

## ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

PACSnumbers: 02.30.Jr, 61.72.jd, 61.72.Nn, 66.30.Lw, 83.10.Bb, 83.50.Na, 83.60.Wc

### Возможный механизм образования зародышей каналов гидродинамического пластического течения в кристаллах

В. И. Засимчук, Е. Э. Засимчук, Ю. Г. Гордиенко

*Институт металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины,  
бульв. Акад. Вернадского, 36,  
03680, ГСП, Киев-142, Украина*

В данной работе усовершенствована система уравнений, описывающих процессы зарождения и агломерации точечных дефектов в пластически деформируемых металлах. Несколькими способами показана возможность образования зародышей гидродинамических каналов из агломератов. Показано, что при сверхнизких температурах, даже при небольших нагрузках, возможно появление очень больших концентраций вакансий в металле, что может привести к его разрушению.

У даній роботі вдосконалено систему рівнянь, які описують процеси зародження та агломерації точкових дефектів у пластично деформованих металах. Декількома способами показано можливість утворення зародків гідродинамічних каналів з агломератів. Показано, що при наднизьких температурах, навіть при невеликих навантаженнях, можлива поява дуже великих концентрацій вакансій в металі, що може призвести до його руйнування.

In a given work, the set of equations describing the processes of the origin and agglomeration of point defects in plastically deformed metals is improved. Using several methods, the possibility of nucleation of hydrodynamical channels from agglomerates is shown. As shown, the appearance of very high concentration of vacancies in metal is possible at ultralow temperatures and even under light loads that can leads to the destruction of metal.

**Ключевые слова:** вакансии, агломераты вакансий, скорость генерации вакансий, диффузия, стационарное состояние, устойчивость, гидродинамические каналы, сверхнизкие температуры.

*(Получено 6 мая 2012 г.; окончат. вариант — 27 марта 2014 г.)*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде наших предыдущих работ (см. [1, 2 и др.]) было показано,

что при определенных условиях дислокационный механизм пластической деформации кристаллов сменяется гидродинамическим течением материала по каналам с неупорядоченной (жидкостноподобной) структурой внутри. Процесс обусловлен неустойчивостью, возникающей в процессе деформации дислокационной структуры и самоорганизацией дефектов кристаллического строения, в виде, так называемых, каналов гидродинамического течения, ориентированных вдоль максимальных компонент тензора приложенных напряжений. Впервые синергетическая модель образования зародышей таких каналов была рассмотрена в работе [3]. В основе модели лежит рассмотрение взаимодействия точечных дефектов (вакансий) в процессе механического нагружения кристалла. Настоящая работа является логическим продолжением работы [3] с учетом процессов распада скоплений вакансий. Она посвящена рассмотрению возможности самоорганизации вакансий в виде образования локальных участков с очень высокой плотностью вакансий и их скоплений, которые могут рассматриваться как зародыши каналов гидродинамического течения.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Вывод уравнений и исследование стационарного состояния

Процессы агломерации точечных дефектов в пластически деформируемых металлах будем рассматривать с помощью зацепляющихся уравнений Смолуховского, описывающих агрегационную кинетику [4]. Однако, в отличие от модели работы [3], дополним эту модель учётом вероятности распада скопления (или агломерата) вакансий и зависимости этой вероятности от размера и морфологии (геометрической формы) скопления. Предположим также, что генерация точечных дефектов происходит, в основном, благодаря скольжению винтовых дислокаций со ступеньками, а внешние напряжения достаточно высоки для атермического движения таких дислокаций с генерацией вакансий, но не достаточны для производства междоузельных атомов [5]. Исследовалось влияние процессов агломерации, поэтому захват другими несовершенствами (трещинами, включениями и границами) полагался пренебрежимо малым. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\partial v_1 / \partial t = B - 2B_1 v_1^2 - \sum_{k=2}^{N-1} B_k v_1 v_k + 2C_2 v_2 + \sum_{k=3}^N C_k v_k + D \Delta v_1, \quad (1a)$$

$$\partial v_k / \partial t = B_{k-1} v_1 v_{k-1} - C_k v_k - B_k v_1 v_k + C_{k+1} v_{k+1}, \quad \text{для } 1 < k < N, \quad (1б)$$

$$\partial v_N / \partial t = B_{N-1} v_1 v_{N-1} - C_N v_N, \quad (1в)$$

где  $N$  — число вакансий в скоплении максимального размера,  $v_1$  — концентрация вакансий (в относительных единицах),  $v_k$  — концентрация скоплений, содержащих  $k$  вакансий,  $D$  — коэффициент диффузии вакансий,  $B = \rho a^2 / d$  — скорость генерации вакансий ( $\rho$  — скорость дислокации,  $\rho$  — плотность дислокаций,  $a$  — межатомное расстояние,  $d$  — расстояние между ступеньками на винтовой дислокации) [5],  $B_k = \frac{\pi R_k^2 D}{\gamma a^4} \approx \frac{\pi k^{2\eta} D}{a^2}$  — интенсивность присоединения ва-

