$ вводятся (как неизвестные) и затем определяются из граничных условий. Приближенное решение двумерной задачи записывается в виде:

$$T(x,y,t)=\mu^{(-)}(x,t)+[\mu^{(+)}(x,t)-\mu^{(-)}(x,t)]\Psi(y)\,,\quad x\in(0,L_1), y\in(0,L_2). \quad (2)$$

Здесь $\Psi(y)$ – функция «восстановления» (размерности), удовлетворяющая условиям:

$$\Psi\,(0)=0,\ \Psi(L_2)=1;\ \left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y}\right|_{y=L_2}=0\,. \quad (3)$$

Два последних условия – дополнительные, они обязательны, если $y = 0$ и $y = L_2$ – «адиабатические стержни». Функция $\Psi(y)$ обычно выбирается в классе элементарных функций, в частности степенных [23].

Третья группа методологических принципов – оценка методов решения (аналитических) неодномерных задач: $\mathbf{A_3}$ – при использовании редукции; $\mathbf{B_3}$ без использования редукции.

$\mathbf{A_3}$. Анализ источников [19] показывает, что к модели редукции относятся: покоординатный спуск, усреднение, бесконечные и конечные интегральные преобразования, автомодельность. Два первых нами рассмотрены, последний имеет узкую область применяемости, третий и четвертый весьма громоздки как в ходе решения, так и по форме конечных результатов. Для решения задач горной теплофизики полагаем перспективными два первых метода.

$\mathbf{B_3}$. Методы решения неодномерных краевых задач теплофизики без предварительного понижения их размерности [19]: разделение переменных; преобразование Лапласа по времени; тепловые потенциалы; функции Грина; прямые методы математической физики. Первый метод требует «хорошей геометрии» задачи; второй и третий (в особенности!) – громоздки. Предпочтение необходимо отдать методу функций Грина и методу Бубнова–Галеркина (как наиболее «прозрачному» из прямых методов математической физики).

4. Методы редукции

Рассмотрим методы оценки «зон одномерности» – частей горного массива, в которых температурное поле можно приближенно описывать одномерными моделями. Аналогичная задача решалась в [24] численно; использовался термин «зона регионального влияния». Ограничиваясь в данной работе теплофизически однородными и изотропными массивами, рассмотрим три группы выработок, для которых есть отличия в формировании охлажденной зоны в массиве: проходимые (тупиковые), эксплуатируемые (выработки сквозного проветривания) и аварийные выработки. К последним относим те из них, в которых развиваются пожары или происходит резкое изменение режима проветривания (изменение температуры или (и) расхода воздуха).

4.1. Проходимые выработки

Используем методологические принципы $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$. Пусть проходка выработки кругового сечения осуществляется с постоянной скоростью $v_{\text{пр}}$, текущая длина выработки – L. Координата x отсчитывается от начального сечения выработки в сторону забоя и совпадает с осью выработки. Температура воздуха в выработке $T_в$ = const. Разобьем область массива $\Omega = \left\{ x \in [0, L), r \in [R_0, R_{з_{\max}}) \right\}$, примыкающую к выработке, на подобласти $\omega = \omega(x_i) = \left\{ x \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x], r \in [R_0, R_{з_{\max}}] \right\}$, где R_0 – радиус сечения выработки, $R_{з_{\max}}$ – максимальный радиус охлажденной зоны $\left(R_{з_{\max}} = R_з(t_{\text{ох,max}}) = R_з(L/v_{\text{пр}}) \right)$, $i = \overline{0, N}$, $N = L/2\Delta x >> 1$. Для времени охлаждения $\omega(x_i)$, $t_{\text{ох}}^{(\text{i})}$ имеем:

$$t_{\text{ох}}^{(i)} = t_{\text{ох}}(x_i) = \frac{L - x_i}{v_{\text{пр}}},\ t_{\text{ох}}(0) = t_{\text{ох,max}} = \frac{L}{v_{\text{пр}}},\ t_{\text{ох}}(x_N) = t_{\text{ох,min}} = \frac{2\Delta x}{v_{\text{пр}}}. \quad (3)$$

Уравнение теплопроводности в области Ω:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right], \quad T = T(r, x, t), \quad x, r \in \Omega,\ t > 0. \quad (4)$$

Вводим оператор усреднения температурного поля в подобласти $\omega(x_i)$:

$$S\left\{ T(r, x, t) \right\} = U(r, t) = \frac{1}{2\Delta x}\int\limits_{x_i - \Delta x}^{x_i + \Delta x} T(r, x, t)\mathrm{d}x. \quad (5)$$

Применив (5) к (4), получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{a}{2\Delta x}\left[\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_i + \Delta x} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_i - \Delta x} \right]. \quad (6)$$

Второе слагаемое в первой части (6) преобразуем, заменив производные конечно-разностными соотношениями (что, возможно, так как $\Delta x/L << 1$). Поскольку $T_в$ = const, все подобласти $\omega(x_i)$ (кроме $i = 0$ и $i = N$) имеют приближенно одинаковую «термическую историю»: эволюция температурного поля в $\omega(x_i)$ повторяет таковую в $\omega(x_{i-1})$ с временным запаздыванием $\Delta\tau = 2\Delta x / v_{\text{пр}}$ ($t_{\text{ох}}^{(i-1)} = t_{\text{ох}}^{(i)} + \Delta\tau$). Перетоки тепла (вдоль Ox) из $\omega(x_i)$ в $\omega(x_{i-1})$ (поскольку соответствующие точки в $\omega(x_{i-1})$ охлаждаются на $\Delta\tau$ больше) компенсируются примерно такими же перетоками из $\omega(x_{i+1})$ в $\omega(x_i)$. Если перейти к пределу $N \to \infty$ ($\Delta x = v_{\text{пр}}\Delta\tau/2 \to 0$),то вторая конечно-разностная производная в (6) примет вид ($-\tau_r\partial^2 U/\partial t^2$), а само уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tau_r\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r} \right),\ U = U(r, t),\ \tau_r = \frac{a}{v_{\text{пр}}^2}. \quad (7)$$

