

А. В. Бровенко, А. А. Вертий*, Н. П. Мележик, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

**Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева*

2, ул. Мирзояна, Астана, 010000, Республика Казахстан

E-mail: melezhhik@ire.rharkov.ua

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

Предложен численно-аналитический метод решения обратных задач определения профиля относительной диэлектрической проницаемости неоднородного слоя по частотной зависимости коэффициента отражения монохроматической плоской электромагнитной волны. В основе этого метода лежит идея сведения исходной обратной задачи к задаче оптимального управления для уравнения Риккати. Построение решения этой задачи использует численно-аналитический метод решения для прямых задач дифракции монохроматических плоских волн на неоднородном слое и предложенный алгоритм расчета градиента сглаживающего функционала невязки. На основе разработанных алгоритмов решения прямых и обратных задач дифракции волн на неоднородном слое был проведен ряд численных экспериментов, демонстрирующих эффективность предложенного подхода к непрямо определению параметров такого типа структур. Ил. 9. Библиогр.: 19 назв.

Ключевые слова: обратная задача, коэффициент отражения, функционал невязки, метод регуляризации.

В работе рассматриваются некоторые вопросы численного решения обратных задач дифракции монохроматических электромагнитных волн на слоисто-неоднородных средах (электромагнитные свойства таких сред зависят только от одной пространственной координаты). Эти задачи находят широкое применение в таких областях, как дистанционное зондирование и диагностика с помощью электромагнитных волн окружающей среды [1], томография и неразрушающий контроль слоистых структур [2] и т. д.

В математическом отношении обратная задача определения электромагнитных свойств (диэлектрической и магнитной проницаемостей и т. п.) сред сводится к определению коэффициентов системы уравнений Максвелла по известному на некоторой поверхности электромагнитному полю. Когда эти коэффициенты являются функциями только одной пространственной переменной (слоисто-неоднородные среды) для решения соответствующих одномерных обратных задач, был предложен ряд строгих в математическом отношении методов (например [3–8]). Общим недостатком этих методов является то, что входные данные (как правило, это коэффициент отражения или прохождения для неоднородных сред) должны быть известны точно, по крайней мере, на конечном диапазоне частот. Однако для многих приложений эти входные данные получаются в результате экспериментальных измерений на дискретном множестве частот и, следовательно, известны только с определенной погрешностью. Поэтому использование строгих методов для численного решения обратных задач восстановления материальных параметров неоднородных сред по экспериментально измеренным входным данным представляется проблематичным [9].

Альтернативой указанным выше методам могут быть методы, основанные на минимизации функционала невязки между результатом измерений и численного решения прямых задач дифракции [10–13]. Задача минимизации функционала невязки является некорректной [14], и для ее решения необходимо применять методы регуляризации [15]. Кроме того, существует проблема выбора начального приближения, которая не имеет эффективного решения. Использование методов минимизации влечет необходимость многократного решения прямых задач дифракции, что требует высокого быстродействия и устойчивости численных методов решения таких задач.

Все эти проблемы указывают на необходимость разработки эффективных и надежных численных методов решения обратных задач, учитывающих как наличие погрешностей во входных данных, так и отсутствие хорошего начального приближения для методов минимизации функционала невязки.

Целью данной работы является разработка численно-аналитического метода решения обратных задач определения профиля относительной диэлектрической проницаемости неоднородного слоя по частотной зависимости коэффициента отражения монохроматической плоской волны. В основе этого метода лежит идея сведения исходной обратной задачи к задаче оптимального управления для уравнения Риккати. Построение решения этой задачи использует численно-аналитический метод решения для прямых задач дифракции монохроматических плоских волн на слоисто-неоднородных средах [16] и предложенный алгоритм расчета градиента сглаживающего функционала невязки.

1. Постановка задачи дифракции и алгоритм решения. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

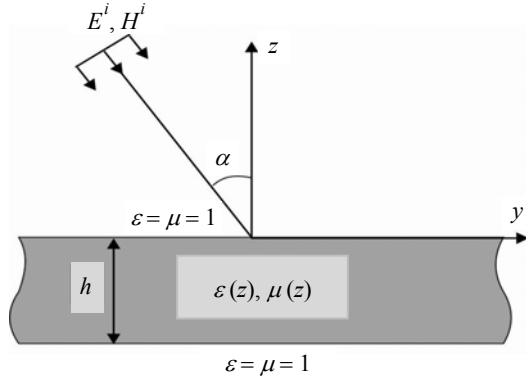


Рис. 1. Геометрия задачи

Рассмотрим слой $D = \{-\infty < x, y < \infty, -h \leq z < 0\}$, заполненный изотропной магнитоэлектрической средой с зависящими только от одной координаты z относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = \mu(z)$. Предполагается, что полупространства $z > 0$ и $z < -h$ заполнены однородной средой с относительными диэлектрическими и магнитными проницаемостями $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$.

Из полупространства $z > 0$ на слой падает монохроматическая плоская волна частоты ω с волновым вектором \vec{k} , лежащим в плоскости y, z

$$\begin{aligned} E_x^i &= E_0 e^{-ik(z \cos \alpha - y \sin \alpha)} e^{-i\omega t}, \\ H_y^i &= -\cos \alpha E_x^i, \\ H_z^i &= -\sin \alpha E_x^i. \end{aligned} \quad (1)$$

где α – угол между \vec{k} и осью z ; $k = \frac{\omega}{c}$, c – скорость света в полупространстве $z > 0$. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ в (1) будем опускать. Задача состоит в определении электромагнитного поля, возникающего в результате дифракции волны (1) на слое D . Из уравнений Максвелла следует, что эта задача сводится к нахождению функции $U(y, z)$, удовлетворяющей везде вне границ слоя $z = 0, z = -h$ уравнению Гельмгольца

$$\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 \bar{\varepsilon}(z) \bar{\mu}(z) U = 0, \quad (2)$$

а на границах слоя – условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} (U^0 + U) \Big|_{z=0+0} &= U_{z=0-0}, \\ \frac{\partial(U^0 + U)}{\partial z} \Big|_{z=0+0} &= \frac{1}{\mu(0)} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0-0}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} U \Big|_{z=-h+0} &= U \Big|_{z=-h-0}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=-h+0} &= \frac{1}{\mu(-h)} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=-h-0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $U^0 = E_0 e^{-ik(z \cos \alpha - y \sin \alpha)}$, а функции $\bar{\varepsilon}(z)$ и $\bar{\mu}(z)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(z) &= \begin{cases} 1, & z > 0, \\ \varepsilon(z), & -h < z < 0, \\ 1, & z < -h, \end{cases} \\ \bar{\mu}(z) &= \begin{cases} 1, & z > 0, \\ \mu(z), & -h < z < 0, \\ 1, & z < -h. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме условий (2)–(4), функция $U(y, z)$ должна удовлетворять условию излучения в полупространствах $z > 0$ и $z < -h$ [17].

Легко установить, что с помощью функции $U(y, z)$ компоненты поля дифракции определяются следующим образом:

$$E_x^\partial = U(y, z), \quad H_y^\partial = \frac{1}{ik\bar{\mu}} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad H_z^\partial = -\frac{1}{ik\bar{\mu}} \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Построение решения задачи (2)–(4) основано на использовании численно-аналитического метода, предложенного в работе [16]. Далее дано краткое изложение этого метода.