кансий к скоплению  $k$  вакансий с размерностью  $\eta$  (например,  $\eta = 1/2$  для планарных, дисковых и произвольных сплошных плоских скоплений,  $\eta = 1/3$  для сферических скоплений,  $1/3 < \eta < 1/2$  для неплотных фрактальных скоплений) и эффективным радиусом

$R_k \sim k^{1/\eta}$ , а  $C_k = \frac{\pi R_k^2 C}{\gamma a^4} \approx \frac{\pi k^{2\eta} C}{a^2}$  — интенсивность отсоединения ва-

кансий от скопления  $k$  вакансий с размерностью  $\eta$  с эффективным радиусом  $R_k$ ,  $C$  — вероятность отсоединения вакансий от скопления вакансий, с аналогичной  $D$ , экспоненциальной зависимостью от отношения энергии активации отсоединения к температуре,  $t$  — время. Следует отметить, что  $C_k = B_k \frac{C}{D}$ , и это соотношение справедли-

во для  $k \gg 1$ , а для малых значений  $k$  оно приблизительно, более же точной является линейная связь  $B_2 \approx 2B_1$ ,  $B_3 \approx 3B_1$  и т.д.

Действительно, уменьшение концентрации вакансий за единицу времени за счёт объединения вакансий и присоединения вакансий к скоплению из  $k$  вакансий с образованием нового скопления пропорционально произведению интенсивности присоединения вакансий к скоплению  $B_k$  и концентраций вакансий и скоплений, т.е. определяется выражением  $B_k v_k$ .

Аналогично, увеличение концентрации вакансий за единицу времени за счёт распада скоплений (отсоединения вакансий от скопления) из  $k$  вакансий пропорционально произведению интенсивности отсоединения вакансий от скопления  $C_k$  и концентраций вакансий и скоплений, т.е. определяется выражением  $C_k v_k$ . Наличие членов с этим выражением в представленной здесь модели позволяет учесть вклад процессов распада скоплений вакансий. Таким образом, в этом выражается расширение синергетической модели из работы [3], в которой учитывалась только необратимая агломерация вакансий в скоплениях.

Отсюда получаем выражение (1а), в котором коэффициент перед членом  $B_1 v_1^2$  полагаем равным 2, поскольку при образовании одной бивакансии исчезают сразу две вакансии. Аналогично и при распа-

де одной бивакансии появляются сразу две новые вакансии, а потому появляется коэффициент 2 перед членом  $C_2 v_2$ . Аналогично получаем уравнение (1б). При выводе уравнения (1в) предполагается, что скопления более чем из  $N$  вакансий не образуются и соответственно, не распадаются. При этом следует учесть, что по имеющимся экспериментальным данным [6–10] в условиях интенсивной пластической деформации могут образовываться стабильные скопления вакансий очень большого размера, вплоть до  $N > 10^4$ . Считаем также, что мобильными по диффузионному механизму являются только вакансии, а остальные скопления малоподвижны [11].

Найдём теперь стационарные состояния системы (1), т.е. состояния, когда

$$\partial v_k / \partial t = 0 \text{ для целых } k, 1 \leq k \leq N. \quad (2)$$

Из (1в) получим:

$$v_N = B_{N-1} v_1 v_{N-1} / C_N. \quad (3)$$

Воспользуемся методом математической индукции [12] и докажем, что для всех целых  $k$  таких, что

$$1 < k \leq N \quad (4)$$

верна формула:

$$v_k = B_{k-1} v_1 v_{k-1} / C_k. \quad (5)$$

Предположим, она верна для  $k = m$ . Подставляем (5) при  $k = m$  в (1б) для  $k = m - 1$ . Получаем

$$v_{m-1} = B_{m-2} v_1 v_{m-2} / C_{m-1}. \quad (6)$$

Утверждение (5) с учётом (4) доказано. Подставляем все (5) в стационарное уравнение, полученное от (1а):

$$B + D \Delta v_1 = 0. \quad (7)$$

Далее используем замену:

$$v_1 = v. \quad (8)$$

Найдём стационарное решение для уравнения (1а) для области в виде длинного цилиндрического образца, ось которого расположена вдоль оси  $OX$ , а концентрация вакансий  $v$  зависит только от одной

координаты  $x$ . Тогда получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -b, \quad (9)$$

где

$$b = \frac{B}{D}. \quad (10)$$

Граничные условия получаем из учёта того факта, что на границах ( $x = \pm L$ ) образца длиной  $L$  все вакансии выходят на поверхность. Следовательно

$$v(L) = v(-L) = 0. \quad (11)$$

Кроме того, концентрация вакансий  $v$  может быть только неотрицательной величиной

$$v(x) \geq 0. \quad (12)$$

Тогда получим:

$$v = -\frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}bL^2. \quad (13)$$

Следовательно, в стационарных условиях концентрация вакансий  $v$  плавно меняется вдоль координаты  $x$  в пределах

$$0 \leq v \leq \frac{1}{2}bL^2, \quad (14)$$

достигая максимального значения  $bL^2/2$  в середине области.