Уравнение (7) является гиперболическим уравнением теплопроводности, для которого показано, что при $t \gtrsim 8\tau_r$ его решение практически совпадает с таковым для параболического уравнения (т.е. (7) без второго члена в левой части) [25]. Таким образом, при $t \gtrsim 8\tau_r$ член $\tau_r \partial^2 U / \partial t^2$, описывающий теплоперетоки в массиве вдоль оси Ox можно опустить, т.е. использовать одномерное уравнение (7), где $U = U(r,t)$. Из (3) и (7) следует:

$$t_{\text{ох}}(x) = \frac{L-x}{v_{\text{пр}}} \gtrsim 8\frac{a}{v_{\text{пр}}^2}, \quad x \lesssim L-l, \quad l = \frac{8a}{v_{\text{пр}}}. \tag{8}$$

Получена оценка зоны одномерности поля (его зависимости только от (r, t)): $x \lesssim L - l$. При $x > L - l$ – поле двумерно. Для диапазонов изменения параметров: $a = (5\text{–}40)\cdot 10^{-4}$ м^2/ч, $v_{\text{пр}} = 0{,}1\text{–}2{,}0$ м/ч получаем:

$$l_{\min} = \frac{8a_{\min}}{v_{\text{пр}_{\max}}} = 0{,}02 \text{ м}, \quad l_{\max} = \frac{8a_{\max}}{v_{\text{пр}_{\min}}} = 0{,}32 \text{ м}. \tag{9}$$

Таким образом, в режиме проходки выработки с постоянной температурой воздуха температурное поле в окружающем ее массиве практически одномерно.

Этот случай является идеализацией реальных условий проходки, когда вентиляция тупиковой выработки осуществляется вентиляторами местного проветривания в одном из трех режимов: нагнетательном, всасывающем и комбинированном. В первом из них в предположении герметичности воздуховода охлаждаемый воздух движется, постепенно нагреваясь от забоя к началу выработки. При этом у всех слоев $\omega(x)$ «термическая история» приблизительно одинакова, и вновь можно использовать предыдущий способ оценки, базирующаяся на переходе к гиперболическому уравнению теплопроводности. При других режимах работы вентиляторов местного проветривания такую аналогию провести нельзя и оценка (8) не работает.

Если рассматривать выемку полосы в лаве комбайном, движущимся с постоянной скоростью $v_{\text{к}}$ как «проходку», то оценка (8) применима для определения зоны, в которой температурное поле (строго говоря, трехмерное) в пласте угля, породах почвы и кровли приближенно не зависит от координаты Ox, отсчитывают вдоль лавы (от ее начала к концу). Поскольку $v_{\text{к}} > v_{\text{пр}}$, оценки l, выполненные ранее, дадут еще меньшие величины и исключение координаты x будет еще более обоснованным.

Другим аналогом «проходки» является движение вслед за лавой зоны выработанного пространства при управлении кровлей плавным опусканием. Роль $v_{\text{пр}}$ играет скорость подвигания забоя $v_{\text{л}}$. Исключается, при должном результате оценки (8), координата, перпендикулярная плоскости забоя (направленная в глубь пласта по его простиранию). Таким образом, возможность редукции неодномерной задачи установлена методом усреднения.

4.2. Эксплуатируемые выработки

В горной теплофизике, начиная с [1], принято считать, что проходка осуществлена мгновенно, а температурное поле в массиве одномерно:

$T = T(r,t)$. Как следует из подразд. 4.1 настоящей работы, эта гипотеза весьма правдоподобна. Встречаются, однако, ситуации, когда эта гипотеза нуждается в проверке (оценке одномерности).

4.2.1. Рассмотрим в качестве критерия одномерности отношение продольной q_x и радиальной q_r компонент теплового потока в массиве. Согласно принципу $\mathbf{A_2}$ полагаем поле одномерным, т.е. $T = T(r,t)$ при выполнении условия $q_x/q_r \ll 1$. Выражения для q_x и q_r найдем, воспользовавшись полиномиальной (квадратичной) аппроксимацией температурного поля в массиве [4]:

$$T^{(2)} = T^{(2)}(r,x,t) = T_{\text{п}} - (T_{\text{п}} - T_{\text{ст}}(x,t)\left(\frac{R_{\text{з}}(t)-r}{R_{\text{з}}(t)-R_0}\right)^2, \quad R_{\text{з}}(t) = R_0 + 4\sqrt{at}\,. \quad (10)$$

Здесь $T_{\text{ст}}(x,t)$ – температура стенки выработки; $x \in (0,L)$; $r \in [R_0, R_{\text{з}}(t))$; a – температуропроводность массива; t – время его охлаждения. Из (10) следует:

$$\frac{q_x}{q_r} = \frac{\partial T^{(2)}/\partial x}{\partial T^{(2)}/\partial r} = \frac{1}{2}\left[\frac{R_{\text{з}}(t)-r}{T_{\text{п}} - T_{\text{ст}}(x,t)}\right]\frac{\partial T_{\text{ст}}}{\partial \text{x}}. \quad (11)$$

Поскольку правая часть в (11) максимальна при $r = R_0$:

$$\frac{q_x}{q_r} < \left(\frac{q_x}{q_r}\right)_{r=R_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{R_{\text{з}}(t)-R_0}{T_{\text{п}} - T_{\text{ст}}(x,t)}\right]\frac{\partial T_{\text{ст}}}{\partial \text{x}} = q\,. \quad (12)$$

Чтобы конкретизировать критерий одномерности $q \ll 1$, рассмотрим случай задания на стенках выработки граничных условий III рода:

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{t=R_0} = \alpha\left[T_{\text{ст}}(x,t) - T_{\text{в}}(x,t)\right] = 2\lambda\left[\frac{T_{\text{п}} - T_{\text{ст}}(x,t)}{R_{\text{з}}(t)-R_0}\right].$$

Отсюда следует:

$$T_{\text{ст}}(x,t) = \frac{\alpha T_{\text{в}}(x,t) + \dfrac{2\lambda}{\delta_{\text{з}}(t)}T_{\text{п}}}{\alpha + \dfrac{2\lambda}{\delta_{\text{з}}(t)}}, \quad q = \frac{\delta_{\text{з}}(t)}{2\left(T_{\text{п}} - T_{\text{в}}(x,t)\right)}\frac{\partial T_{\text{в}}}{\partial x}. \quad (13)$$

Здесь α – коэффициент теплообмена между стенкой выработки и воздухом; λ – коэффициент теплопроводности горного массива; $\delta_{\text{з}}(t) = R_{\text{з}}(t) - R_0$ – ширина охлажденной зоны массива. Оценим q_i, воспользовавшись данными измерений и расчетов «макроградиентов» температуры воздуха q_i [5].

