

Е. М. Ганапольский

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: el.ganapolskii@mail.ru

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КВАНТОВОГО (ВОЛНОВОГО) ХАОСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В диапазоне частот 26...38 ГГц экспериментально изучены частотные спектры квазиоптического цилиндрического СВЧ-резонатора со вставленными в него тонкими металлическими стержнями, играющими роль сингулярных возмущений. Определена зависимость характера спектра от числа стержней-возмущений в резонаторе. Установлено, что при малом числе возмущений в спектре наблюдается пуассоновское распределение межчастотных (МЧ) интервалов. Это свидетельствует о том, что в данном случае система квазирегулярная и в ней наблюдаются признаки квантового (волнового) хаоса (КХ). Однако с ростом числа сингулярностей спектр системы качественно меняется: распределение МЧ-интервалов приближается к вигнеровскому, которое свидетельствует о появлении эффекта «отталкивания» уровней в спектре и присутствии в системах КХ. Таким образом, экспериментально установлено, что КХ возникает в квазирегулярной системе только при достаточно большом числе сингулярных возмущений. Ил. 5. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова: КХ, сингулярное возмущение, цилиндрический СВЧ-резонатор, тонкий металлический стержень в резонаторе – источник сингулярного возмущения, МЧ-интервал, пуассоновское распределение, вигнеровское распределение МЧ-интервалов.

Проблема квантового (волнового) хаоса (КХ) охватывает исследования различных квантовых систем, классические аналоги которых обнаруживают хаотическое поведение. В последнее время эта проблема привлекает достаточно большое внимание, о чем свидетельствуют многочисленные ее теоретические и экспериментальные исследования (см., например, [1] и цитированную там литературу). При изучении КХ обычно используются модельные системы в виде рассеивающих волновых бильярдных типа бильярдных Синая и Бунимовича, в которых были обнаружены признаки КХ. В силу тождественности стационарного уравнения Шредингера и волнового скалярного уравнения Максвелла для этой цели применяют также квазиоптические СВЧ-резонаторы, которые по форме подобны соответствующему рассеивающему бильярду.

Признаки КХ присущи и другим системам, таким как рассеивающие цилиндрические бильярды, с шероховатой боковой границей [2, 3], бильярды, заполненные случайными объемными неоднородностями [4], цилиндрические бильярды с боковой границей, обладающей малой гладкостью, когда в определенных ее точках отсутствует вторая производная [5, 6]. Наличие признаков КХ теоретически предсказывалось и в системах, содержащих одну или несколько малых неоднородностей, каждую из которых можно трактовать как сингулярное возмущение [7, 8]. Однако, несмотря на плодотворность теоретического метода, использованного в этих работах для описания влияния таких неоднородностей, целый ряд вопросов не получил в них достаточного прояснения. В частности, неясным остался один из основополагающих вопросов: какова физическая

причина того, что регулярная квантовая (волновая) система под влиянием малого пространственного возмущения приобретает явно выраженные признаки КХ? Не было ответа и на вопрос: КХ возникает при любом уровне сингулярного возмущения, или это возмущение должно быть достаточно велико?

Будем рассматривать замкнутую электродинамическую систему в виде квазиоптического цилиндрического СВЧ-резонатора с неоднородностями, в котором отсутствуют какие-либо признаки пространственной симметрии и имеется лишь один очевидный интеграл движения – энергия системы. Из-за отсутствия пространственной симметрии такая система является неинтегрируемой (в классическом смысле), и вследствие этого обладает хаотичностью, поскольку ее состояние не проявляет зависимости от начальных условий (эффект перемешивания [9]). Неинтегрируемость системы является основанием для поиска в ней признаков КХ. Феингольд и Перес [10] показали, что ряды квантовой теории возмущений, описывающие подобную систему, являются расходящимися. Отсюда следует, что с помощью классических методов теоретического описания вряд ли могут быть получены для нее удовлетворительные результаты. Поэтому более перспективным, по нашему мнению, является экспериментальное исследование.