Численные оценки показывают, что данное стационарное распределение может быть достигнуто лишь для нереалистично большого значения максимальной концентрации вакансий  $v \gg 1$ . Таким образом, в реальных условиях оно невозможно и возникает вопрос о поведении нестационарного распределения вакансий и скоплений, например об его устойчивости по отношению к пространственным возмущениям.

## 2.2. Исследование устойчивости однородного распределения точечных дефектов и их скоплений

Рассмотрим систему уравнений (1) для нестационарных состояний. Для начала сведём её путем приближений к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого уравнения (1) для скоплений

$k > 1$  умножим на  $B_k$ , а затем сложим их. В результате система (1) приблизительно сведётся к виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &\approx B - 2B_1 v^2 - vS + \alpha S + D\Delta v, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &\approx 2B_1^2 v^2 + \beta vS - \varepsilon S_c.\end{aligned}\quad (15)$$

В (15) усредненные величины  $S$ ,  $S_c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{m=2}^N B_m v_m, \quad S_c = \sum_{m=2}^N C_m v_m = S \frac{C}{D} = \alpha S, \\ \alpha &= \frac{\sum_{m=2}^N \left( \frac{C_m}{B_m} \right) B_m v_m}{\sum_{m=2}^N B_m v_m} = \left\langle \frac{C_m}{B_m} \right\rangle_S = \frac{C}{D}, \\ \beta &= \frac{\sum_{m=2}^N \left( \frac{\partial B_m}{\partial m} \right) B_m v_m}{\sum_{m=2}^N B_m v_m} = \left\langle \frac{\partial B_m}{\partial m} \right\rangle_S, \\ \varepsilon &= \frac{\sum_{m=2}^N \left( \frac{\partial B_m}{\partial m} \right) C_m v_m}{\sum_{m=2}^N C_m v_m} = \left\langle \frac{\partial B_m}{\partial m} \right\rangle_{S_c} = \frac{C}{D} \frac{\sum_{m=2}^N \left( \frac{\partial B_m}{\partial m} \right) B_m v_m}{\sum_{m=2}^N B_m v_m} = \left\langle \frac{\partial B_m}{\partial m} \right\rangle_S = \beta.\end{aligned}$$

Точность этого приближения определяется условиями усреднения производных (с пренебрежением производными более высокого порядка, чем  $\frac{\partial B_m}{\partial m}$ , что справедливо для очень медленно меняющейся

функции  $B_m$  для  $m \gg 1$ ) и члена  $C_2 v_2 \ll \sum_{k=2}^N C_k v_k$  (точность последнего становится большей с увеличением количества членов суммирования, т.е. наибольшего размера скопления  $N \gg 1$ ).

В итоге получаем систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &\approx B - 2B_1 v^2 - S(v - \alpha) + D\Delta v, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &\approx 2B_1^2 v^2 + \beta S(v - \alpha).\end{aligned}\quad (16)$$

Переменная  $S$  имеет физический смысл интегральной относительной интенсивности поглощения вакансий всеми скоплениями, а знак  $\langle \dots \rangle_S$  обозначает усреднение не по числу скоплений, а по суммарной интенсивности поглощения  $S$ . Аналогично, переменная  $S_c$  имеет физический смысл интегральной относительной интенсивности испускания вакансий всеми скоплениями, а знак  $\langle \dots \rangle_{S_c}$  обозначает усреднение не по числу скоплений, а по суммарной интенсивности испускания  $S_c$ .

Однородное пространственное распределение описывается системой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} &= B - 2B_1 v_0^2 - S_0(v_0 - \alpha), \\ \frac{\partial S_0}{\partial t} &= 2B_1 v_0^2 + \beta S_0(v_0 - \alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

с пространственно однородными решениями  $v_0(t)$  и  $S_0(t)$ , которые могут быть получены лишь численно для скоплений с разной морфологией ( $\eta$ ) (рис. 1). Для расчета использовались следующие численные значения параметров:  $N < 10^4$  [6–10],  $D = 10^{-10} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $u = 10^2 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $\rho = 10^{12} \text{ м}^{-2}$ ,  $a = 4 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ,  $d = 1000a$  [11, 13]. Пространственно однородные решения  $v_0(t, \eta)$  и  $S_0(t, \eta)$  системы (17) для скоплений с разной морфологией ( $\eta$ ) демонстрируют несколько качественно разных режимов: а) режим необратимой агломерации ( $\alpha = 0$ ) вакансий, рассмотренный в [3]; б) переходный режим ( $\alpha = 10^{-4}$ ); в) квазистационарный режим — постоянная плотность вакансий, но стабильный рост скоплений ( $\alpha \leq 10^{-3}$ ).