$$\left(\frac{\partial T_{\text{в}}}{\partial x}\right)_i \simeq \frac{\eta_i}{100}, \quad \eta_i = \begin{cases} 0{,}24 - 1{,}0, & i = 1, \\ 0{,}1 - 0{,}55, & i = 2, \\ 0{,}1 - 3{,}3, & i = 3. \end{cases} \quad (14)$$

Размерность $[\eta_i]$ = °C/100 м, i = 1, 2, 3 – соответственно для участковых (без транспорта), откаточных и очистных выработок. Для времен эксплуатации этих выработок τ_j (j = 1 – 1 месяц, j = 2 – 1 год для i = 1, 2 и j = 3 – 1 сутки для лав), средних значений теплофизпараметров, $T_п$, $T_{во}$ (температур воздуха на входе в выработку), $L_1 = L_2 = 10^3$ м, L_3 = 200 м, находим:

$$\Delta T(L_i) = \min\left(T_п - T_в(x,t)\right) = T_п - T_{во} - \frac{\eta_i L_i}{100} = \begin{cases} 10^\circ\text{C}, & i=1 \\ 14{,}5^\circ\text{C}, & i=2 \\ 13{,}5^\circ\text{C}, & i=3 \end{cases};$$

$$q_1(\tau_1) = 2{,}74\cdot 10^{-3};\ q_1(\tau_2) = 9{,}48\cdot 10^{-3};\ q_2(\tau_1) = 10^{-3}; \tag{15}$$

$$q_2(\tau_2) = 3{,}4\cdot 10^{-3};\ q_3(\tau_3) = 1{,}9\cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, во всех случаях условие $q << 1$ соблюдается, т.е. зависимостью температурного поля в массиве от продольной координаты Ox можно пренебречь, считая, что $T(x,r,t) \simeq T(r,t)$, т.е. применять метод покоординационного спуска для редукции исходной задачи.

4.2.2. Одним из факторов неоднородности температурного поля массива вокруг эксплуатируемых выработок является отличие формы их фактического сечения от кругового [17]. Используя методологические принципы $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{B_2}$, рассмотрим выработку с произвольным сечением на плоскости xOy. Третью координату Oz (вдоль выработки) считаем уже исключенной из рассмотрения. Начало координат O расположено так, чтобы минимальное расстояние от него до стенки выработки было l_{min}, а максимальное – l_{max}. Рассматриваем три круговых сечения выработок с общим центром в точке O, имеющие радиусы: $R_1 = l_{min}$, $R_2 = l_{max}$, $R_0 = (R_1 + R_2)/2$. Для характеристики формы сечения вводим коэффициент асимметрии $K_а = R_2/R_1$. Расчеты $K_а$ были проведены для выработок круглого ($K_а$ = 1), квадратного ($K_а$ = 1,41), эллиптического ($K_а$ = 1,0–4,0), прямоугольного ($K_а$ = 1,41–4,12), трапециевидного ($K_а$ = 1,0–2,92) и арочного ($K_а$ =0,99–2,75) сечений при максимальном отношении a/b = 4,0 (a – горизонтальный, b – вертикальный максимальные размеры сечений).

Параметр $K_а$ связан с параметром $\eta_0 = \Delta R/R_0$ ($\Delta R = R_2 - R_0 = R_0 - R_1$):

$$K_а = \frac{1+\eta_0}{1-\eta_0},\ \eta_0 = \frac{K_а - 1}{K_а + 1}. \tag{16}$$

Введем меры близости температур массива T_1 и T_2 и безразмерных соответствующих температур θ_1 и θ_2 ($\theta_i = (T_i - T_в)/(T_п - T_в)$ (i = 1, 2):

$$\delta T = T_2 - T_1,\ \delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \delta T/(T_п - T_в),\ \delta T = (T_п - T_в)\delta\theta. \tag{17}$$

Если $\delta\theta = \varepsilon << 1$, то $\delta T = (T_п - T_в)\varepsilon$ и при $\varepsilon = 5\cdot 10^{-2}$, $T_п - T_в$ = 20°C получим δT = 1°C. Поскольку погрешность в 1°C вполне допустима для оценок и приближенных расчетов, считаем, что погрешность $\delta\theta$ = 0,05 также допустима.

Определим влияние параметра $K_а$ (считая $K_а \in [1, 0; 4, 0]$) на $\delta\theta$, полагая критерием одномерности $\delta\theta \lesssim 0{,}05$. Величины θ_i определим для трех случаев: R_1, R_0, R_2. В силу известных свойств решений уравнения теплопроводности («локализация» и др.) разница температур в соответствующих точках массива при сечениях с радиусами R_1, R_0, R_2 будет, по мере увеличения отношения r/R_0, уменьшаться, приближаясь к нулю. Значение $r_{з_0}$, такое, что при $r \gtrsim r_{з_0}$, будет выполняться $\delta\theta << 0{,}5$ для всех значений безразмерного времени F_0 ($F_0 = at/R_0^2$) и будем считать границей зоны одномерности. Таким образом, поле в точках $(r/R_0) < (r_{з_0}/R_0)$ будет двумерным, а в точках $(r/R_0) \gtrsim (r_{з_0}/R_0)$ приближенно одномерным (т.е. влияние условий $R_2 > R_0 > R_1$ можно не учитывать).

Воспользуемся двумя аппроксимациями температурного поля: согласно (10) и экспоненциальной функции $T^{(e)}(r,t)$ [4]:

$$T^{(e)} = T^{(e)}(r,t) = T_{ст}(t) + \left(T_п - T_{ст}(t)\right)\left[1 - \exp\left(-4{,}61(r - R_0)/(R_з(t) - R_0)\right)\right], \quad (18)$$

где обозначения соответствуют (10). Использование одновременно двух аппроксимаций преследует две цели: повысить надежность оценок $r_{з_0}/R_0$ и сравнить точность (10) и (18).