Наиболее распространенным способом экспериментального изучения КХ в закрытой электродинамической системе является спектральный подход, когда исследуются свойства спектра квазиоптического СВЧ-резонатора, геометрически подобного этой системе. При этом измеряются межчастотные (МЧ) интервалы ме-

жду ближайшими спектральными линиями. Л. Д. Ландау и Я. С. Смородинский [11] нашли, что в спектре такой системы линии, принадлежащие к одному и тому же классу симметрии, «отталкиваются». В том смысле, что вероятность очень малых МЧ-интервалов между резонансными линиями в спектре очень мала. В дальнейшем было установлено, что эффект «отталкивания» спектральных линий, который проявляется в виде вигнеровского распределение МЧ-интервалов, обладает большой устойчивостью для систем с КХ. При вигнеровском распределении вероятность $P(s)$ МЧ-интервала в спектре определяется выражением $P(s) = (\pi/2)s \exp(-\pi s^2/4)$, где s – нормированная на среднее значение длина МЧ-интервала.

Наличие вигнеровского распределения в хаотическом спектре системы и было принято использовать в качестве характерного признака КХ [1]. При этом отметим, что на существование «отталкивания» в спектре неинтегрированной системы было указано в работе [11], более 50 лет тому назад, однако природа его до сих пор еще недостаточно изучена.

В настоящей работе предпринимается попытка продвинуться в выяснении этого принципиального вопроса в концепции КХ на примере неинтегрируемой системы цилиндрического объемного СВЧ-резонатора с неоднородностями в виде множества случайно расположенных в нем сингулярных возмущений.

Ранее резонатор с одиночной сингулярной неоднородностью был рассмотрен теоретически в работе [8], в которой было предсказано, что эффект «отталкивания», который проявляется в виде вигнеровского распределения МЧ-интервалов, должен появиться лишь при достаточно большом числе неоднородностей, когда суммарное воздействие их на спектр резонатора достаточно велико. В работе [12], влияние сингулярного возмущения на спектр резонатора было изучено экспериментально на примере квазиоптического цилиндрического СВЧ-резонатора. Сингулярное возмущение создавалось в нем путем введения в резонатор эксцентрично расположенного тонкого металлического стержня, прикрепленного к верхней и нижней крышке резонатора. Расположение стержня в резонаторе было случайным. Стержень имел электрический контакт по СВЧ с верхней и нижней крышками резонатора. Благодаря этому и сингулярному характеру возмущения он существенно изменял распределение электромагнитного поля в небольшой окрестности у торца.

В данной работе изучается вопрос о влиянии большого количества сингулярных не-

однородностей в резонаторе на проявление признаков КХ.

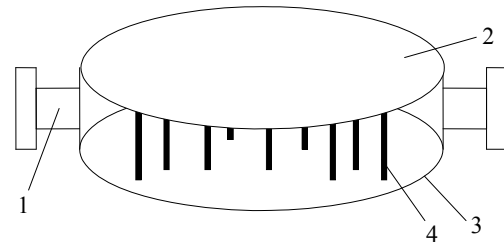


Рис. 1. Схематическое изображение квазиоптического цилиндрического СВЧ-резонатора со стержнями–сингулярными возмущениями: 1 – волновод, впаянный в корпус резонатора с дифракционной антенной для возбуждения $H(E)$ -колебаний; 2, 3 – верхняя и нижняя крышка резонатора; 4 – стержни–сингулярные возмущения (диаметр каждого стержня 0,7 мм). В верхней и нижней крышке резонатора имеются цанги, обеспечивающие СВЧ-контакт каждого стержня с крышками резонатора

Большое значение в этом случае имеет создание условий, при которых обеспечивается электрический контакт по СВЧ между стержнями и металлическими крышками резонатора. Это достигалось с применением специальных металлических цанг, прижимающих стержни к крышкам резонатора.