Количественный анализ устойчивости однородного распределения выполним с помощью стандартной процедуры исследования локальной линейной стабильности. Для этого будем искать решения системы (15) в виде:

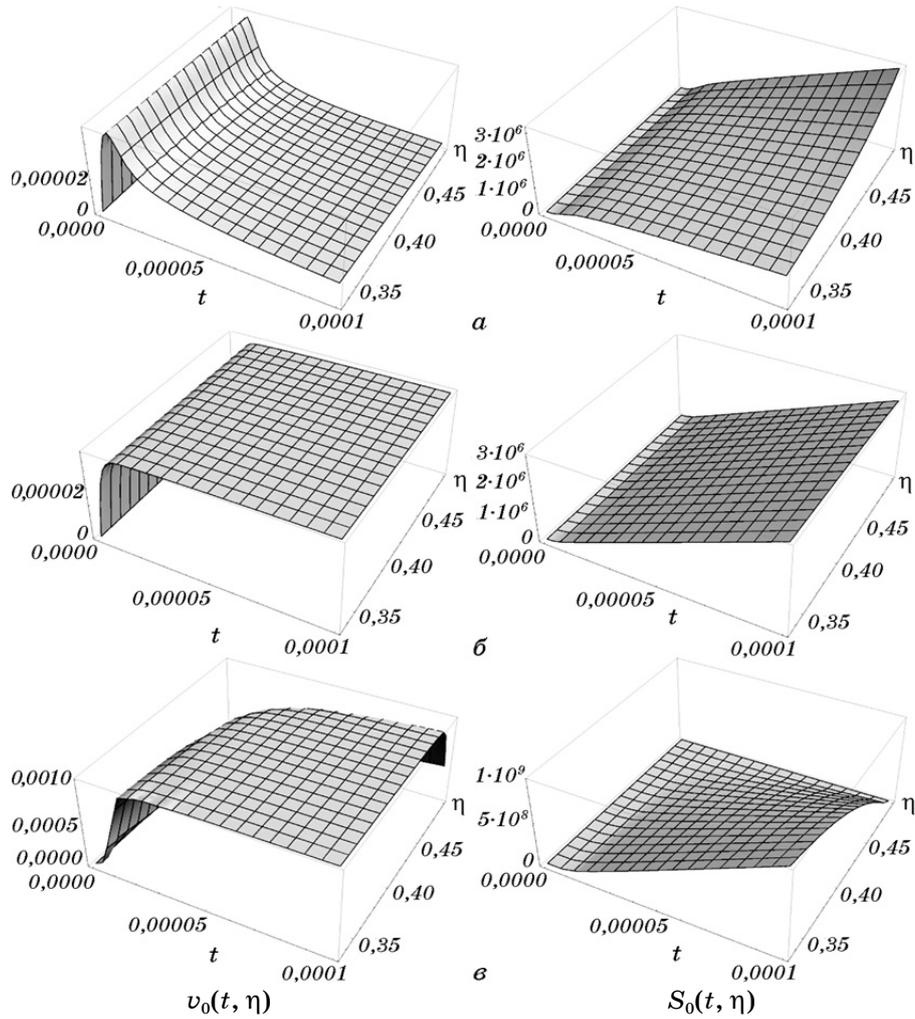
$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_0(t) + \delta v(x, t), \\ S(x, t) &= S_0(t) + \delta S(x, t). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $\delta v$  и  $\delta S$  — это малые возмущения от однородного состояния, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta v &= \rho_v \exp(iqx + \omega t), \\ \delta S &= \rho_S \exp(iqx + \omega t), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\rho_v$  и  $\rho_S$  — некоторые постоянные,  $\omega$  — частота временных возмущений,  $q$  — волновое число пространственных возмущений.

Подстановкой (18) с учётом (19) в (15) получаем систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных  $\rho_v$  и  $\rho_S$



**Рис. 1.** Пространственно однородные решения  $v_0(t, \eta)$  и  $S_0(t, \eta)$  системы (17) для скоплений с разной морфологией ( $\eta$ ): режим необратимой агломерации ( $\alpha = 0$ ) вакансий, рассмотренный в [3] (а); переходный режим ( $\alpha = 10^{-4}$ ) (б); квазистационарный режим — постоянная плотность вакансий, но стабильный рост скоплений ( $\alpha \leq 10^{-3}$ ) (в).

$$\omega \rho_v = -4B_1 v_0 \rho_v - (v_0 \rho_s + S_0 \rho_v - \alpha \rho_s) - Dq^2 \rho_v,$$

$$\omega \rho_s = 2B_1^2 v_0 \rho_v + \beta(v_0 \rho_s + S_0 \rho_v - \alpha \rho_s)$$

или

$$\rho_v (\omega + 4B_1 v_0 + S_0 + Dq^2) + \rho_s (v_0 - \alpha) = 0, \quad (20)$$

$$\rho_v(4B_1^2 v_0 + \beta S_0) + \rho_s(\beta(v_0 - \alpha) - \omega) = 0.$$

Как известно, чтобы такая система имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы её определитель был равен нулю [14]. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно частоты временных возмущений  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 + \omega(Dq^2 + \alpha\beta + S_0 - \beta v_0 + 4B_1 v_0) + \\ + (\alpha - v_0)(Dq^2\beta + 4\beta B_1 v_0 - 4B_1^2 v_0) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Однородное состояние по отношению к малым возмущениям  $\delta v$  и  $\delta S$  будет стабильно для  $\text{Re}(\omega) < 0$  и нестабильно для  $\text{Re}(\omega) > 0$ .