По мере развития полей во времени происходит сближение значений $R_з(t) = R_0 + \delta_з(t)$, $R_з^{(1)}(t) = R_1 + \delta_з(t)$, $R_з^{(2)}(t) = R_2 + \delta_з(t)$. Оценку влияния $K_а$ на $r_{з_0}/R_0$ можно проводить лишь для значений $F_0 \gtrsim F_0^*$, где F_0^* соответствует моменту, когда начинают соблюдаться условия: $R_з^{(2)}(t)/R_з(t) \simeq 1$, $R_з(t)/R_з^{(1)}(t) \simeq 1$. Последнее возможно с различной точностью, но мы потребуем, чтобы отклонение приведенных отношений от 1 не превышало 0,05. Имеем:

$$\frac{R_з^{(2)}(t)}{R_з(t)} = 1 + \frac{\Delta R}{\delta_з(t)}\left(1 + \frac{R_0}{\delta_з(t)}\right)^{-1} = 1 + \beta_2, \quad \beta_2 \lesssim 0{,}05. \quad (19)$$

Другое отношение, $R_з(t)/R_з^{(1)}(t)$, дает такой же результат. С учетом (16) и (19) получаем:

$$\frac{\eta_0}{1 + 4\sqrt{F_0}} \lesssim 0{,}05, \quad F_0^* = \frac{at^*}{R_0^2} = 0{,}0625\left[20\left(\frac{K_а - 1}{K_а + 1}\right) - 1\right]^2. \quad (20)$$

Подсчеты по (20) при средних по Донбассу значениях a, R_0 дали

$K_а$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
F_0^*	0,56	1,96	3,59	5,06	6,38	7,56
t^*, мес.	0,67	2,38	4,37	6,21	7,80	9,21

Из условий $\delta\theta \lesssim 0{,}05$ для случаев R_1, R_0, R_2 в точках r/R_0 = 2–10 массива для различных $F_0 \gtrsim F_0^*(K_а)$ были рассчитаны значения $r_{з_0}/R_0$. Аппроксимация (с точностью в 5%) расчетных данных, полученных с помощью (10) и (18), позволила установить формулу

$$\frac{r_{з_0}}{R_0} = \left[10 + 0{,}8(4 - K_а)^2\right]\left(\frac{K_а - 1}{K_а + 1}\right). \tag{21}$$

При расчетах выявилась большая точность (18) по сравнению с (10) (для контроля производилось сравнение $\theta_{ст}(F_0)$ с [1]). По (21) для $F_0 \gtrsim F_0^*(K_а)$ в зависимости от величины $K_а$ можно установить границу зоны одномерности ($r \gtrsim r_{з_0}$) температурного поля, в которой влияние формы сечения выработки практически отсутствует. В области массива $r \in [R_0,\ r_{з_0})$ поле двумерно, в частности при симметричной форме сечения выработки (когда достаточно рассмотрения поля в первом квадранте) оно будет зависеть от полярных координат $\{\rho, \varphi\}$ ($\varphi \in [0, \pi/2]$).

4.2.3. Случай двумерного температурного поля в массиве, когда $T = T(\rho, \varphi)$, возможен не только при отличии формы сечения выработки от круговой, рассмотренной выше. В силу наличия в земной коре геотермического градиента температуры, начальная температура массива $T_п = T_п(y)$ (y – вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности вглубь). Часто используемое [1,4] начальное условие $T(r,t)\big|_{t=0} = T_п = \text{const}$ является, таким образом, приближением, в ряде случаев – грубым. Найдем, используя принципы $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, приближенное решение краевой задачи охлаждения температурно-неоднородного (при $T_п = T_п(y)$) массива вокруг выработки эллиптического сечения (при равенстве горизонтальной a и вертикальной b полуосей которого ($a = b = R_0$) имеем круговое сечение).

Начало координат системы xOy помещаем в центр эллипса и рассматриваем первый квадрант плоскости. Поле температур $U(x,y,t)$ в массиве, обусловленное охлаждающим действием выработки, возмущает начальное геотермическое поле (температура линейно нарастает в глубь Земли). В силу симметрии эллипса, $U(x,y,t)$ также симметрично, а границы квадранта $x = 0$ и $y = 0$ – адиабатические. Рассмотрим первую краевую задачу для суммарного температурного поля $T(x,y,t)$ (суперпозиции геотермического и возмущающего полей):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T\,,\ T = T(x,y,t)\,,\ \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2\,,\ x, y \in \tilde{\Omega}\,, \tag{22}$$

$$T(x,y,0) = T_п(y)\,,\ x, y \in \tilde{\Omega}\,,\ T(x,y,t)\big|_{x,y\in\gamma} = T_в\,. \tag{23}$$

Здесь $\tilde{\Omega}$ – область, дополняющая область, ограниченную кривой γ – эллипса $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ до всего первого квадранта; $T_в$ = const – температура воздуха в выработке; $T_п(y)$ – геотермическая температура массива. Для $U(x,y,t)=T(x,y,t)-T_п(y)$ используем конечную область Ω и конечный интервал времени $t \in (0, t_s]$. Границы Ω: кривая γ и прямые $x = x_δ$ и $y = y_δ$. Последние – границы охлажденной зоны, формирующейся на момент времени $t = t_s$: $x_δ = a + δ_3(t_s)$, $y_δ = b + δ_3(t_s)$. Для $U(x,y,t)$ вместо (22), (23) получаем задачу:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\nabla^2 U\,,\; U=U(x,y,t)\,,\; x,y\in\Omega\,,\; t\in(0,t_s]\,, \tag{24}$$

$$U(x,y,0)=0\,,\; x,y\in\Omega\,,\; U(x,y,t)\big|_{x,y\in\gamma}=T_в-T_{п_0}\,,\; \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_\delta}=\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=y_\delta}=0\,. \tag{25}$$

Здесь $T_{п_0}=T_п(0)$, $\nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2$.

Приближенное решение задачи (24), (25) ищем, используя понятие «адиабатических стержней». Таковыми в данной задаче являются: $АГ_x$ ($y = 0$, $x \in [a, x_δ]$) и $АГ_y$ ($x = 0$, $y \in [b, y_δ]$). При $t \in (0, t_s]$, $x = a$, $y = b$ имеем $U(x,y,t)=U_{в_0}=T_в-T_{п_0}$. На других концах этих стержней (т.е. на границах охлажденных зон) имеем: $U\big|_{x=x_\delta}=U\big|_{y=y_\delta}=0$. Переходя к координатам $x'=x-a$ и $y' = y - b$, получаем для $АГ_x$ и $АГ_y$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\,,\; U=U(\eta,t)\,,\; \eta=\begin{cases} x'\in(0,\delta_3(t_s)], & АГ_x\\ y'\in(0,\delta_3(t_s)], & АГ_y\end{cases}\,,\; t\in(0,t_s]\,, \tag{26}$$

$$U(\eta,t)\big|_{t=0}=0\,,\; \eta\in[0,\delta_3(t_s)]\,,\; U(\eta,t)\big|_{\eta=0}=U_{в_0}\,,\; U(\eta,t)\big|_{\eta=\delta_3(t_s)}=0\,. \tag{27}$$

В (26), (27) можно принять $\delta_3(t_s)=4\sqrt{at_s}$ [4]. Таким образом, исходная краевая задача редуцирована к одномерной задаче (26), (27), решение которой элементарно.