При рассеянии мод колебаний резонатора на тонких стержнях помимо внутримодового возникает и межмодовое рассеяние [12]. Путем анализа оператора межмодового рассеяния было теоретически установлено, что это взаимодействие является доминирующим по сравнению с внутримодовым, и оно приводит к эффекту «отталкивания» спектральных уровней. Благодаря этому распределение МЧ-интервалов в спектре из-за влияния сингулярных возмущений, создаваемых стержнями при определенных условиях, может стать вигнеровским. Ранее было теоретически установлено [8], что тонкий металлический стержень, эксцентрично расположенный в резонаторе, несмотря на то, что его толщина d достаточно мала $d \ll \lambda$, где λ – рабочая длина волны, создает условия, достаточные для проявления в спектре резонатора основного признака КХ – вигнеровского распределения МЧ-интервалов. В связи с этим возникает вопрос: зависит ли условие возникновения КХ от числа сингулярных неоднородностей? Имеются ли отличия в условиях реализации КХ в случае использования не одного, как в [12], а большого числа тонких металлических стержней? Поскольку сингулярные стержни расположены в резонаторе на расстоянии $l > \lambda$, взаимодействие между ними достаточно мало, и ответ на вопрос о влиянии большого числа стержней на «отталкивание» уровней в

спектре резонатора априори не может быть получен, равно как и на вопрос о корреляции между спектральными уровнями, а также их спектральной жесткости. Поскольку система резонатора с сингулярными стержнями является хаотической (в классическом смысле), то для ее теоретического описания методы классической динамики вряд ли могут быть использованы. Поэтому признаки КХ в такой системе мы искали путем проведения экспериментальных исследований.

Рабочий макет (см. рис. 1) представлял собой квазиоптический алюминиевый многомодовый квазиоптический цилиндрический резонатор в виде полости диаметром 130 мм и высотой 16 мм. Макет рассчитан работу в 8-мм радиодиапазоне, на частотах 26...38 ГГц.

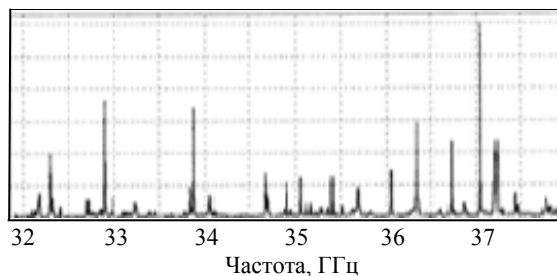


Рис. 2. Фрагмент спектра цилиндрического резонатора с сингулярными возмущениями

Для возбуждения электромагнитных колебаний СВЧ в резонаторе использовалась волноводная дифракционная антенна в виде отрезка впаиваемого в резонатор прямоугольного стандартного волновода сечением $7,2 \times 3,4 \text{ мм}^2$. Торцевой волновод, входящий в полость резонатора, был закрыт медной диафрагмой толщиной 0,1 мм с отверстием диаметром 1,8 мм. Это отверстие служило антенной для возбуждения в нем колебаний. Для раздельного возбуждения E - и H -мод колебаний использовались две различные антенны. В одной из них, предназначенной для возбуждения H -моды, длинная сторона прямоугольного отверстия волновода была направлена вдоль оси резонатора. Другая антенна, которая служила для возбуждения E -моды, имела такую же конструкцию, что и первая антенна для возбуждения H -моды, однако отличалась тем, что длинная сторона отверстия волновода была ориентирована в перпендикулярном направлении. Благодаря высокой проводимости алюминиевых стенок резонатора добротность резонатора в миллиметровом диапазоне была достаточно велика, порядка 10^3 , как для H -, так и для E -моды колебаний. Было установлено, что ширины резонансных линий в спектре резонатора заметно отличаются не только для каждой моды, но и в пределах одной моды.

Это можно объяснить следующим образом. Добротность резонатора и, соответственно, ширина резонансной линии зависит от омических потерь в его стенках, а также от взаимодействия между различными модами, которое ответственно за перекачку энергии между ними. Поэтому случайными неровностями стенок боковой поверхности, которые существенно влияют на это взаимодействие, можно объяснить различие в добротности резонансных линий.