Анализ решений уравнения (21) показывает, что условие нестабильности  $\text{Re}(\omega) > 0$  выполняется в следующих случаях (22)–(24), где  $n$  — это некоторое промежуточное значение ( $1 < n < N$ ) размера скопления, которое характеризует усредненное значение  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha > v_0 \\ \beta < B_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C > Dv_0, \\ 2\eta n^{2\eta-1} < 1, \text{ т.е. для } \eta < 1/2 \text{ и } \lambda > \lambda_c, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \alpha < v_0 \\ \left[ \begin{array}{l} B_1 < \beta \\ B_1 > \beta \end{array} \right] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C < Dv_0, \\ \left[ \begin{array}{l} 2\eta k^{2\eta-1} > 1, \text{ т.е. для } \eta > 1/2 \text{ и } \forall \lambda, \\ 1 > 2\eta k^{2\eta-1}, \text{ т.е. для } \eta < 1/2 \text{ и } \lambda < \lambda_c, \end{array} \right. \end{cases} \quad (23)$$

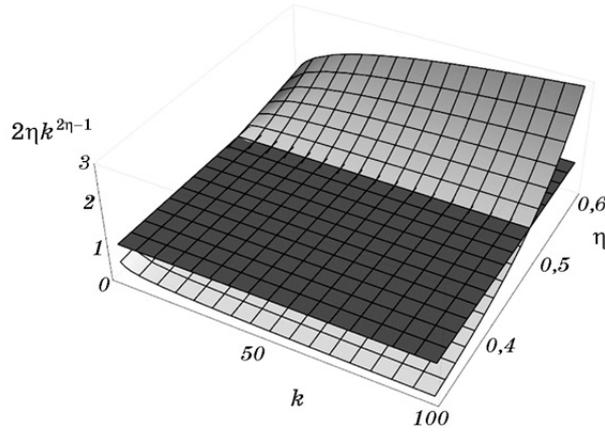
$$\begin{cases} \alpha < v_0 \\ \beta = B_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C < Dv_0, \\ 2\eta k^{2\eta-1} = 1, \text{ т.е. для } \eta = 1/2 \text{ и } \forall \lambda \text{ и } \forall k. \end{cases} \quad (24)$$

Первый случай (22) реализуется на начальном этапе (для малых  $v_0$ , поскольку всегда  $C \ll D$ ) и для плотных скоплений вакансий  $\eta < 1/2$  (например,  $\eta = 1/3$  для сферических скоплений,  $1/3 < \eta < 1/2$  для фрактальных скоплений), причем для пространственных возмущений с длиной волны  $\lambda > \lambda_c$ , где

$$\lambda_c = \frac{a}{\sqrt{v_0 \left( \frac{k^{1-2\eta}}{2\eta} - 1 \right)}} \sim a v_0^{-1/2} k^{(\eta-1/2)}. \quad (25)$$

На рисунке 2 графически показано соотношение  $2\eta k^{2\eta-1}$ , которое играет роль одного из критериев стабильности пространственно однородного решения  $v_0(t)$  и  $S_0(t)$ .

Второй случай (23) реализуется на более позднем этапе (для больших  $v_0$ ). Для неплотных скоплений вакансий  $\eta > 1/2$  (например,  $\eta > 1/2$  для фрактальных скоплений с большей эффективной поверхностью) он реализуется для пространственных возмущений с



**Рис. 2.** Соотношение  $2\eta k^{2\eta-1}$ , один из критериев стабильности пространственно однородного решения  $v_0(t)$  и  $S_0(t)$ . Темным цветом обозначена плоскость для указания условия  $2\eta k^{2\eta-1} = 1$ , которое реализуется для  $\eta \geq 1/2$  для всех  $k$ .

произвольной длиной волны  $\lambda = 2\pi/q$ , а для плотных скоплений вакансий  $\eta < 1/2$  — для пространственных возмущений с длиной волны  $\lambda < \lambda_c$ .

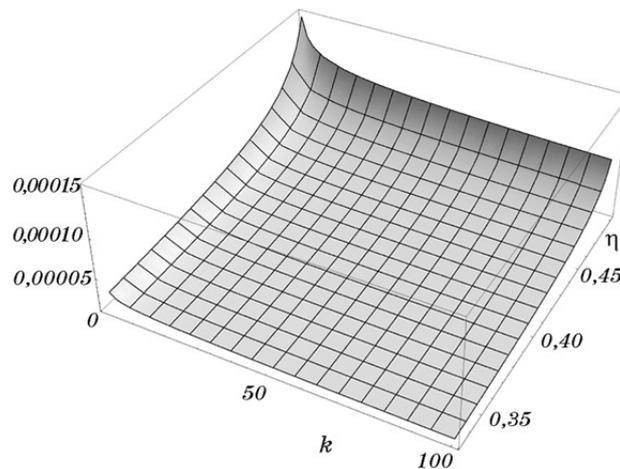
Следует отметить уникальный вариант (24) для  $\eta = 1/2$  (для планарных скоплений в форме диска или любой другой плоской геометрической фигуры), который реализуется на более позднем этапе для пространственных возмущений с произвольной длиной волны  $\lambda = 2\pi/q$ . Дело в том, что для планарных скоплений  $\beta = B_1$ , и квадратное уравнение (21) относительно частоты временных возмущений  $\omega$  принимает вид:

$$\omega^2 + \omega(Dq^2 + \alpha\beta + S_0 + 3\beta v_0) + (\alpha - v_0)Dq^2\beta = 0, \quad (26)$$

а критерий неустойчивости зависит не от размера максимального скопления, а определяется условием  $\alpha < v_0$ , т.е.  $C < Dv_0$ .