Пусть это решение найдено, т.е. функция $U(η, t)$ нам известна. Это квазиодномерное решение, и, используя принцип $\mathbf{B_2}$, по нему можно построить (восстановить) приближенное двумерное решение. Функция восстановления в данном случае имеет вид:

$$\Psi=\Psi(\phi)=\left(\frac{a-\rho_\phi}{a-b}\right)^2,\quad \rho_\phi=b\left[1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2\phi\right]^{-1/2}, \tag{28}$$

где {φ, ρ} – полярная система координат, начало которой совпадает с таковым у системы xOy, а связи $\{x, y\} \to \{φ, ρ\}$ имеют обычный вид. Здесь $ρ_φ \in [b, a]$, $φ \in [0, π/2]$. Легко убедиться, что функция Ψ(φ) удовлетворяет всем ранее сформулированным требованиям:

$$\Psi(0)=0,\ \Psi(\pi/2)=1,\ \left.\frac{d\Psi}{d\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{d\Psi}{d\phi}\right|_{\phi=\pi/2}=0\,.$$

Решение задачи исчерпывается записью аналога (2), где $\mu^{(-)}(x,t)$ соответствует $U(x',t)$, а $\mu^{(+)}(x,t)$ – $U(y',t)$. Вместо $\Psi(y)$ в (2) стоит $\Psi(\varphi)$ по (28).

4.3. Аварийные выработки

Аварийные режимы в горных выработках можно, с некоторой условностью, разделить на «быстрые» и «медленные». Примеры первых: взрывы метана и угольной пыли, нестационарные аэродинамические режимы при взрывах и внезапных обрушениях, начальные фазы экзогенных пожаров, «холодовые удары» (при отказе калориферов в зимний период). Ко вторым можно отнести развитые экзогенные пожары, эндогенные пожары, горение метана в труднодоступных местах. В этих ситуациях, как следует из литературных источников [4–6,26], математические модели процессов двух- и трехмерны. Поэтому на первый план выходят не оценки возможности редукции модели (так как в тех случаях, где такие оценки осуществляются, они показывают, что неодномерностью модели пренебрегать нельзя), а разработка методов приближенного решения двух- и трехмерных задач (в том числе –в сопряженной постановке).

4.3.1. Быстропротекающие процессы. В большинстве случаев обязателен сопряженный подход, т.е. решение задач теплопереноса не только в массиве, но и в выработке и согласование этих решений на стенке выработки. Нестационарный тепловой режим выработки может быть описан уравнением [27]:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V\frac{\partial T}{\partial x}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\alpha\Pi}{\rho C_p S}(T_{\text{ст}}-T)\,,\quad T=T(x,t)\,. \tag{30}$$

Здесь t – время; x – продольная (совпадающая с осью выработки) координата; Π, S – периметр и площадь сечения выработки; V – средняя по сечению выработки скорость вентиляционной струи (либо газовоздушной, далее – струи); a, ρ, C_p – соответственно температуропроводность, плотность и удельная теплоемкость струи; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки выработки (в ряде моделей $T_{\text{ст}} \backsimeq \text{const}$, но для сопряженных задач – $T_{\text{ст}} = T_{\text{ст}}(x, t)$); α – коэффициент конвективного теплообмена. В (30) уже осуществлено усреднение температуры струи по сечению выработки, поэтому $T = T(x, t)$.

Оценим порядок членов в (30).

$$V\frac{\partial T}{\partial x}\sim V\frac{\Delta_1 T}{\Delta x},\; a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\sim a\frac{\Delta_2 T}{\Delta x^2}\,,\quad \frac{a\partial^2 T/\partial x^2}{V\partial T/\partial x}\sim\frac{a}{\Delta x V}\frac{\Delta_2 T}{\Delta_1 T}\,. \tag{31}$$

Здесь $\Delta_1 T$, $\Delta_2 T$ – соответственно первая и вторая конечные разности; $\Delta x << L$ – малый по сравнению с длиной выработки L шаг по x (так как $D << L$, $D = 2R_0$, где R_0 – радиус сечения выработки, то $\Delta x \approx D$). Так как $\Delta_2 T < \Delta_1 T$, то в последнем из отношений (31) принятие условия $\Delta_2 T \backsimeq \Delta_1 T$ лишь ослабляют оценку его малости. Таким образом, условие пренебрежения в (30) кондуктивным переносом по сравнению с конвективным, т.е. отбрасывание первого члена в правой части:

$$\frac{a}{VD} << 1,\ \mathrm{Pe} >> 1,\quad \mathrm{Pe} = \mathrm{PrRe},\quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a},\quad \mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu}. \qquad (32)$$

Здесь ν – вязкость струи, Pr, Re, Pe – соответственно безразмерные числа Прандтля, Рейнольдса, Пекле. Аналогичный (32) критерий известен для задач теплопереноса в трубах и каналах [25]. Для воздушной струи [26] $\mathrm{Pr} \backsimeq 0{,}7$, $\mathrm{Re} \sim 10^4$, $\mathrm{Pe} \sim 7\cdot 10^3 >> 1$. Таким образом, (30) можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V\frac{\partial T}{\partial x} = \beta(T_{\text{ст}} - T),\quad \beta = \frac{\alpha\Pi}{\rho C_p S}. \qquad (33)$$

Оценим далее порядок слагаемых в левой части (33). Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{\Delta_1 T}{\tau_0},\ V\frac{\partial T}{\partial x} \sim V\frac{\Delta_1 T}{D},\quad \gamma = \frac{V\partial T/\partial x}{\partial T/\partial t} \sim \frac{L}{D}\frac{\tau_0}{\tau_L},\quad \tau_L = \frac{L}{V}, \qquad (34)$$

где τ_0 – характерное время переходного процесса; τ_L – характерное время «прохода» струи от $x = 0$ до $x = L$; L, D – длина и диаметр выработки. Формально возможны три случая: 1) $\gamma \sim 1$ (при $\tau_0/\tau_L << 1$, так как $L/D >> 1$); 2) $\gamma >> 1$ (при $\tau_0 \gtrsim \tau_L$); 3) $\gamma << 1$ (при $\tau_0/\tau_L << 1$, но $L/D \sim 1$). Последний случай, как соответствующий камерам, а не выработкам, отбрасываем. Случай 1) характеризует быстротекущие процессы, так как условие $\tau_0/\tau_L << 1$ при $V = 0{,}5–2{,}0$ м/с и $L = 10^3$ м эквивалентно условиям $\tau_0 << 8{,}3–34$ мин. При этом в левой части (33) необходимо сохранить оба слагаемые. Случай 2) может быть назван квазистационарным, так как при $\tau_0 \gtrsim \tau_L$ $\gamma >> 1$ и член $\partial T/\partial t$ в (33) может быть отброшен.