Для регистрации спектра резонатора с сингулярными возмущениями был использован широкодиапазонный измеритель Р2-65 миллиметрового диапазона, который был оснащен компьютерной приставкой. Эта приставка позволяла с достаточно высокой точностью и за сравнительно короткое время (40 с) автоматически регистрировать весь спектр резонатора в указанном диапазоне частот. С ее помощью производились измерения характеристик многочисленных спектральных линий. Общее число наблюдаемых резонансов в указанном диапазоне частот составляло более 80. При этом относительная погрешность в измерении частоты резонансной линии не превышала 10^{-4} , а добротности – 10^{-3} . Фрагмент спектра резонатора с сингулярными неоднородностями показан на рис. 2. При изменении числа неоднородностей (числа сингулярных стержней) вид спектра резонатора качественно не изменяется, а число резонансных линий в нем остается практически постоянным. В то же время существенно изменяется статистика спектра, касающаяся распределения МЧ-интервалов. Распределение этих интервалов, близкое к пуассоновскому в пустом резонаторе или в условиях малого числа неоднородностей, с ростом числа стержней-сингулярностей сменяется распределением Вигнера с характерным широким максимумом при значении величины среднего интервала s близким к 1. С целью изучения спектральных свойств резонатора, относящихся к КХ, в диапазоне частот 27...38 ГГц были измерены резонансные частоты и добротности резонансных линий. На основе этих данных была получена статистика МЧ-интервалов и корреляция спектральных линий. Распределение МЧ-интервалов позволило определить статистические свойства спектра резонатора с сингулярными возмущениями, сравнить их со свойствами, вытекающими из теории случайных матриц. Измерения корреляции МЧ-интервалов для спектральных линий дали возможность установить, насколько эти линии статистически связаны.

Рассмотрим результаты измерений спектра резонатора при различных сингулярных возмущениях (рис. 3, 4).

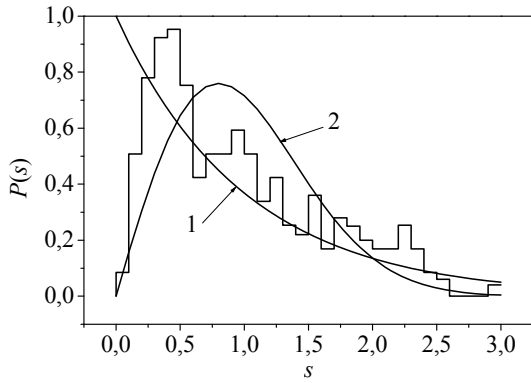
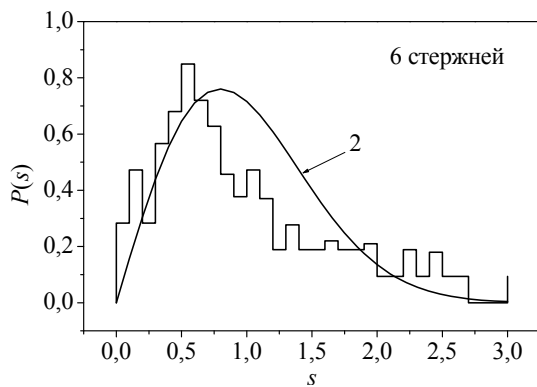
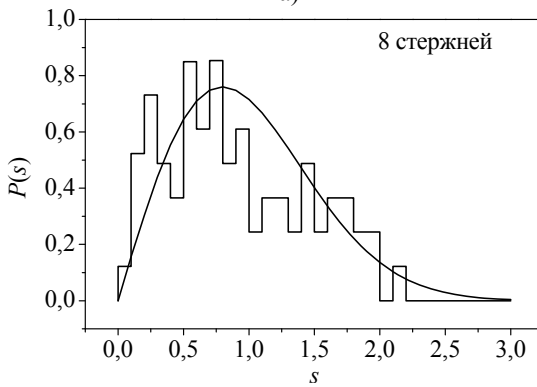