Исходя из численных оценок, можно получить, что значение  $\lambda_c \sim av_0^{-1/2} k^{(\eta-1/2)}$  может находиться в широких пределах в зависимости от морфологии скоплений вакансий ( $\eta$ ), их однородной концентрации ( $v_0$ ) и размеров скоплений ( $k$ ). Например, для сферических скоплений вакансий с  $\eta = 1/3$ , однородной концентрацией  $v_0 \approx 10^{-8} - 10^{-10}$  и размерами скоплений  $k < 1 - 10^4$  критическая длина волны пространственного возмущения может находиться в диапазоне  $\lambda_c \sim av_0^{-1/2} k^{-1/6} \sim 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-6}$  м (рис. 3).

Таким образом, неустойчивость однородного состояния системы вакансий и их скоплений может привести к возникновению пространственных структур, например, гидродинамических каналов



**Рис. 3.** Критическая длина волны пространственного возмущения  $\lambda_c \sim \sim av_0^{-1/2} k^{(\eta-1/2)}$  для скоплений вакансий в зависимости от морфологии ( $\eta$ ) и размеров ( $k$ ) скоплений вакансий для однородной концентрации вакансий  $v_0 \cong 10^{-8}$ .

[1, 2] с характерным размером, который может определяться критической длиной волны развитой неустойчивости  $\lambda_c$ .

В зависимости от значений приведенных выше параметров процесса агломерации устойчивое состояние может иметь тип фокуса или узла, а неустойчивое состояние может иметь тип вершины или седла [15]. Однако принятые здесь допущения и приближения не позволяют с достаточной достоверностью и приемлемой точностью сделать заключение об условиях их существования.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из выражений (9), (10) и (13) мы видим, что стационарное распределение концентрации вакансий в образце в стационарном состоянии зависит от а) отношения скорости генерации вакансий  $B$  к коэффициенту диффузии вакансий  $D$ , б) длины образца, в) положения рассматриваемой точки в образце. Однако важно отметить, что стационарное распределение концентрации не зависит от вероятностей перехода вакансий в агломераты и обратно, поскольку стационарное уравнение (7) не содержит явно описания процессов агрегации. Более того, для выбранных значений параметров решение (13) дает нереалистично большое значение максимальной концентрации  $v \gg 1$ . Как показано выше, однородное решение исходной системы в виде (1) не является устойчивым по отношению к пространственным возмущениям, а потому достижимость нереалистичного ста-

ционарного решения (13) является крайне маловероятной.

Пространственно однородное распределение вакансий  $v_0(t, \eta)$  и скоплений (через интегральную способность поглощения вакансий  $S_0(t, \eta)$ ) системы (см. рис. 1) может существовать в трех режимах: а) режим необратимой агломерации ( $\alpha = 0$ ) вакансий, рассмотренный в [3], б) переходный режим ( $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ ), в) квазистационарный режим — постоянная плотность вакансий, но стабильный рост скоплений ( $\alpha \leq 10^{-3}$ ).

Это распределение становится неустойчивым по отношению к малым пространственным возмущениям (19), которые могут развиваться по экспоненциальному закону для возмущений с произвольной или критической длиной волны (22)–(24). Следует отметить, что на начальном этапе агломерации вакансий ( $\alpha > v_0$ ) условие неустойчивости (22) связано с большей вероятностью испускания вакансий скоплениями по сравнению с их поглощением ( $C > Dv_0$ ). Это значит, что на начальном этапе развитие неустойчивости будет определяться способностью скоплений отдавать вакансии с критической длиной волны пространственной неустойчивости  $\lambda > \lambda_c$ . На более позднем этапе ( $\alpha < v_0$ ), наоборот, условие неустойчивости (24) определяется большей вероятностью поглощения вакансий по сравнению с интенсивностью испускания их скоплениями ( $C < Dv_0$ ). Это значит, что на более позднем этапе развитие неустойчивости будет определяться способностью скоплений поглощать вакансии с критической длиной волны пространственной неустойчивости  $\lambda < \lambda_c$ . При этом критическая длина волны пространственного возмущения для возникновения неустойчивости зависит от морфологии скоплений. В случае  $\alpha = 0$  система (16) и условия неустойчивости (22)–(24) соответствуют рассмотренной ранее синергетической модели образования зародышей таких каналов на основе необратимой агрегации вакансий, которая была рассмотрена в работе [3].