Рассмотрим модель сопряженного быстротекущего процесса теплопереноса в выработке с начальной температурой струи T_0 и температурой массива в области $r \in (R_0, R_3(t_a))$, равной $T_{\text{п}_0}$. Рассматриваем промежуток времени $t \in (0, t_a)$ распространения по выработке «теплового удара» за счет мгновенногоподъема температуры струи в начальном сечении выработки ($x = 0$) от T_0 до $T_{a_0} >> T_0$ с последующим ее изменением по закону $T_a = T_a(t)$. Таким образом, уравнение (33) в данной модели необходимо дополнить краевыми условиями:

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T_0,\ x > 0;\ T(x,t)\big|_{x=0} = T_a(t),\ t > 0;\ \left(\partial T/\partial x\right)_{x\to\infty} \to 0. \qquad (35)$$

Здесь нет противоречия с ранее принятыми условиями $t \in (0, t_a)$ и $x \in (0, L)$, поскольку нас интересует функция $T(x, t)$ на конечных временном и пространственном интервале, которая легко находится по таковой, определенной при $t > 0$ и $x > 0$. Кроме того, условия $t > 0$ и $x > 0$ позволяют применить для решения задачи эффективный прием – двойное преобразование Лапласа.

Температурное поле в массиве описывается функцией $T_м(x, r, t)$, удовлетворяющей уравнению (4), для которого $\Omega = \{x > 0, r \in [R_0, R_з(t_a)]\}$. Величина $R_з(t_a) = R_з(t_a) = R_0 + \delta_з(t_a) = R_0 + 4\sqrt{a_м t_a}$ – радиус «зоны прогрева» массива (аналог охлажденной зоны), $a_м$ – температуропроводность массива. Для $a_м = 20 \cdot 10^{-4}$ м^2/ч [2] и $t_a = 0,5$ ч, $\delta_з(t_a) \simeq 12,6$ см. Воспользуемся аппроксимацией (10), положив:

$$T_м(x,r,t) = T_{п_0} + \left(T_{ст}(x,t) - T_{п_0}\right)\left(\frac{R_з(t_a) - r}{\delta_з(t_a)}\right)^2, \quad r \in \left(R_0, R_з(t_a)\right). \qquad (36)$$

Функция $T_м(x,r,t)$ согласно (36) удовлетворяет начальному условию $T_м(x,r,0) = T_{п_0}$ (так как $T_{ст}(x,0) = T_{п_0}$) и граничным условиям по r:

$$T_м(x,r,t)\big|_{r=R_0} = T_{ст}(x,t), \quad T_м(x,r.t)\big|_{r=R_з(t_a)} = T_{п0}, \quad x > 0, \quad t \in (0, t_a). \qquad (37)$$

Если по (36) найти плотность потока тепла на стенке выработки $q_м = -\lambda\left(\partial T_м / \partial r\right)_{r=R_0}$ и приравнять его (что соответствует использованию граничного условия IV рода) плотности потока тепла от струи к стенке выработки $q_в = \alpha\left(T(x,t) - T_{ст}(x,t)\right)$, то получим выражение, разрешив которое относительно $T_{ст}(x,t)$, найдем

$$T_{ст}(x,t) = \frac{\alpha T(x,t) + \dfrac{2\lambda}{\delta_з(t_a)} T_{п_0}}{\alpha + \dfrac{2\lambda}{\delta_з(t_a)}}. \qquad (38)$$

Подстановка (38) в (33) дает

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V\frac{\partial T}{\partial x} = h\left[T_{п_0} - T(x,t)\right], \quad h = \frac{\dfrac{2\lambda}{\delta_з(t_a)}\beta}{\alpha + \dfrac{2\lambda}{\delta_з(t_a)}}. \qquad (39)$$

В (39) параметр β соответствует (33). Уравнение (39) с учетом краевых условий легко решается двукратным преобразованием Лапласа (по t и x), и в итоге получаем:

$$T(x,t) = \begin{cases} T_{п_0} + \left[T_a\left(t - \dfrac{x}{V}\right) - T_{п_0}\right]\exp\left(-\dfrac{h}{V}x\right), & x \le Vt, \\ T_0 \exp(-ht) + T_{п_0}\left[1 - \exp(-ht)\right], & x > Vt. \end{cases} \qquad (40)$$

Из (40) видно, что скачок температуры в начальный момент времени $t = 0$, т.е. $T_a(0) - T_0$ перемещается вдоль выработки на «фронте» $x = Vt$, одновременно ослабляясь со временем как $\exp(-ht)$. Вне начального участка, т.е. правее «фронта», когда $x > Vt$, влияния $T_a(t)$ на температуру струи нет и она возрастает от T_0 до $T_{п_0}$ (при $t \to \infty$). По (40) и (38) легко находится температура стенки выработки при «тепловом ударе». Параметр $\delta_3(t_a)$ во всех формулах можно считать равным 0,126 м.

4.3.2. Квазистационарные процессы. Так как теперь член $\partial T/\partial t$ в (33) может быть отброшен (для $t > t_a \approx 30$ мин), воспользуемся тем, что формально случаю $\partial T/\partial t \to 0$ соответствует случай $t \to \infty$. Все формулы предыдущего раздела можно использовать, а результат должен получиться из (40) при $t \to \infty$. При этом надо учесть, что случай $x > Vt$ не рассматривается, так как это соответствует $x \to \infty$. Кроме того, поскольку ширина зоны прогрева будет иной, вместо $\delta_3(t_a)$ надо везде использовать $\delta_3(t_{si})$ (t_{si} – моменты «медленного» времени, для которых ищется $T(x,t)$). Переходя в (40) к пределу $t \to \infty$, получаем

$$T(x,t) = T_a(t) + \left(T_{\text{п}_0} - T_a(t)\right)\left[1 - \exp(-hx/V\right]. \tag{41}$$

Это выражение, при согласовании обозначений, совпадает с полученным в [28]решением задачи сопряженного теплопереноса в квазистационарном режиме работы шахтного геотермального теплообменника.