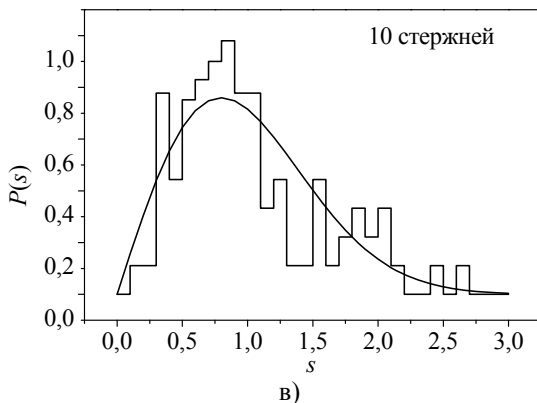
Рис. 3. Гистограмма для спектра резонатора, в котором отсутствуют сингулярные возмущения: 1 – пуассоновское распределение МЧ-интервалов; 2 – распределение Вигнера



а)



б)



в)

Рис. 4. Гистограммы для спектра резонатора, с сингулярными стержнями: а) – 6 стержней; б) – 8 стержней; в) – 10 стержней, вигнеровское распределение МЧ-интервалов (сплошная кривая)

Прежде всего отметим, что распределение МЧ-интервалов в зависимости от среднего расстояния между уровнями s носит достаточно нерегулярный характер. Из этого следует, что спектр резонатора с сингулярными неоднородностями является случайным, что характерно для системы с КХ.

В отсутствие сингулярных возмущений согласно теории должно наблюдаться распределение МЧ-интервалов, близкое к пуассоновскому, $P(s) = \exp(-s)$, когда имеет место большая плотность вероятности $P(s)$ при малых s , с последующим экспоненциальным ее спадом при $s > 0,5$.

При увеличении числа стержней в резонаторе максимум вероятности в распределении МЧ-интервалов смещается в сторону больших s . Это можно связать с тем, что в данном случае мы имеем дело не с чисто хаотическим, или чисто регулярным, а со смешанным состоянием системы, когда регулярное и хаотическое движения в нем сосуществуют. Важно, что с возрастанием числа стержней–сингулярных возмущений кривые, аппроксимирующие приведенные гистограммы, приближаются к распределению Вигнера.

Это означает, что с ростом числа возмущений состояние системы квазиоптического цилиндрического СВЧ-резонатора, когда возмущения накапливаются, приближается к КХ. Другими словами, для достижения состояния КХ необходимо достаточно сильное сингулярное возмущение.

Наряду с распределением МЧ-интервалов были экспериментально получены сведения о спектральной жесткости спектра резонатора в условиях развитого КХ. Жесткость спектра является важной характеристикой системы с точки зрения КХ. Для ее оценки используется функция $\Delta_3(L)$, где L – длина спектрального интервала. Понятие функции $\Delta_3(L)$ для изучения статистических свойств случайного спектра было введено Дайсоном и Мехтой [13] и используется при измерении жесткости конечной последовательности спектральных уровней, которую можно получить экспериментально или путем численных расчетов. Для такой последовательности строится график ступенчатой функции с постоянным средним расстоянием между ними, который в среднем приближается к прямой линии. Статистическая зависимость функции $\Delta_3(L)$ дает оценку величины отклонения этой функции от соответствующей прямой. Для построения кривой спектральной жесткости нами применялась методика обработки спектра, описанная в [13].

Из приведенных на рис. 5 данных видно, что экспериментальная зависимость $\Delta_3(L)$ существенно отличается от линейной, которая характер-

на для системы с регулярным спектром. С увеличением L кривая спектральной жесткости выходит на плато, что является наряду с вигнеровским распределением МЧ-интервалов признаком КХ. Получены также данные о корреляции между МЧ-интервалами, которые согласуются с теорией случайных матриц: $C(1) = -0,258$ для резонатора в условиях КХ и $C(1) = -0,005$ для того же резонатора, но в отсутствие сингулярных возмущений, когда система регулярна.