В дальнейшем удобно ввести безразмерные переменные $\bar{z} = z/h$, $\bar{y} = y/h$ и частотный параметр $\kappa = kh$, где h – толщина слоя. Тогда, применяя метод разделения переменных к уравнению (2) и учитывая условия излучения в полупространстве $\bar{z} > 0$ и $\bar{z} < -1$, получим следующее представление для функции $U = U(\bar{y}, \bar{z})$:

$$U = \begin{cases} \bar{R} e^{i\kappa(\bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha)}, & \bar{z} > 0, \\ e^{i\kappa \bar{y} \sin \alpha} (A_+ u_+(\bar{z}) + A_- u_-(\bar{z})), & -1 < \bar{z} < 0, \\ \bar{T} e^{i\kappa(\bar{y} \sin \alpha - (\bar{z}+1) \cos \alpha)}, & \bar{z} < -1. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь R, A_\pm, T – неизвестные величины, а функции $u_\pm(\bar{z})$ являются линейно независимыми решениями обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{du_\pm}{d\bar{z}} \right) + \kappa^2 (\varepsilon(\bar{z}) \mu(\bar{z}) - \sin^2 \alpha) u_\pm = 0. \quad (7)$$

Пусть $u_\pm(\bar{z})$ – решения уравнения (7), удовлетворяющие при $\bar{z} = -1$ условиям:

$$u_\pm(-1) = 1, \quad \frac{du_\pm(-1)}{d\bar{z}} = \pm iq, \quad (8)$$

где $q = \mu(-1) \kappa \cos \alpha$. Очевидно, что если $q \neq 0$, то $u_\pm(\bar{z})$ – линейно независимые функции. Тогда, подставляя (6) в условия сопряжения (4), получаем $A_+ = 0$, $A_- = \bar{T}$. (9)

Следовательно, функция $U(\bar{y}, \bar{z})$ внутри слоя D имеет вид

$$U(\bar{y}, \bar{z}) = e^{i\kappa\bar{y} \sin \alpha} \bar{T} u_-(\bar{z}). \quad (10)$$

Для определения величин \bar{R} и \bar{T} достаточно воспользоваться условиями сопряжения (3) на верхней границе слоя $\bar{z} = 0$. Тогда будем иметь:

$$\bar{R} = E_0 \frac{i\kappa\mu(0) \cos \alpha u_-(0) + \frac{dU_-(0)}{d\bar{z}}}{i\kappa\mu(0) \cos \alpha u_-(0) - \frac{dU_-(0)}{d\bar{z}}}; \quad (11)$$

$$\bar{T} = -E_0 \frac{2i\kappa\mu(0) \cos \alpha}{i\kappa\mu(0) \cos \alpha u_-(0) - \frac{dU_-(0)}{d\bar{z}}}. \quad (12)$$

Таким образом, решение задачи (2)–(4) определяется по формулам (6), (10) и (11), (12). Величины \bar{R}/E_0 и \bar{T}/E_0 являются коэффициентами отражения и прохождения, нормированными на амплитуду возбуждающей плоской электромагнитной волны (1). Как следует из (11) и (12), коэффициенты отражения и прохождения выражаются через решения $u_-(z)$ уравнения (7). В работе [16] был предложен эффективный численно-аналитический алгоритм построения решения такого типа уравнений. Следуя этой работе, изложим результаты, лежащие в основе построения этого алгоритма.

Будем предполагать, что функция $\varepsilon(\bar{z})$ является кусочно-непрерывной, а функция $\mu(\bar{z})$ – дифференцируемой и $\mu(\bar{z}) \neq 0$ при $-1 \leq \bar{z} \leq 0$. Требуется построить решение задачи

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{\mu(\bar{z})} \frac{du}{d\bar{z}} \right) + \kappa^2 \left(\varepsilon(\bar{z}) - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu(\bar{z})} \right) u(\bar{z}) = 0; \quad (13)$$

$$u(-1) = 1, \quad \frac{du(-1)}{d\bar{z}} = -iq, \quad p \neq 0, \quad (14)$$

где $q(\bar{z}) = \kappa\mu(-1) \cos \alpha$.

Ключевым моментом [16] является сведение этой задачи к задаче Коши для уравнения Риккати. С этой целью введем новую неизвестную функцию $V(\bar{z})$ по формуле:

$$u(\bar{z}) = \exp \left(\int_{-1}^{\bar{z}} \mu(t) V(t) dt \right), \quad (15)$$

$$V(\bar{z}) = \frac{1}{\mu(\bar{z})u(\bar{z})} \frac{du}{d\bar{z}}.$$

Тогда из (13), (14) получаем

$$\frac{dV(\bar{z})}{d\bar{z}} + \mu(\bar{z})V^2(\bar{z}) + \kappa^2 p(\bar{z}) = 0, \quad (16)$$

$$V(-1) = -iq,$$

где

$$p(\bar{z}) = \varepsilon(\bar{z}) - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu(\bar{z})}. \quad (17)$$

Итак, задача (13), (14) эквивалентна задаче Коши для уравнения Риккати (16).

Приближенное решение этой задачи Коши можно получить с помощью следующего алгоритма. Аппроксимируем интервал $-1 < \bar{z} < 0$ конечным числом точек $\bar{z}_n = -1 + \delta_N(n-1)$,

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad \delta_N = \frac{1}{N-1}, \quad N - \text{натуральное число.}$$

Пусть искомая функция $V(\bar{z})$ принимает в этих точках значения $V_n = V(\bar{z}_n)$. Требуется определить $(V_n)_{n=1}^N$. Для этого проинтегрируем уравнение (16) в пределах от \bar{z}_n до \bar{z}_{n+1} . Тогда получим

$$V_{n+1} - V_n + \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_{n+1}} \mu(\bar{z})V^2(\bar{z})d\bar{z} + \kappa^2 \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_{n+1}} p(\bar{z})d\bar{z} = 0, \quad (18)$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Предполагая, что N является достаточно большим числом, аппроксимируем интегралы в (18) двухточечной формулой трапеции, таким образом, имеем

$$V_{n+1} - V_n + \frac{\delta_N}{2} (\mu_{n+1}V_{n+1}^2 + \mu_nV_n^2) + \kappa^2 \frac{\delta_N}{2} (p_{n+1} + p_n) = 0, \quad (19)$$

где $\mu_n = \mu(\bar{z}_n)$; $p_n = p(\bar{z}_n)$; $n = 1, 2, \dots, N$.

Следуя [16], из (19) получаем

$$V_{n+1} = \frac{2F_n}{1 + \sqrt{1 + 2\delta_N F_n}}. \quad (20)$$

Здесь

$$F_n = V_n - \frac{\delta_N \mu_n}{2} V_n^2 - \frac{\kappa^2 \delta_N}{2} (p_{n+1} + p_n). \quad (21)$$

Рекуррентная формула (20) позволяет последовательно вычислять значения V_n , если известно значение $V_1 = V(-1) = -iq$. Можно показать, что погрешность формулы (20) будет величиной порядка δ_N^2 . Таким образом, формула (20) дает явное вычислительное правило расчета приближенных значений $(V_n)_{n=1}^N$ решения задачи Коши на заданной сетке $(\bar{z}_n)_{n=1}^N$, аппроксимирующей интервал $-1 < \bar{z} < 0$.

Представим формулы (11), (12) для коэффициентов отражения и прохождения с помощью функции $V(\bar{z})$. Используя (15), получаем

$$\bar{R}/E_0 = \frac{i\kappa \cos \alpha + V(0)}{i\kappa \cos \alpha - V(0)}, \quad (22)$$

$$\bar{T}/E_0 = \frac{2i\kappa \cos \alpha}{i\kappa \cos \alpha - V(0)} \exp \left(- \int_{-1}^0 \mu(\bar{z})V(\bar{z})d\bar{z} \right). \quad (23)$$

Из (20) следует, что $V(0) \approx V_N$, а экспоненциальный множитель в (23) можно вычислить по рекуррентной формуле

$$B_1 = 1, B_{n+1} = B_n \exp\left(-\frac{\delta_N}{2}(\mu_n V_n + \mu_{n+1} V_{n+1})\right),$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (24)$$

$$\exp\left(-\int_{-1}^0 \mu(\bar{z})V(\bar{z})d\bar{z}\right) \approx B_N.$$

Как будет показано далее, алгоритм решения задачи дифракции, основанный на формуле (20), является одним из базовых элементов при построении решения обратных задач дифракции – восстановления материальных параметров среды слоя по значениям коэффициента отражения (прохождения), заданного на конечном множестве частот возбуждающей плоской волны.