5. Метод функций Грина

Настоящий метод используется для точного (без понижения размерности) решения неодномерных краевых задач реже, чем другие, ранее перечисленные [19,25]. Это связано со сложностями получения выражений для двух- и трехмерных функций Грина, присущими традиционному подходу [19,22,25] и слабой представленностью их в справочной литературе [25,29].

Предлагается метод нахождения неодномерных функций Грина – факторизацией их на одномерные – на основе биобобщенной постановки краевых задач. Поскольку основные составляющие этого метода одинаковы во всех случаях, рассмотрим его на конкретном примере. Пусть есть область Ω горного массива вокруг цилиндрической прямой выработки длиной L с радиусом R_0: $\Omega = \left\{x \in (0,L), r \in (R_0, R_1)\right\}$. Уравнение теплопроводности в массиве имеет вид (4). Рассмотрим (без ограничения общности) первую краевую задачу:

$$T(x,r,t)\big|_{t=0} = \phi(x,r), \quad x,r \in \Omega. \tag{42}$$

$$T(x,r,t)\big|_{x=0} = \nu^{(-)}(r,t), \quad T(x,r,t)\big|_{x=L} = \nu^{(+)}(r,t), \quad r \in (R_0, R_1), \quad t > 0. \tag{43}$$

$$T(x,r,t)\big|_{r=R_0} = \mu^{(-)}(x,t), \; T(x,r,t)\big|_{r=R_1} = \mu^{(+)}(x,t), \quad x \in (0,L), \quad t > 0. \tag{44}$$

Переход от стандартной постановки краевой задачи (4), (42)–(44) к биобобщенной осуществляется введением характеристических функций интервала $t \in (0,\infty)$ и области Ω [30] и биобобщенной функции $\ddot{T}(x,r,t)$:

$$\tilde{T}(x,r,t) = \theta(t)\chi_1(x)\chi_2(r)T(x,r,t), \; \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases} \tag{45}$$

а $\chi_1(x)$ и $\chi_2(r)$ соответственно характеристические функции отрезков $x \in (0, L)$ и $r \in (R_0, R_1)$. Поскольку $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \delta(t)$, а производные от $\chi_1(x)$ и $\chi_2(r)$ в граничных точках дают соответствующие δ-функции, подстановка (45) в (4) с учетом (42)–(44) дает:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = a\nabla^2 \tilde{T} + \tilde{\Psi}(x,r,t) + \tilde{\Phi}(x,r,t) + \tilde{R}(x,r,t)\,,\ t \ge 0,\ x, r \in \bar{\Omega}\,,$$

$$\tilde{\Psi}(x,r,t) = \phi(x,r)\delta(t)\,,\ \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2\,,\ \tilde{R} = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2\,,$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_1(x,r,t) = -a\left[\nu^{(-)}(r,t)\delta'(x) - \nu^{(+)}(r,t)\delta'(x-L)\right], \tag{46}$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \tilde{\Phi}_2(x,r,t) = -a\left[\mu^{(-)}(x,t)\delta'(r-R_0) - \mu^{(+)}(x,t)\delta'(r-R_1)\right].$$

Функции $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ приводить нет необходимости, так как они содержат δ-функции: $\delta(x)$, $\delta(x - L)$, $\delta(r - R_0)$, $\delta(r - R_1)$, что приводит, в силу однородных граничных условий первого рода для функций Грина, к обнулению слагаемых решения $\tilde{T}(x,r,t)$, содержащих $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$.

Бинобобщенная постановка задачи (46) позволяет сразу выписать ее решение:

$$\tilde{T}(x,r,t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{R_0}^{R_1} r'\mathrm{d}r' \int_0^L \mathrm{d}x' \int_0^t \mathrm{d}t' \tilde{G}(x-x', r-r', t-t')\left[\tilde{\Psi}(x',r',t') + \tilde{\Phi}(x',r',t')\right]. \tag{47}$$

Здесь $\tilde{G}(x,r,t)$ – функция Грина задачи (50), удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} - a\nabla^2 \tilde{G} = \frac{\delta(r-r')}{2\pi r'}\delta(x-x')\delta(t) \tag{48}$$

и граничным условиям:

$$\tilde{G}\Big|_{x=L} = \tilde{G}\Big|_{x=0} = \tilde{G}\Big|_{r=R_0} = \tilde{G}\Big|_{r=R_1} = 0\,. \tag{49}$$

Для определения $\tilde{G}(x,r,t)$ применим к (49) преобразование Лапласа по t, что дает:

$$\bar{G}(x,x',r,r',p) = (p - a\nabla^2)^{-1}\left(\frac{\delta(r-r')}{2\pi r'}\delta(x-x')\right). \tag{50}$$

Здесь p – параметр преобразования Лапласа, $\bar{G}$ – лаплас-трансформанта функции Грина. Обратное преобразование Лапласа в (50) приводит к факторизованной на две одномерные двумерной функции Грина:

$$\tilde{G}(x,x',r,r',t) = \theta(t)\exp(at\nabla^2)\left(\frac{\delta(r-r')}{2\pi r'}\delta(x-x')\right) =$$

$$= \left[\theta(t)\exp\left(at\nabla_r^2\right)\left(\frac{\delta(r-r')}{2\pi r'}\right)\right]\left[\theta(t)\exp\left(at\nabla_x^2\right)\delta(x-x')\right] = \tag{51}$$

$$= \tilde{G}_1(r,r',t)\tilde{G}_2(x,x',t), \quad \nabla^2 = \nabla_r^2 + \nabla_x^2.$$

В (51) $\tilde{G}_1(r,r',t)$ и $\tilde{G}_2(x,x',t)$ – одномерные функции Грина соответственно для областей $r \in (R_0, R_1)$ и $x \in (0, L)$ [31]. Для одномерных функций Грина можно использовать литературные данные [29,31], а при необходимости упрощения решения – приближенные их выражения. Последние найдены в [31] в первом приближении, функции Грина во втором приближении приведены в [32].