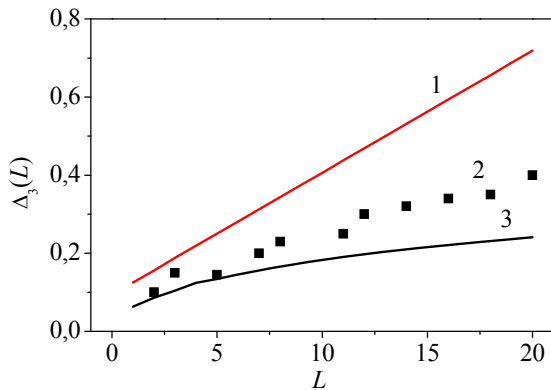


Рис. 5. Кривая спектральной жесткости $\Delta_3(L)$ для резонатора с H -модой колебаний в условиях КХ (10 стержней-сингулярных возмущений). L – длина спектрального интервала для расчета спектральной жесткости; 1 – для регулярной интегрируемой системы $\Delta_3(L) = L/15$; 2 – данные эксперимента; 3 – функция спектральной жесткости для системы, соответствующей гауссовому ортогональному ансамблю, $\Delta_3(L) = (1/\pi^2)\ln L - 0,00687$ [14]

Выводы. В работе экспериментально изучено возникновение КХ в квазиоптическом цилиндрическом резонаторе под воздействием сингулярных возмущений. Такие возмущения создавались в резонаторе с помощью вставленных в него тонких металлических стержней. Установлено, что возмущения вызывают сильные изменения в статистических свойствах спектра резонатора. Регулярный спектр резонатора, имеющий пуассоновское распределение МЧ-интервалов, под воздействием сингулярных возмущений преобразуется в вигнеровский, который отвечает КХ. Для реализации такого преобразования необходимо, чтобы общее сингулярное возмущение было достаточно велико для полной хаотизации спектра резонатора. Изучены основные спектральные свойства резонатора с сингулярными возмущениями: распределение МЧ-интервалов, спектральная жесткость, корреляция между спектральными линиями в условиях КХ. Таким образом, при возрастании сингулярных возмущений в резонаторе возникает хаотизация его спектра и проявляются признаки КХ.

Автор благодарен З. Е. Еременко за разработку компьютерной программы для измерений спектра резонатора.

Библиографический список

1. Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос: введение / Х.-Ю. Штокман; пер. с англ. под ред. В. Я. Демиховского. – М.: Физматлит, 2004. – 378 с.
2. Ganapolskii E. M. Spectral properties of cylindrical quasi-optical cavity resonator with random inhomogeneous side boundary / E. M. Ganapolskii, Yu. V. Tarasov, L. D. Shostenko // Phys. Rev. E. – 2011. – 84, N 2. – P. 026209(15 p.).
3. Ganapolskii E. M. Effect of random surface inhomogeneities on spectral properties of dielectric-disk microresonators: Theory and modeling at milli-meter wave range / E. M. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, Yu. V. Tarasov // Phys. Rev. E. – 2009. – 79, N 4. – P. 041136(14 p.).
4. Ganapolskii E. M. Influence of random bulk inhomogeneities on quasi-optical cavity resonator spectrum / E. M. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, Yu. V. Tarasov // Phys. Rev. E. – 2007. – 75, N 2. – P. 026212(13 p.).
5. Гуревич Б. М. Эргодическая теория // Физическая энциклопедия: в 5 т. Т. 5; под ред. А. М. Прохорова / Б. М. Гуревич. – М.: Большая Рос. энцикл., 1998. – С. 625–636.
6. Ганапольский Е. М. О признаках квантового хаоса в рассеивающей бильярдной К-системе с изломами боковой границы / Е. М. Ганапольский // Письма в журн. эксперим. и теорет. физики. – 2012. – 96, вып. 7. – С. 504–508.
7. Shigehara T. Conditions for the appearance of wave chaos in quantum singular systems with a pointlike scatterer / T. Shigehara // Phys. Rev. E. – 1994. – 50, N 6. – P. 4357–4370.
8. Shigehara T. Wave chaos in quantum billiards with a small but finite-size scatterer / T. Shigehara, T. Cheon // Phys. Rev. E. – 54, N 2. – P. 1321–1331.
9. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем / Г. М. Заславский. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
10. Feingold M. Distribution of matrix elements of chaotic systems / M. Feingold, A. Peres // Phys. Rev. A. – 1986. – 34, iss. 1. – P. 591–595.
11. Ландау Л. Д. Лекции по теории атомного ядра / Л. Д. Ландау, Я. С. Смородинский. – М.: ГТТЛ, 1955. – 140 с.
12. Ганапольский Е. М. Межмодовое рассеяние как источник квантового хаоса в микроволновом резонаторе с сингулярным возмущением / Е. М. Ганапольский, Ю. В. Тарасов // Радиофизика и электрон. – 2013. – 4(18), № 4. – С. 34–39.
13. Reichl L. E. The Transition to chaos: Conservative classical systems and quantum manifestations / L. E. Reichl. – N. Y.: Springer-Verlag, 2004. – 675 p.
14. Елютин П. В. Проблема квантового хаоса / П. В. Елютин // Успехи физ. наук. – 1988. – 155, вып. 3 – С. 397–442.