2. Обратная задача дифракции и алгоритм решения. При рассмотрении задачи дифракции (2)–(4) предполагалось, что материальные параметры $\varepsilon(z)$, $\mu(z)$ среды, заполняющей слой, являются известными функциями координаты z . Результатом решения такой задачи выступает дифракционное поле (коэффициенты отражения и прохождения). Обратная задача – определение материальных параметров среды, в математическом отношении, сводится к определению коэффициентов уравнения (2) по известному на некоторой поверхности дифракционному полю, которое, как следует из (6) и (22), (23), полностью определяется, если известны амплитуда возбуждающей волны (1) и частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения. В свою очередь коэффициенты отражения и прохождения выражаются, согласно (22), (23), через решение задачи Коши для уравнения Риккати (16), (17).

На основании вышеизложенного можно сформулировать следующую обратную задачу дифракции. Пусть известны: h – толщина слоя D , амплитуда возбуждающей волны (1), частотная и угловая зависимость нормированного на амплитуду возбуждающей волны коэффициента отражения (прохождения) $R(\kappa, \alpha)$ ($T(\kappa, \alpha)$), $\kappa = kh$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Требуется определить материальные параметры $\varepsilon(z)$, $\mu(z)$ среды, заполняющей слой D .

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что относительная магнитная проницаемость среды $\mu(z) = 1$, а угол падения возбуждающей волны $\alpha = 0$ (нормальное падение). Обобщение на случай $\mu(z) \neq 1$ и $\alpha \neq 0$ не встречает принципиальных трудностей. Построение решения обратной задачи в этом случае, хотя и содержит некоторые особенности, тем не менее,

может быть получено по аналогичной схеме, как и в случае $\mu(z) = 1$, $\alpha = 0$.

Итак, обратная задача состоит в следующем. Требуется определить функцию $\varepsilon(\bar{z})$ на интервале $-1 \leq \bar{z} \leq 0$ по известной частотной зависимости коэффициента отражения $R(\kappa)$, $0 < \kappa \leq \infty$. При этом функции $\varepsilon(\bar{z})$ и $V(\bar{z})$ внутри интервала $-1 < \bar{z} < 0$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{dV(\bar{z})}{d\bar{z}} + V^2(\bar{z}) + \kappa^2 \varepsilon(\bar{z}) = 0 \quad (25)$$

и на концах интервала условиям:

$$V(-1) = -i\kappa; \quad (26)$$

$$V(0) = i\kappa \frac{R(\kappa) - 1}{R(\kappa) + 1}. \quad (27)$$

Используя результаты, полученные в работе [7], можно показать, что функция $\varepsilon(z)$ однозначно восстанавливается по $R(\kappa)$ при $0 < \kappa \leq \infty$. Однако с практической точки зрения коэффициент отражения, как правило, известен на конечном множестве частот. Это обстоятельство сильно затрудняет использование известных традиционных методов решения одномерных обратных задач дифракции [3–7].

В этой связи переформулируем постановку задачи (25)–(27) как задачу оптимального управления, для чего введем целевую функцию Φ следующим образом. Пусть коэффициент отражения $R(\kappa)$ известен на конечном множестве значений частотного параметра κ_m , $m = 1, \dots, P$, $R_m = R(\kappa_m)$. Введем вместо $V(\bar{z})$ функцию $W(\bar{z}) = V(\bar{z})/i\kappa$. Тогда функция $W(\bar{z})$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dW(\bar{z})}{d\bar{z}} + i\kappa W^2(\bar{z}) - i\kappa \varepsilon(\bar{z}) = 0 \quad (28)$$

и условию

$$W(-1) = -1. \quad (29)$$

По заданным значениям R_m с помощью (27)

определяем $\bar{W}_m = \frac{R_m - 1}{R_m + 1}$. Пусть $W_m = W(0, \kappa_m)$ –

решение задачи Коши (28), (29) для некоторой функции $\varepsilon(\bar{z})$. Тогда в качестве целевой функции Φ , зависящей от $\varepsilon(\bar{z})$ и частотного параметра κ_m , будем рассматривать функционал

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{P} \sum_{m=1}^P |W_m - \bar{W}_m|^2. \quad (30)$$

Задача оптимального управления состоит в нахождении функции $\varepsilon(\bar{z})$ (оптимальное управление) из определенного множества, при

котором функционал (30) достигает минимального значения на решении задачи (28), (29). В качестве множества, которому должна принадлежать функция $\varepsilon(\bar{z})$, можно выбрать множество функций в виде

$$\varepsilon(\bar{z}) = \sum_{n=1}^Q a_n \psi_n(\bar{z}), \quad (31)$$

где $\{\psi_n(\bar{z})\}_{n=1}^Q$ – линейно независимая система функций на интервале $-1 \leq \bar{z} \leq 0$, например $\psi_n(\bar{z}) = \bar{z}^n$. В этом случае целевая функция является функцией от коэффициентов $(a_n)_{n=1}^Q$ и задача сводится к нахождению минимума (глобального минимума) функции, в общем случае, нескольких комплексных переменных.

Таким образом, исходная задача сведена к задаче минимизации целевой функции (30). Алгоритм минимизации предполагает решение двух основных проблем. Во-первых, это проблема устойчивости, связанная с тем, что исходные данные (значения коэффициента отражения), как правило, задаются с определенной погрешностью. Эта проблема решается на основе использования вместо целевой функции (30) сглаживающего функционала

$$\Phi_\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^P |W_n - \bar{W}_n|^2 + \alpha \Omega(\varepsilon), \quad (32)$$

состоящего из целевой функции, стабилизирующего функционала и параметра регуляризации $\alpha > 0$. В настоящее время имеется большое разнообразие устойчивых методов минимизации функционалов и выбора стабилизирующих функционалов [14]. В качестве стабилизирующего функционала будем рассматривать

$$\Omega(\varepsilon) = \int_{-1}^0 \varepsilon \varepsilon^* d\bar{z}, \quad (33)$$

где $*$ – обозначает операцию комплексного сопряжения.

Для осуществления процесса минимизации будем использовать метод сопряженных градиентов [18]. Этот метод предполагает возможность эффективного вычисления как целевой функции, так и ее градиента для различных значений коэффициентов $(a_n)_{n=1}^Q$, с помощью которых диэлектрическая проницаемость определяется по формуле (31).

Выше был представлен численный алгоритм для построения решения задачи Коши (28), (29), который позволяет эффективно рассчитывать целевую функцию. Аналогичный алгоритм имеет место и для расчета градиента целевой функции. Как будет показано далее, этот алго-

ритм основан на построении решений задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Вторая не менее важная проблема – это выбор начального приближения для алгоритма минимизации сглаживающего функционала. В общем случае эта проблема не имеет эффективного численного решения. Однако в случае малых значений частотного параметра $\kappa = \omega h / c$ она может быть сведена к решению линейной системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов $(a_n)_{n=1}^Q$.

Ниже представлены результаты по решению этих проблем.

Рассмотрим следующий алгоритм вычисления градиента сглаживающего функционала (32). Как следует из (31), (28) и (29), сглаживающий функционал зависит от коэффициентов $(a_n)_{n=1}^Q$, задающих пробное значение диэлектрической проницаемости. Будем предполагать, что функции, образующие линейно-независимую систему $\{\psi_n(\bar{z})\}_{n=1}^Q$, являются вещественнозначными функциями. При этом коэффициенты $(a_n)_{n=1}^Q$ могут быть и комплексными числами. Поэтому разложение диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\bar{z})$ по функциям $\psi_n(\bar{z})$ будем представлять в виде

$$\varepsilon(\bar{z}) = \sum_{n=1}^Q a_n^R \psi_n(\bar{z}) + i \sum_{n=1}^Q a_n^I \psi_n(\bar{z}), \quad (34)$$

где a_n^R и a_n^I – реальная и мнимая части комплексного числа a_n .

Следовательно, сглаживающий функционал (32) является функцией от переменных a_n^R и a_n^I , $n = 1, \dots, Q$. Наша цель состоит в разработке алгоритма вычисления частных производных $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial a_n^R}$ и $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial a_n^I}$, $n = 1, \dots, Q$.