Выводы

1. Построение и исследование неодномерных моделей процессов переноса в горной теплофизике является актуальной задачей, поскольку такие модели более реалистичны, чем одномерные.
2. Использование двух- и трехмерных моделей необходимо при моделировании аварийных режимов в горных выработках и при решении сопряженных задач теплопереноса.
3. Сформулированы методологические принципы, дающие в совокупности систему оценки возможностей редукции многомерных задач и их приближенного решения.
4. Рассмотрен ряд моделей процессов переноса в проходимых, эксплуатируемых и аварийных выработках, приведены приближенные решения краевых задач.
5. Предложен точный (без понижения размерности) метод решения многомерных краевых задач горной теплофизики, базирующейся на их biобобщенной постановке и определении факторизованных функций Грина.

Автор выражает признательность чл.-корр. НАН Украины, д. т. н., проф. А.Д. Алексееву за поддержку работ в области горной теплофизики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербань А.Н., Кремнев А.А. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт: В 2 т. Т. 1. – Киев: Изд-во АН УССР, 1959. – 430 с.
2. Кузин В.А., Величко А.Е., Хохотва Н.Н. и др. Единая методика прогнозирования температурных условий в угольных шахтах. Макеевка–Донбасс: Изд-во МакНИИ, 1979. – 196 с.
3. Кузин В.А., Пучков М.М., Венгеров И.Р. и др. Методика прогнозирования температурных условий в выработках вентиляционных горизонтов глубоких шахт. Макеевка–Донбасс: Изд-во МакНИИ, 1984. – 61 с.
4. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели). 4. Теплоперенос в горных массивах. – Донецк, 2002. – 101 с. – (Препр. / НАН Украины. ДонФТИ им. А.А. Галкина; 2002–4).
5. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели). 5. Теплоперенос в горных выработках. – Донецк, 2002. – 103 с. – (Препр. / НАН Украины. ДонФТИ им. А.А. Галкина; 2002–5).
6. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели). 6. Процессы переноса при подземных пожарах. – Донецк, 2002. – 88 с. – (Препр. / НАН Украины. ДонФТИ им. А.А. Галкина; 2002–6).

7. Щербань А.Н. Проблемы прогноза теплового режима шахт и подземных сооружений // Проблемы горной теплофизики: Материалы Всесоюзн. научно-техн. конф. – Л.: Изд-во ЛГИ, 1974, – С. 127–132.
8. Дядькин Ю.Д., Щербань А.Н. Горная теплофизика и ее проблемы // Там же. – С. 5–12.
9. Дядькин Ю.Д. Актуальные проблемы горной теплофизики // Записки ЛГИ им. Г.В. Плеханова. – Л.: Изд-во ЛГИ, 1975. – Т. 67, вып. 1. – С. 20–30.
10. Щербань А.Н., Черняк В.П. Состояние тепловых условий и задачи в области горной теплофизики // Теплофизические процессы в подземных сооружениях: Тр. Международного Бюро по горной теплофизике. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 6–22.
11. Медведев Б.И. Тепловые основы вентиляции шахт при нормальных и аварийных режимах проветривания. – Киев–Донецк: Вища школа, 1978. – 156 с.
12. Горб В.Ю., Клейнер А.А., Макаренко В.Л., Семко В.Н. О динамике охлаждения нагретого горного массива // Разработка месторождений полезных ископаемых: Респ. межвед. научно-техн. сб. – Киев: Техніка, 1983. Вып. 65. – С. 98–105.
13. Ониани Ш.И., Николаишвили Н.С. Охлажденная зона горного массива вокруг выработки при постоянной температуре рудничного воздуха // Уголь Украины. – 1976. – № 11. – С.21–23.
14. Ябко И.А. Нестационарное температурное поле вокруг выработки некругового сечения. – М., 1974. – 12. с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1792.
15. Галицын А.С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. – Киев: Наукова думка, 1983. – 236 с.
16. Киреев В.А. Нестационарная теплопроводность анизотропного горного массива, нарушенного подземными сооружениями, Автореф. дис. … канд. техн. наук / ИТТР АН УССР. – Киев, 1986. – 18.с.
17. Черняк В.П., Киреев В.А., Полубинский А.С. Нестационарный тепломассоперенос в разрушаемых массивах горных пород. Киев: Наукова думка, 1992. – 224 с.
18. Ониани Ш.И. Тепловой режим глубоких шахт при гидравлической закладке выработанного пространства и сложном рельефе поверхности. Тбилиси: Мецниереба, 1973. – 308 с.
19. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели). 7. Принципы развития парадигмы. – Донецк, 2002. – 111 с. – (Препр. / НАН Украины. ДонФТИ им. А.А. Галкина; 2002–7).
20. Дульнев Г.Н., Сахова Е.В., Сигалов А.В. Принцип местного влияния в методе поэтапного моделирования // ИФЖ. – 1983. – **45**, № 6. – С. 1002–1008.
21. Прокопов В.Г., Фиалко Н.М., Шеренковский Ю.В. Основные принципы теории локализации // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – с. 98–104.
22. Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер. с англ. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
23. Березовский А.А., Березовский С.А., Цыганкевич Я. Математическая модель процесса самонагревания цилиндрического слоя угля // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – с. 93–98.
24. Фиалко Н.М., Прокопов В.Г., Сариогло В.Г. Особенности математического моделирования температурных режимов печатных узлов в условиях индивидуальной газовой пайки электронных компонентов // Промышленная теплотехника. – 1997. – **19**, № 2–3. – С. 43–46.

25. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
26. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели). 3. Массоперенос в горных выработках. – Донецк, 2002. – 101 с. – (Препр. / НАН Украины. ДонФТИ им. А.А. Галкина; 2002–3).
27. Брайчева Н.А., Добрянский Ю.П., Щербань А.Н. К постановке задач о тепловом режиме теплоносителя, движущегося в горной выработке // Промышленная теплотехника. – 1986. – **8**, № 1. – С. 19–22.
28. Костенко В.К., Венгеров И.Р. Математическая модель эксплуатационного режима шахтного геотермального теплообменника // Изв. Горного ин-та ДонНТУ. – 2007. – Вып. 2. – С. 137–143.
29. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
30. Венгеров И.Р. Хроноартефакты термодинамики. – Донецк: Норд-Пресс, 2005. – 236 с.
31. Венгеров И.Р. Теория линейного переноса в слоистых системах. – Донецк, 1982. – 64. с. – (Препр. / АН УССР. ДонФТИ; 82–77).
32. Венгеров И.Р. Нелинейные модели теплофизики геотехносферы // Физико-технические проблемы горного производства: Сб. науч. тр. – Донецк: ИФГП НАНУ, 2006. – Вып. 9. – С. 121–140.