Следует отметить, что в условиях большой концентрации вакансий и слабого испускания вакансий скоплениями ( $C < Dv_0$ ) пространственное распределение планарных скоплений ( $\eta = 1/2$ ) является абсолютно неустойчивым по отношению к возмущениям с любой длиной волны. Этот результат может объяснить огромное количество экспериментально наблюдаемых плоских вакансионных комплексов с образованием дислокационных петель, зон локализации дефектов и пластической деформации планарной формы, т.е. в виде полос и плоскостей, которые не соответствуют кристаллографически выгодным плоскостям скольжения дислокаций [5–10, 16–19]. Таким образом, указанная неустойчивость может приводить к образованию пространственно-неоднородных распределений вакансий и их скоплений в виде пор, трещин и гидродинамических каналов пластического течения [1, 2].

Вместе с тем, следует отметить, что предложенная исходная сис-

тема зацепляющихся уравнений (1) является нелинейной и не поддается аналитическому решению даже в упрощенном виде (16) и (17). Аналитические решения удается найти только для некоторых случаев агрегации точечных объектов в скопления, например, для одношаговых процессов агрегации [19–22]. Кроме того, сложность процессов взаимодействия дефектов в процессе пластической деформации не позволяет на данном этапе включить в рассмотрение многие другие факторы, например, условия роста и существования неплотных скоплений вакансий (например, фрактальных скоплений с  $\eta > 1/2$ ), аномально высокую подвижность скоплений крупного размера в некоторых условиях пластической деформации [23] и т.д.

Однако приведенный здесь качественный анализ позволяет определить условия неустойчивости системы вакансий, которые способны образовывать скопления сложной морфологии. Как видно из пространственно однородных решений  $v_0(t, \eta)$  и  $S_0(t, \eta)$  системы (17) для скоплений с разной морфологией, даже при небольших скоростях генерации вакансий, концентрация вакансий  $v_0(t, \eta)$  может достигать огромных величин. В условиях критической неустойчивости по отношению к пространственным возмущениям это может вызывать локализацию дефектов и их скоплений с появлением зон локализации дефектов, пор, трещин и, как результат, разрушение материала.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена система зацепляющихся уравнений Смолуховского с целью получения системы дифференциальных уравнений (1), описывающей процессы агломерации вакансий в скопления в пластически деформируемых металлах. Она является версией системы аналогичных уравнений [3], расширенной за счет учета процессов распада скоплений вакансий. Найдено стационарное решение этой системы относительно концентрации вакансий. Получено рекуррентное соотношение между концентрацией скоплений из  $k$  вакансий и концентрацией скоплений из  $k - 1$  вакансий. Исходная система  $N$ -уравнений (1) сведена к более простой приближенной системе двух уравнений (16) относительно концентрации вакансий и интегральной интенсивности поглощения вакансий скоплениями. Найдено однородное нестационарное решение системы (16).

Система уравнений (16) исследована на устойчивость однородного нестационарного решения по отношению к малым пространственным возмущениям. Отмечено, что в условиях большой концентрации вакансий пространственное распределение планарных скоплений является абсолютно неустойчивым по отношению к воз-

мущениям с любой длиной волны. Этот результат может объяснить огромное количество экспериментально наблюдаемых плоских вакансионных комплексов с образованием дислокационных петель, зон локализации дефектов и пластической деформации планарной формы, т.е. в виде полос и плоскостей.

Показано, что в образце всегда найдутся области, где стационарное состояние будет неустойчивым. Таким образом, показана возможность образования зародышей гидродинамических каналов в кристалле в результате нелинейных процессов агломерации точечных дефектов, которые генерируются в процессе пластической деформации.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. E. Zasimchuk and L. I. Markashova, *Mater. Sci. Eng. A*, **127**: 33 (1990).
2. М. Н. Белякова, Е. Э. Засимчук, Ю. Г. Гордиенко, *Металлофиз. новейшие технол.*, **21**, № 4: 59 (1999).
3. Yu. Gordienko and E. Zasimchuk, *Philos. Mag. A*, **70**, No. 1: 99 (1994).
4. M. von Smoluchowsky, *Phys. Z.*, **17**: 557 (1916).
5. J. Hirth and J. Lote, *Theory of Dislocations* (New York: McGraw-Hill: 1968).
6. M. Kiritani, Y. Satoh, Y. Kizuka, K. Arakawa, Y. Ogasawara, S. Arai, and Y. Shimomura, *Philos. Mag. Lett.*, **79**, No. 10: 797 (1999).
7. X. L. Wu, B. Li, and E. Ma, *Appl. Phys. Lett.*, **91**, No. 14: 141908 (2007).
8. J. Piqueras, J. C. Grosskreutz, and W. Frank, *physica status solidi (a)*, **11**, No. 2: 567 (1972).
9. J. G. Antonopoulos, L. M. Brown, and A. T. Winter, *Philos. Mag.*, **34**, No. 4: 549 (1976).
10. W. Kleinert and W. Schmidt, *physica status solidi (a)*, **60** (1): 69 (1980).
11. A. C. Damask and G. J. Dienes, *Point Defects in Metals* (New York: Gordon and Breach: 1963).
12. А. Шень, *Математическая индукция* (Москва: МЦНМО: 2004).
13. Л. Н. Ларинов, В. И. Исайчев, *Структура и свойства металлов и сплавов. Диффузия в металлах и сплавах: Справочник* (Киев: Наукова думка: 1987).
14. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Москва: Наука: 1978).
15. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах* (Москва: Мир: 1968).
16. Yu. G. Gordienko, R. G. Gontareva, J. S. Schreiber, E. E. Zasimchuk, and I. K. Zasimchuk, *Adv. Eng. Mater.*, **8**, No. 10: 957 (2006).
17. E. E. Zasimchuk, Yu. G. Gordienko, R. G. Gontareva, and I. K. Zasimchuk, *J. Mater. Eng. Perf.*, **12**, No. 10: 69 (2003).
18. Yu. G. Gordienko, E. E. Zasimchuk, and R. G. Gontareva, *J. Mater. Sci. Lett.*, **22**, No. 3: 241 (2003).
19. Y. Gordienko, *Int. J. Mod. Phys. B*, **26**, No. 1: 1250010 (2012).
20. J. Ke and Z. Lin, *Phys. Rev. E*, **66**: 050102(R) (2002).
21. Z. Lin and J. Ke, *Phys. Rev. E*, **67**: 031103 (2003).
22. Z. Lin, J. Ke, and G. Ye, *Commun. Theor. Phys.*, **43**: 837 (2005).