Из (32) имеем

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial a_q^R} = \frac{2}{P} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^P \frac{\partial W_n}{\partial a_q^R} (W_n^* - \bar{W}_n^*) \right) + 2\alpha \sum_{n=1}^Q a_n^R a_{nq} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial a_q^I} = \frac{2}{P} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^P \frac{\partial W_n}{\partial a_q^I} (W_n^* - \bar{W}_n^*) \right) + 2\alpha \sum_{n=1}^Q a_n^I a_{nq} \quad (36)$$

Здесь

$$a_{np} = \int_{-1}^0 \psi_n(\bar{z}) \psi_p(\bar{z}) d\bar{z}. \quad (37)$$

Как следует из (35) и (36), для расчета градиента целевой функции достаточно вычислить производные $\frac{\partial W_n}{\partial a_q^R}$ и $\frac{\partial W_n}{\partial a_q^I}$ при $\kappa = \kappa_n$ и $\bar{z} = 0$ для решения $W_n(\bar{z})$ задачи Коши (28), (29). Легко показать, что $\frac{\partial W_n}{\partial a_q^I} = i \frac{\partial W_n}{\partial a_q^R}$, поэтому достаточно определить $\frac{\partial W_n}{\partial a_q^R}$. Из (28), (29) получаем

$$\frac{\partial u_n^q}{\partial \bar{z}} + 2i\kappa_n W_n u_n^q - i\kappa_n \psi_q(\bar{z}) = 0; \quad (38)$$

$$u_n^q(-1) = 0, \quad (39)$$

$$\text{где } u_n^q(\bar{z}) = \frac{\partial W_n(\bar{z})}{\partial a_q^R}.$$

Таким образом, для нахождения $\frac{\partial W_n(0)}{\partial a_q^R} = u_n^q(0)$ следует решить задачу Коши (38), (39).

Приближенное решение этой задачи можно осуществить по такой же схеме, как и для задачи Коши (16), (17). Дискретизируем интервал $\bar{z}_n = -1 + \delta_N(n-1)$, $n = 1, 2, \dots, N$, $\delta_N = \frac{1}{N-1}$ – шаг дискретизации. Проинтегрируем уравнение (38) в пределах от \bar{z}_m до \bar{z}_{m+1} . Тогда будем иметь

$$u_{n\ m+1}^q - u_{n\ m}^q + 2i\kappa_n \int_{\bar{z}_m}^{\bar{z}_{m+1}} W_n u_n^q d\bar{z} - i\kappa_n \psi_{qm} = 0. \quad (40)$$

$$\text{Здесь } u_{n\ m}^q = u_n^q(\bar{z}_m); \quad \psi_{qm} = \int_{\bar{z}_m}^{\bar{z}_{m+1}} \psi_q(\bar{z}) d\bar{z}.$$

Аппроксимируя интегралы в (40) по квадратурной формуле трапеции, получаем следующую рекуррентную формулу для расчета $u_{n\ m}^q$:

$$u_{n\ m+1}^q = u_{n\ m}^q \frac{1 - i\kappa_n \delta_N W_{nm}}{1 + i\kappa_n \delta_N W_{nm+1}} + \frac{i\kappa_n \delta_N \psi_{qm}}{1 + i\kappa_n \delta_N W_{nm+1}}, \quad (41)$$

$$m = 1, \dots, N,$$

где $W_{nm} = W_n(\bar{z}_m)$; $u_{n\ 1}^q = u_n^q(-1) = 0$.

Из (41) имеем

$$u_n^q(0) = \frac{\partial W_n(0)}{\partial a_q^R} \cong u_{n\ N}^q. \quad (42)$$

Можно показать, что погрешность формулы (42) имеет порядок δ_N^2 . Следовательно, ал-

горитм расчета сглаживающего функционала и его градиента имеют одинаковую погрешность (см. формулы (20), (21)).

Как следует из (41), для вычисления градиента сглаживающего функционала достаточно определить значение $W_{nm} = W_n(\bar{z}_m)$ решения задачи Коши (28), (29).

Рассмотрим теперь проблему выбора начального приближения для алгоритма минимизации. Покажем, что при достаточно малых значениях частотного параметра κ она сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений, матричные коэффициенты которой выражаются через исходные данные (коэффициент отражения) обратной задачи.

Предположим, что для малых значений $\kappa < 1$ решение задачи Коши (28), (29) можно представить в виде ряда по степеням κ^n , а именно

$$W(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\bar{z}) \kappa^n. \quad (43)$$

Для определения коэффициентов $c_n(\bar{z})$ подставим (43) в уравнение (28) и условие (29). После ряда преобразований получим следующие рекуррентные формулы для коэффициентов $c_n(\bar{z})$:

$$c_0(\bar{z}) = -1, \quad c_1(\bar{z}) = -i(\bar{z} + 1) + i \sum_{q=0}^Q a_q \int_{-1}^{\bar{z}} \psi_q(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (44)$$

$$c_n(\bar{z}) = -i \sum_{q=0}^{n-1} \int_{-1}^{\bar{z}} c_q(\bar{z}) c_{n-1-q}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad n = 2, \dots$$

Далее, будем предполагать, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\bar{z})$ является вещественнозначной функцией, а в качестве линейно независимых функций $\psi_n(\bar{z})$ выберем $\psi_n(\bar{z}) = (\bar{z} + 1)^n$, $n = 0, 1, \dots$. Эти ограничения не имеют принципиального характера, но позволяют несколько упростить дальнейшие преобразования. В частности, интеграл в (44) может быть вычислен в явной форме

$$\int_{-1}^{\bar{z}} \psi_q(\bar{z}) d\bar{z} = \frac{(\bar{z} + 1)^{q+1}}{q+1}.$$

Докажем, что при достаточно малых значениях частотного параметра $\kappa \ll 1$ функционал (30) является непрерывно дифференцируемой выпуклой функцией на пространстве R^{Q+1} . Для этого следует доказать, что функции $|W_m - \bar{W}_m|^2$, $m = 1, 2, \dots, P$ обладают этим свойством. Напомним, что $W_m = W(0, \kappa_m)$ – решение задачи Коши (28), (29)

при $\kappa = \kappa_m$ и $\varepsilon(z) = \sum_{n=1}^Q a_n (\bar{z} + 1)^n$. Ограничиваясь

четырьмя членами ряда (43) (условие малости на частотный параметр κ) и используя рекуррентную формулу (44), будем иметь

$$W_m = -1 + i\bar{c}_1\kappa_m + \bar{c}_2\kappa_m^2 + i\bar{c}_3\kappa_m^3 + O(\kappa_m^4). \quad (45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \sum_{q=0}^Q \frac{a_q - \delta_{0q}}{q+1}; \quad \bar{c}_2 = -2 \sum_{q=0}^Q \frac{a_q - \delta_{0q}}{(q+1)(q+2)}; \\ \bar{c}_3 &= -4 \sum_{q=0}^Q \frac{a_q - \delta_{0q}}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \\ &+ \sum_{q=0}^Q \frac{(a_q - \delta_{0q})^2}{(q+1)^2(2q+3)} + \\ &+ 2 \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{a_q - \delta_{0q}}{(q+1)} \sum_{p=q+1}^Q \frac{a_p}{(p+1)(p+q+3)}; \end{aligned} \quad (46)$$

δ_{0q} – символ Кронекера.

Теперь представим функцию $|W_m - \bar{W}_m|^2$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} |W_m - \bar{W}_m|^2 &= f_1^2(a_0, a_1, \dots, a_Q) + \\ &+ f_2^2(a_0, a_1, \dots, a_Q); \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} f_1(a_0, a_1, \dots, a_Q) &= -1 + \bar{c}_2\kappa_m^2 - \bar{W}_m'; \\ f_2(a_0, a_1, \dots, a_Q) &= \bar{c}_1\kappa_m + \bar{c}_3\kappa_m^3 - \bar{W}_m''; \end{aligned} \quad (48)$$

где $\bar{W}_m' = \text{Re}(\bar{W}_m)$; $\bar{W}_m'' = \text{Im}(\bar{W}_m)$.

Тогда для выпуклости этой функции достаточно установить, что этим свойством обладают функции (48). Как следует из (46), функции $f_1(a_0, a_1, \dots, a_Q)$ и $f_2(a_0, a_1, \dots, a_Q)$ являются бесконечно дифференцируемыми по переменным a_0, a_1, \dots, a_Q , поэтому для выпуклости этих функций следует доказать, что квадратичные формы [18]

$$\sum_{p,q=0}^Q \frac{\partial^2 f_n(a_0, a_1, \dots, a_Q)}{\partial a_p \partial a_q} \eta_p \eta_q, \quad n = 1, 2, \quad (49)$$

являются неотрицательными на R^{Q+1} для всех значений a_0, a_1, \dots, a_Q .