Рукопись поступила 26.06.2014.

Е. М. Ganapolskii

EMERGENCE OF QUANTUM (WAVE) CHAOS IN CYLINDRICAL CAVITIES WITH A SINGULAR PERTURBATION

Frequency spectra of quasi-optical cylindrical micro-wave resonator with housed thin metal rods, which act as singular perturbations, are experimentally studied in the frequency range 26...38 GHz. The dependence of the spectrum character on the number of rods perturbations is determined. It is found that the Poisson distribution of inter-frequency intervals is observed when there are a small number of perturbations in the spectrum. This indicates that in this case the system is quasiregular and there are signs of quantum chaos (QC) in it. However, when the number of singularity increases, the system spectrum changes qualitatively: the distribution of inter-frequency intervals is close to the Wagner distribution, which indicates the appearance of levels "repulsion" in the spectrum and the presence of QC in the systems. Thus, it is

experimentally established that QC occurs in quasiregular system only when there is a sufficiently large number of singular perturbations.

Key words: quantum (wave) chaos, singular perturbation, the cylindrical microwave resonator, thin metal rod in the cavity is a source of singular perturbation, inter-frequency interval, the Poisson distribution, the Wigner distribution.

Є. М. Ганапольський

ВИНИКНЕННЯ КВАНТОВОГО (ХВИЛЬОВОГО) ХАОСУ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗОНАТОРІ З СИНГУЛЯРНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

У діапазоні частот 26...38 ГГц експериментально вивчено частотні спектри квазіоптичного циліндричного НВЧ-резонатора зі вставленими в нього тонкими металевими

стрижнями, що грають роль сингулярних збурень. Визначено залежність характеру спектра від числа стрижнів-збурень в резонаторі. Встановлено, що при малому числі збурень в спектрі спостерігається пуассонівський розподіл міжчастотних (МЧ) інтервалів. Це свідчить про те, що в даному випадку система є квазірегулярною і в ній не спостерігаються ознаки квантового (хвильового) хаосу (КХ). Проте при зростанні числа сингулярностей спектр системи якісно змінюється: розподіл МЧ-інтервалів наближається до вігнерівського, яке свідчить про появу ефекта «відштовхування» рівнів у спектрі та присутність у системі КХ. Таким чином, експериментально встановлено, що КХ виникає в квазірегулярній системі лише при досить великому числі сингулярних збурень.

Ключові слова: квантовий (хвильовий) хаос, сингулярне збурення, циліндричний НВЧ-резонатор, тонкий металевий стрижень в резонаторі – джерело сингулярного збурення, МЧ-інтервал, пуассонівський розподіл, вігнерівський розподіл МЧ-інтервалів.