23. Y. Matsukawa and S. J. Zinkle, *Science*, **318**, No. 5852: 959 (2007).

## REFERENCES

1. E. E. Zasimchuk and L. I. Markashova, *Mater. Sci. Eng. A*, **127**: 33 (1990).
2. M. N. Belyakova, E. E. Zasimchuk, and Yu. G. Gordienko, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **21**, No. 4: 59 (1999) (in Russian).
3. Yu. Gordienko and E. Zasimchuk, *Philos. Mag. A*, **70**, No. 1: 99 (1994).
4. M. von Smoluchowsky, *Phys. Z.*, **17**: 557 (1916).
5. J. Hirth and J. Lote, *Theory of Dislocations* (New York: McGraw-Hill: 1968).
6. M. Kiritani, Y. Satoh, Y. Kizuka, K. Arakawa, Y. Ogasawara, S. Arai, and Y. Shimomura, *Philos. Mag. Lett.*, **79**, No. 10: 797 (1999).
7. X. L. Wu, B. Li, and E. Ma, *Appl. Phys. Lett.*, **91**, No. 14: 141908 (2007).
8. J. Piqueras, J. C. Grosskreutz, and W. Frank, *physica status solidi (a)*, **11**, No. 2: 567 (1972).
9. J. G. Antonopoulos, L. M. Brown, and A. T. Winter, *Philos. Mag.*, **34**, No. 4: 549 (1976).
10. W. Kleinert and W. Schmidt, *physica status solidi (a)*, **60**, No. 1: 69 (1980).
11. A. C. Damask and G. J. Dienes, *Point Defects in Metals* (New York: Gordon and Breach: 1963).
12. A. Shen', *Matematicheskaya Induktsiya* (Moscow: MCNMO: 2004) (in Russian).
13. L. N. Larikov and V. I. Isaychev, *Struktura i Svoystva Metallov i Splavov. Diffuziya v Metallakh i Splavakh: Spravochnik* (Kiev: Naukova Dumka: 1987) (in Russian).
14. G. Korn and T. Korn, *Spravochnik po Matematike dlya Nauchnykh Rabotnikov i Inzhenerov* (Mocow: Nauka: 1978) (Russian translation).
15. Ch. Hayashi, *Nelineynye Kolebaniya v Fizicheskikh Sistemakh (Nonlinear Oscillations in Physical Systems)* (Moscow: Mir: 1968) (Russian translation).
16. Yu. G. Gordienko, R. G. Gontareva, J. S. Schreiber, E. E. Zasimchuk, and I. K. Zasimchuk, *Adv. Eng. Mater.*, **8**, No. 10: 957 (2006).
17. E. E. Zasimchuk, Yu. G. Gordienko, R. G. Gontareva, and I. K. Zasimchuk, *J. Mater. Eng. Perf.*, **12**, No. 10: 69 (2003).
18. Yu. G. Gordienko, E. E. Zasimchuk, and R. G. Gontareva, *J. Mater. Sci. Lett.*, **22**, No. 3: 241 (2003).
19. Y. Gordienko, *Int. J. Mod. Phys. B*, **26**, No. 1: 1250010 (2012).
20. J. Ke and Z. Lin, *Phys. Rev. E*, **66**: 050102(R) (2002).
21. Z. Lin and J. Ke, *Phys. Rev. E*, **67**: 031103 (2003).
22. Z. Lin, J. Ke, and G. Ye, *Commun. Theor. Phys.*, **43**: 837 (2005).
23. Y. Matsukawa and S. J. Zinkle, *Science*, **318**, No. 5852: 959 (2007).