Из (48) с учетом (46) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_p \partial a_q} &= 0, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_p \partial a_q} &= \frac{2\kappa_m^3}{(p+1)(q+1)(p+q+3)}, \end{aligned} \quad (50)$$

$p, q = 0, 1, \dots, Q$.

Следовательно, функция $f_1(a_0, a_1, \dots, a_Q)$ является выпуклой, а выпуклость функции

$f_2(a_0, a_1, \dots, a_Q)$ вытекает из неотрицательности главных миноров матрицы $\left(\frac{2\kappa_m^3}{(p+1)(q+1)(p+q+3)} \right)_{p,q=0}^Q$. Таким образом,

функции $|W_m - \bar{W}_m|^2$, $m = 1, 2, \dots, P$ являются выпуклыми. Поэтому функционал $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_Q) = \frac{1}{P} \sum_{m=1}^P |W_m - \bar{W}_m|^2$ также является выпуклой функцией переменных a_0, a_1, \dots, a_Q . Этот функционал с помощью (48) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(a_0, a_1, \dots, a_Q) &= A + \sum_{q=0}^Q \frac{a_q - \delta_{0q}}{q+1} A_q + \\ &+ \sum_{q=0}^Q \frac{(a_q - \delta_{0q})^2}{(q+1)^2} B_q + \\ &+ \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{a_q - \delta_{0q}}{q+1} \sum_{p=q+1}^Q \frac{a_p}{(p+1)} D_{qp}, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sum_{m=1}^P |\bar{W}_m + 1|^2; \\ A_q &= 2 \sum_{m=1}^P \left(\frac{2\kappa_m^2(1 + \bar{W}_m')}{q+2} - \kappa_m \bar{W}_m'' \left(1 - \frac{\kappa_m^2}{(q+2)(q+3)} \right) \right); \\ B_q &= \sum_{m=1}^P \kappa_m^2 \left(1 - \frac{2\kappa_m \bar{W}_m''}{2q+3} \right); \\ D_{qp} &= 2 \sum_{m=1}^P \kappa_m^2 \left(1 + \frac{2\kappa_m \bar{W}_m''}{p+q+3} \right); \\ \bar{W}_m' &= \text{Re} \left(\frac{R_m - 1}{R_m + 1} \right), \quad \bar{W}_m'' = \text{Im} \left(\frac{R_m - 1}{R_m + 1} \right). \end{aligned}$$

Согласно [18], стационарные точки этого функционала совпадают с точками глобального минимума, поэтому определяя градиент функционала (51) и приравнявая его нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $(a_p)_{p=0}^Q$. Решение этой системы уравнений совпадает со стационарной точкой функционала (51), а следовательно, и с точкой глобального минимума. Эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\sum_{q=0}^Q A_{pq} a_q = b_p, \quad p = 0, 1, \dots, Q. \quad (52)$$

Здесь

$$b_p = \frac{1}{p+1} \left[\sum_{m=1}^P \bar{W}_m'' \kappa_m \left(\frac{2\kappa_m^2(p+4)}{(p+2)(p+3)} - 1 \right) \right] + \frac{1}{p+1} \sum_{m=1}^P \kappa_m^2 \frac{\bar{W}_m' - p - 1}{p+2}; \quad (53)$$

$$A_{pq} = \frac{1}{(p+1)(q+1)} \sum_{m=1}^P \kappa_m^2 \left(\frac{2\kappa_m \bar{W}_m''}{q+p+3} - 1 \right). \quad (54)$$

Из (53), (54) следует, что матричные элементы A_{pq} и правые части b_p системы уравнений (52) выражаются через входные данные (значения коэффициента отражения на конечном множестве частотного параметра κ_m , $m=1, 2, \dots, P$) обратной задачи. Таким образом, определяя из (52) коэффициенты $(a_p)_{p=0}^Q$, получим начальные приближения для процесса минимизации функционала (30).

3. Результаты численных экспериментов. На основе разработанных алгоритмов решения прямых и обратных задач дифракции волн на слоистых структурах был проведен ряд численных экспериментов, демонстрирующих эффективность предложенного подхода к непрямоу определению параметров таких структур.

В качестве модели экспериментальных данных использовалась частотная зависимость комплексного коэффициента отражения $R(\kappa)$, полученная по результатам решения прямых задач дифракции.

Результаты первого численного эксперимента представлены на рис. 2, где показана в процентах относительная ошибка восстановления профиля диэлектрической проницаемости $\delta = \frac{\varepsilon(\bar{z}) - \varepsilon_T(\bar{z})}{\varepsilon_T(\bar{z})} 100\%$, ($\varepsilon(\bar{z})$ – восстановленный профиль, $\varepsilon_T(\bar{z})$ – исходный профиль).

Целью численного эксперимента было определение влияния погрешности решения прямой задачи с помощью предложенного выше алгоритма на точность восстановления профиля относительной диэлектрической проницаемости слоя. В качестве параметра, характеризующего погрешность алгоритма в соответствии с итерационной формулой (20), была выбрана величина δ_N .

Относительная диэлектрическая проницаемость слоя принималась в виде экспоненциальной зависимости $\varepsilon_T(\bar{z}) = e^{2a(\bar{z}+1)}$, $-1 \leq \bar{z} \leq 0$, a – некоторое число (в численном эксперименте $a = 0,5$). Как известно [19], для таких функций $\varepsilon_T(z)$ прямая задача дифракции имеет аналитическое решение в терминах цилиндрических функ-

ций. В частности, для коэффициента отражения $R(\kappa)$ справедлива формула

$$R(\kappa) = \frac{(N_1 - iN_0)(e^a \bar{J}_1 - i\bar{J}_0) + (iJ_0 - J_1)(e^a \bar{N}_1 - i\bar{N}_0)}{(iN_0 - N_1)(i\bar{J}_0 + e^a \bar{J}_1) + (J_1 - iJ_0)(i\bar{N}_0 + e^a \bar{N}_1)}, \quad (55)$$

где

$$N_n = N_n\left(\frac{\kappa}{a}\right); \quad J_n = J_n\left(\frac{\kappa}{a}\right); \quad \bar{N}_n = N_n\left(\frac{\kappa}{a} e^a\right);$$

$$\bar{J}_n = J_n\left(\frac{\kappa}{a} e^a\right); \quad n = 0, 1; \quad N_n - \text{функция Неймана};$$

J_n – функция Бесселя.

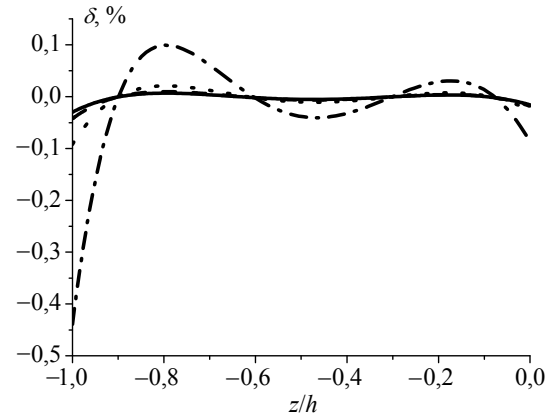


Рис. 2. Относительная погрешность восстановления профиля диэлектрической проницаемости для различных значений величины δ_N : $\delta_N = 10^{-3}$ – сплошная линия; $\delta_N = 2 \cdot 10^{-3}$ – пунктир; $\delta_N = 4 \cdot 10^{-3}$ – штриховая линия; $\delta_N = 10^{-2}$ – штрихпунктирная линия

Формула (55) имеет место для случая нормального падения монохроматической E -поляризованной плоской волны на диэлектрический слой.

Входные данные для обратной задачи моделировались согласно формуле (55). Базисные функции для восстановления профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ были выбраны в виде $\psi_n(\bar{z}) = (\bar{z} + 1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, так что

$$\varepsilon(\bar{z}) = \sum_{n=0}^Q a_n (\bar{z} + 1)^n. \quad (56)$$

Коэффициенты $(a_n)_{n=0}^Q$ определялись с помощью алгоритма минимизации функционала (30). Как видно из рис. 2, уже при $\delta_N = 10^{-3}$ максимальная погрешность восстановления профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon_T(\bar{z}) = e^{2a(\bar{z}+1)}$ составляет менее 0,05%. При этом коэффициент отражения вычислен для трех значений частотного параметра κ , а количество базисных функций в разложении (56) было равно четырем ($Q = 4$). Анализ полученных результатов позволяет сде-

лать вывод о том, что увеличение количества базисных функций в разложении (56), как и количества значений частотного параметра, для которых задавался коэффициент отражения, не приводит к существенному изменению погрешности восстановления профиля диэлектрической проницаемости.

Кроме того, интересно отметить, что начальные значения коэффициентов a_n для алгоритма минимизации функционала (30) задавались с относительной погрешностью более 50 %. Тем не менее, это практически не влияло на процесс минимизации.

Результаты восстановления параболического профиля $\varepsilon_T(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c$ ($a = b = 9$, $c = 3,25$) демонстрирует рис. 3. Входные данные (коэффициент отражения) генерировался с помощью алгоритма (20)–(24) в частотном диапазоне $1 \leq \kappa \leq 3$.

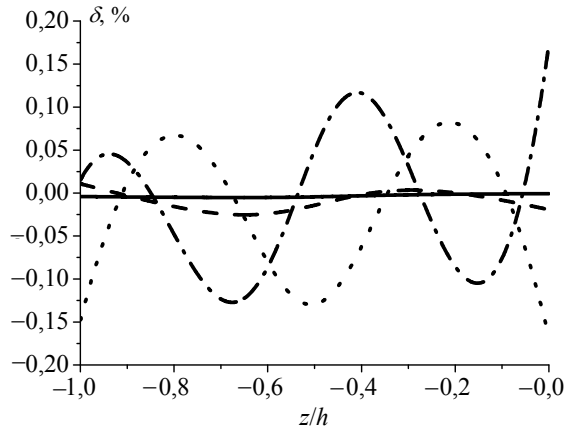


Рис. 3. Относительная погрешность восстановления профиля диэлектрической проницаемости для различного количества базисных функций в (56): трех – сплошная линия; четырех – пунктир; пяти – штриховая линия; шести – штрихпунктирная линия

На рис. 4 приведены частотные зависимости реальной и мнимой частей коэффициента отражения в этом диапазоне частот для случая нормального падения монохроматической E -поляризованной плоской волны. В качестве входных данных брались значения комплексного коэффициента отражения для трех значений частотного параметра $\kappa = 1, 2, 3$ (на рис. 4 они отмечены крестиками). Параметр погрешности решения прямой задачи был $\delta_N = 10^{-3}$.

На рис. 3 показана относительная погрешность восстановления профиля диэлектрической проницаемости для различного количества базисных функций в разложении (56). Как и следовало ожидать, минимальная погрешность восстановления профиля была для случая трех базисных функций (полином второй степени).

Целью второго численного эксперимента было определение оптимального параметра регуляризации α для сглаживающего функционала (32). Для этого исследовалась зависимость от параметра регуляризации α невязки $N(\alpha)$, которая определяется по формуле

$$N(\alpha) = \left(\frac{\sum_{n=1}^P |R_n^\alpha - R_n^T|^2}{\sum_{n=1}^P |R_n^T|^2} \right)^{1/2}. \quad (57)$$

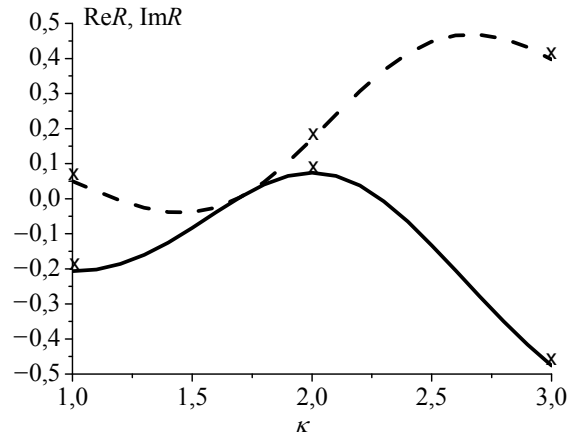


Рис. 4. Частотные зависимости реальной (сплошная линия) и мнимой (пунктир) частей коэффициента отражения

Здесь $R_n^T = R^T(\kappa_n)$, $n = 1, 2, \dots, P$ – значения коэффициента отражения на заданной сетке частотного параметра $(\kappa_n)_{n=1}^P$ (входные данные); $R_n^\alpha = R^\alpha(\kappa_n)$ – значения коэффициента отражения на этой же сетке $(\kappa_n)_{n=1}^P$, полученные с помощью алгоритма решения прямой задачи дифракции для профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon^\alpha(\bar{z}) = \sum_{n=0}^Q a_n^\alpha (\bar{z} + 1)^n$, на котором сгла-

живающий функционал (32) достигает минимума при заданных значениях параметра регуляризации α . На рис. 5, а изображены зависимости $N(\alpha)$ от параметра регуляризации для $0,01 \leq \kappa \leq 3$ – сплошная линия и для $2 \leq \kappa \leq 4$ – пунктир.

В качестве восстанавливаемого профиля была выбрана функция

$$\varepsilon_T(z) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c + d \sin(2\pi(\bar{z} + 1)), \quad (58)$$

для которой в численном эксперименте полагалось $a = 8, b = 8, c = 7, d = 0,276$. Сетка частот была эквидистантной и задавалась на двух интервалах изменения частотного параметра $0,01 \leq \kappa \leq 3$ и $2 \leq \kappa \leq 4$. Как видно из рис. 5, а,

для обоих интервалов изменения частотного параметра невязка $N(\alpha)$ имеет минимум при некотором значении параметра регуляризации $\lg \alpha = -3,725$ – для интервала $(0,01,3)$ – сплошная линия и $\lg \alpha = -4,75$ – для интервала $(2,4)$ – пунктир. При этих значениях параметра регуляризации были восстановлены соответствующие профили диэлектрической проницаемости. Они представлены на рис. 5, б при $0,01 \leq \kappa \leq 3$ – пунктир; при $2 \leq \kappa \leq 4$ – штриховая линия. На этом же рисунке изображен исходный профиль (58) сплошная линия.

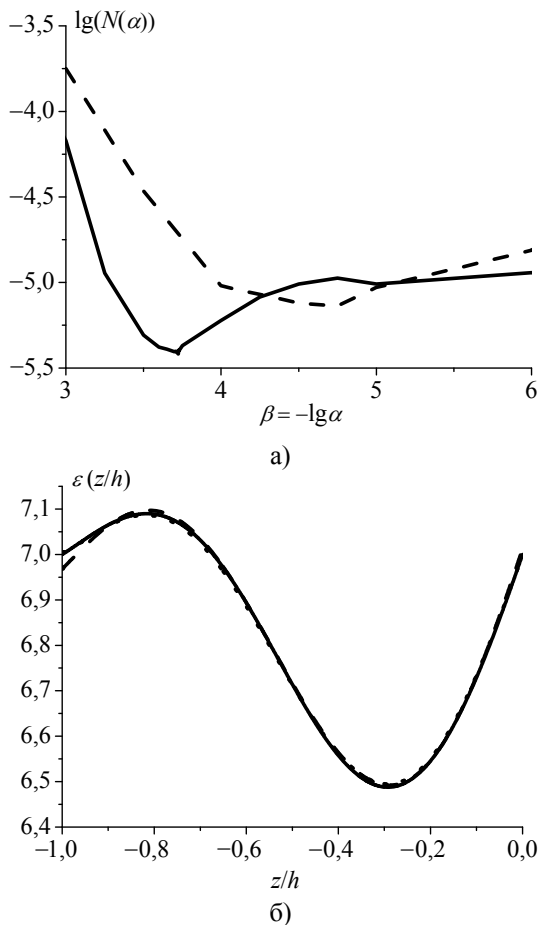


Рис. 5. Зависимости невязки от параметра регуляризации (а); профили диэлектрической проницаемости при оптимальных значениях параметра регуляризации (б)

Как легко заметить, указанное выше значение параметра регуляризации является оптимальным с точки зрения минимальной погрешности восстановления. На рис. 6 представлены относительные ошибки восстановления при оптимальных значениях параметра регуляризации. Следует отметить, что интервал частотного параметра $2 \leq \kappa \leq 4$ более предпочтителен для восстановления диэлектрической проницаемости, чем интервал $0,01 \leq \kappa \leq 3$.

Для большинства исследованных профилей подходящий диапазон частотного параметра κ лежит в пределах от 0,5 до 4. Как показал анализ численных результатов, смещение частотного интервала в более коротковолновый диапазон ($\kappa \sqrt{\varepsilon_{cp}} \gg 1, \varepsilon_{cp} = \int_{-1}^0 \varepsilon(\bar{z}) d\bar{z}$) приводит к росту оптимального значения параметра регуляризации и увеличению погрешности восстановления профиля диэлектрической проницаемости. Поэтому наиболее приемлемым частотным диапазоном изменения входных данных для обратной задачи является резонансный диапазон $\kappa \sqrt{\varepsilon_{cp}} \sim 2\pi$.

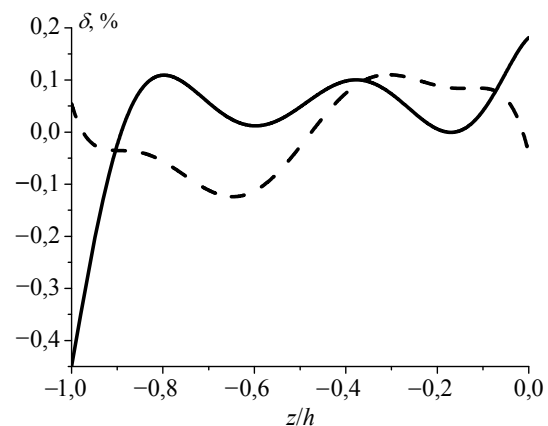


Рис. 6. Погрешность восстановления профиля диэлектрической проницаемости при $0,01 \leq \kappa \leq 3$ и $\lg \alpha = -3,725$ – сплошная линия; при $2 \leq \kappa \leq 4$ и $\lg \alpha = -4,75$ – штриховая линия

Теперь обсудим результаты третьего численного эксперимента по изучению влияния случайных ошибок входных данных на восстановление профиля диэлектрической проницаемости.

Процесс появления случайных ошибок во входных данных моделировался следующим образом. Частотная зависимость коэффициента отражения $R(\kappa)$, полученная из решения прямой задачи дифракции, заменялась на $\bar{R}(\kappa)$ по формуле

$$\bar{R}(\kappa_n) = R(\kappa_n)(1 + \gamma \tau_n), \quad (59)$$

где τ_n – случайные числа из интервала $(-1,1)$ с равномерным законом распределения; $(\kappa_n)_{n=1}^P$ – сетка частот. Очевидно, что среднее значение $\bar{R}(\kappa_n)$ равно $R(\kappa_n)$, а дисперсия равна γ . Величина γ является характеристикой точности входных данных. Погрешность определения коэффициента отражения $R(\kappa_n)$ на сетке частотного параметра $(\kappa_n)_{n=1}^P$ была равна $\delta_N = 10^{-4}$. В качестве исходного профиля диэлектрической проницаемости была выбрана функция (58).

На рис. 7 приведены частотные зависимости реальной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей одной из реализаций случайной функции $\bar{R}(\kappa)$ при нормальном падении монохроматической E -поляризованной плоской волны на слой с диэлектрической проницаемостью, заданной по формуле (58). Величина, характеризующая точность входных данных, составляла $\gamma = 0,1$.

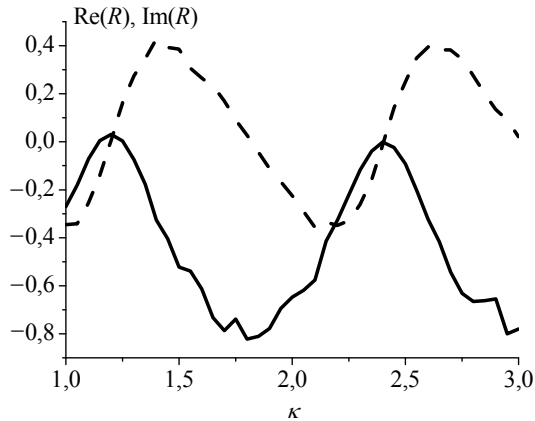


Рис. 7. Частотные зависимости реальной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей одной из реализаций случайной функции $\bar{R}(\kappa)$

Результаты восстановления профиля диэлектрической проницаемости при оптимальном значении параметра регуляризации α демонстрирует рис. 8, а для различных значений $\gamma = 0,01$ – пунктир; $\gamma = 0,05$ – штриховая линия; $\gamma = 0,1$ – штрихпунктирная линия. Здесь же сплошной линией представлен точный профиль диэлектрической проницаемости. Как видно из рис. 8, б, на котором представлена относительная погрешность восстановления профиля диэлектрической проницаемости слоя для различных значений $\gamma = 0,01$ – сплошная линия; $\gamma = 0,05$ – пунктир; $\gamma = 0,1$ – штриховая линия, эта погрешность увеличивается с ростом величины γ . При этом на концах интервала изменения профиля (границы слоя) эта погрешность принимает максимальные значения (для $\gamma = 0,1$ $\delta \approx 4\%$, а для $\gamma = 0,05$ $\delta \approx 3\%$). Важно отметить одну особенность поведения относительной погрешности восстановления, состоящую в том, что ее максимальное значение не превосходит величины максимальной ошибки во входных данных

$$\max \left| \frac{\varepsilon - \varepsilon_T}{\varepsilon_T} \right| \leq \max \left| \frac{\bar{R} - R}{R} \right|.$$

Таким образом, приведенные результаты численных экспериментов демонстрируют возможность и работоспособность предложенного

подхода к решению обратных задач теории дифракции волн на слоистых диэлектрических структурах.

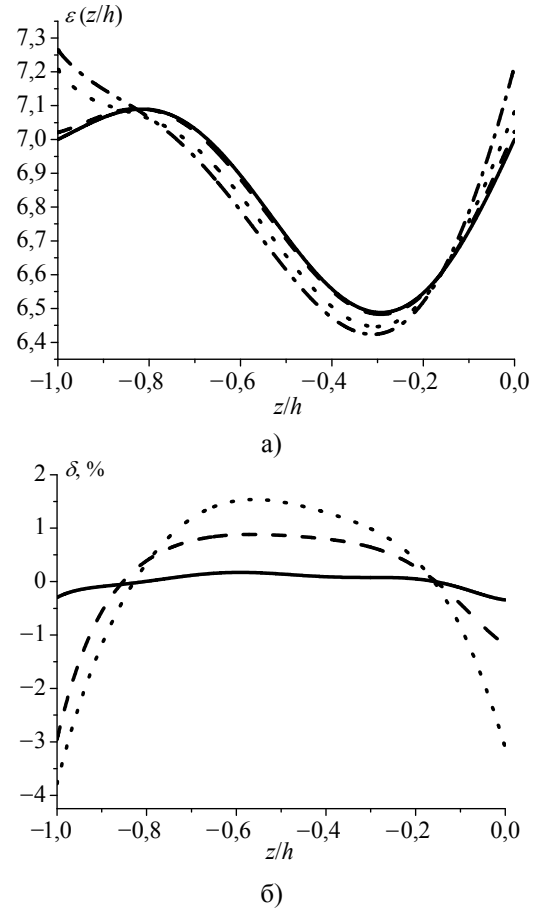


Рис. 8. Профили диэлектрической проницаемости точный и восстановленные (а) и относительная погрешность восстановления профиля диэлектрической проницаемости (б)

Выше при изложении результатов численных экспериментов неявно предполагалось, что потери в диэлектрическом слое пренебрежимо малы. Однако учет потерь имеет принципиальное значение для обратных задач дифракции. Далее, на одном примере демонстрируется восстановление профиля диэлектрической проницаемости для случая, когда ее мнимая часть отлична от нуля и ее величина является функцией пространственной координаты. В качестве функции, описывающей диэлектрическую проницаемость, была выбрана следующая:

$$\varepsilon_T(z) = a_1 \bar{z}^2 + b_1 \bar{z} + c_1 + i(a_2 \bar{z}^2 + b_2 \bar{z} + c_2). \quad (60)$$

В численном эксперименте полагалось $a_1 = b_1 = 9$; $c_1 = 3,25$; $a_2 = b_2 = 1$; $c_2 = 0,125$.

На рис. 9 показана ошибка восстановления реальной и мнимой частей диэлектрической проницаемости для случая, когда коэффициент отражения задавался для трех значений частотного параметра $\kappa = 1, 2, 3$.

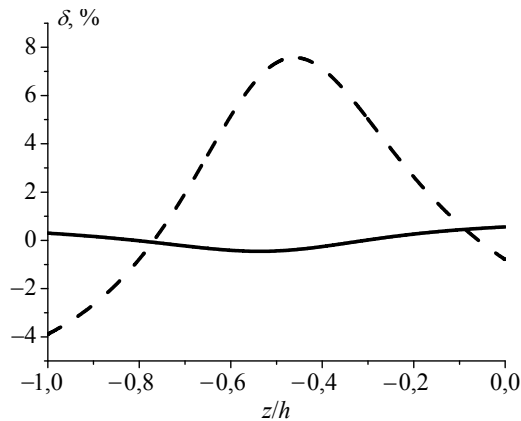


Рис. 9. Погрешность восстановления реальной (сплошная линия) и мнимой (пунктир) частей диэлектрической проницаемости

Как видно из рис. 9, максимальная погрешность восстановления мнимой части диэлектрической проницаемости значительно больше аналогичной величины для ее реальной части. Такая особенность алгоритма восстановления профиля диэлектрической проницаемости с потерями, как показали численные расчеты, имеет место и для профилей, отличных от (60).

Выводы. Таким образом, рассмотрена обратная задача восстановления относительной диэлектрической проницаемости неоднородного слоя по частотной зависимости комплексного коэффициента отражения. Предложен численный метод решения этой задачи, который сводит ее к задаче оптимального управления для уравнения Риккати и минимизации функционала невязки. Разработан алгоритм расчета градиента функционала невязки, что позволило для процесса минимизации применить метод сопряженных градиентов. Вычислительная эффективность предложенного метода продемонстрирована на ряде модельных обратных задач дифракции. Разработанный метод можно в дальнейшем распространить на случай, когда диэлектрическая проницаемость неоднородной среды обладает частотной дисперсией (модели Дебая и Друде).

Библиографический список

1. Шанда Э. Физические основы дистанционного зондирования / Э. Шанда. – М.: Недра, 1990. – 208 с.
2. Pike R. Scattering and inverse scattering in pure and applied science / R. Pike, P. Sabatier. – San Diego: Academic Press, 2002. – 1813 p.
3. Лаврентьев М. М. Одномерные обратные задачи математической физики / М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, В. Г. Яхно. – Новосибирск: Наука, 1982. – 258 с.
4. Хруслов Е. Я. Обратная задача теории электромагнитного зондирования / Е. Я. Хруслов // Успехи мат. наук. – 1982. – 37, № 4. – С. 107–108.
5. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – К.: Наук. думка, 1976. – 326 с.
6. Гельфанд И. М. Определение дифференциального уравнения по его спектральной функции / И. М. Гельфанд,

- Б. М. Левитан // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1951. – 15, № 4. – С. 309–360.
7. Хруслов Е. Я. Одномерные обратные задачи электродинамики / Е. Я. Хруслов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1985. – 25, № 4. – С. 548–561.
8. Ковенский С. Ю. Синтез поглощающих слоистых сред / С. Ю. Ковенский, А. В. Тихонравов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1988. – 28, № 6. – С. 887–900.
9. Дробахин О. О. Розв’язок зворотної задачі для багатослоєвих діелектричних структур / О. О. Дробахин, С. Г. Алексін. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2012. – 240 с.
10. Tijhuis A. J. Iterative approach to the frequency-domain solution of the inverse-soet scattering problem for an inhomogeneous lossless dielectric slab / A. J. Tijhuis, C. Van der Worn // IEEE trans. – 1984. – AP-31. – P. 711–716.
11. Yung Chen. An iterative procedure for solving inverse problem arising from active remote sensing / Yung Chen // Proc. Jf Mathematical Methods and Applications of Scattering Theory. – Washington, 1979. – 130. – P. 308–310.
12. Батраков Д. О. Алгоритм решения обратных задач рассеяния на основе принципа максимума Понтрягина / Д. О. Батраков, М. М. Тарасов // Радиотехника и электрон. – 1999. – 44, № 2. – С. 137–142.
13. Батраков Д. О. Восстановление профиля диэлектрической проницаемости плоскослойной среды с учетом дисперсии при частотном зондировании / Д. О. Батраков, А. А. Симачев // Вестн. Харьков. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Радиофизика и электрон. – 2009. – № 883, вып. 13. – С. 45–49.
14. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
15. Дмитриев В. И. Обратные задачи электромагнитных методов геофизики / В. И. Дмитриев – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 288 с.
16. Численно-аналитический метод решения задач дифракции волн на слоисто-неоднородных средах / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук // Физические основы приборостроения. – 2013. – 2, № 1. – С. 34–47.
17. Modern Theory of gratings. Resonant scattering: analysis techniques and phenomena / I. Candezon, G. Granet, P. N. Melezhik et. al. – N. Y.–Dordrecht–Heidelberg–L.: Springer, 2010. – 390 p.
18. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
19. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 343 с.

Рукопись поступила 12.12.2014.

A. V. Brovenko, A. A. Vertiy, N. P. Melezhik,
P. N. Melezhik, A. Ye. Poyedinchuk

A NUMERICAL ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING REVERSE PROBLEMS OF WAVE DIFFRACTION BY LAYERED INHOMOGENEOUS MEDIA

A numerical analytical method of the reverse problem solution is suggested for the relative permittivity profile of layered inhomogeneous media to be obtained from the frequency dependence of the reflection coefficient of a monochromatic plane electromagnetic wave. The idea of the method is to reduce the initial reverse problem to the optimal control problem of the Riccati equation. The solution scheme employs a numerical analytical method for the direct problem solution of monochromatic plane wave diffraction by layered inhomogeneous media and takes advantage of some algorithm developed for smoothing the gradient of the residual functional. With the algorithms elaborated for solving the direct and reverse problems of wave diffraction by layered structures, a series of numerical experiments has been performed,

the efficiency of the suggested approach in not a direct determination of layered structure parameters is demonstrated.

Key words: reverse problem, reflection coefficient, residual functional, regularization technique.

А. В. Бровенко, О. О. Вертій, М. П. Мележик,
П. М. Мележик, А. Ю. Поєдинчук

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД
РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ
ДИФРАКЦІЇ ХВИЛЬ
НА НЕОДНОРІДНОМУ ШАРІ

Запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання обернених задач визначення профілю відносної

діелектричної проникності шару за частотною залежністю коефіцієнта відбиття монохроматичної плоскої електромагнітної хвилі. В основі цього методу – ідея приведення первинної оберненої задачі до задачі оптимального керування для рівняння Ріккати. Побудова розв'язку цієї задачі використовує чисельно-аналітичний метод розв'язку для прямих задач дифракції монохроматичних плоских хвиль на неоднорідному шарі та запропонований алгоритм розрахунку градієнта згладжуючого функціоналу нев'язки. На основі розроблених алгоритмів розв'язання прямих і обернених задач дифракції хвиль на шаруватих структурах було проведено ряд обчислювальних експериментів, які демонструють ефективність запропонованого підходу до непрямого визначення параметрів таких структур.

Ключові слова: зворотна задача, коефіцієнт відбиття, функціонал нев'язки, метод регуляризації.