

А. В. Дормидонтов, Ю. В. Прокопенко, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко
 Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
 12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
 E-mail: yakovenko@ire.kharkov.ua

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО СПИРАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Одной из актуальных проблем современной радиофизики и электроники является исследование механизмов генерации электромагнитных волн при движении заряженных частиц в различных электродинамических системах. При этом к числу принципиально важных характеристик возможного процесса генерирования относятся потери энергии одной частицы в единицу времени на возбуждение в системе собственных колебаний. Знание потерь энергии позволяет найти инкременты и определить пороговые условия неустойчивости колебаний при движении потоков заряженных частиц в системе. С использованием уравнений Максвелла на основе комплексного подхода (аналитического и численного) нами найдены потери энергии заряженной частицы, движущейся по спиральной траектории над поверхностью цилиндра, который представляет собой диэлектрик или металл. Сформулированы условия, при которых возникает магнитно-тормозное излучение электромагнитных волн в системе. Результаты исследований расширяют и систематизируют знания (наши представления) о механизмах генерирования электромагнитных волн в электродинамических системах, составляющих основу микроволновых генераторов. Ил. 9. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: излучение Вавилова–Черенкова, магнитно-тормозное излучение, магнитно-циклотронный резонанс, потери энергии частицы на излучение.

Для создания источников электромагнитного излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов большой интерес представляют пучковые неустойчивости, возникающие в электродинамических системах различного рода. В последнее время особое внимание уделяется многоволновым черенковским генераторам поверхностных волн [1, 2] и автоколебательным системам на основе диэлектрических резонаторов [3–5]. Так, совсем недавно в работе [3] было обнаружено электромагнитное излучение в 8-мм диапазоне длин волн при прохождении азимутально-периодического (многоструйного) электронного пучка над цилиндрическим диэлектрическим резонатором. Очевидно, что излучение электромагнитных волн обусловлено возбуждением собственных колебаний диэлектрического резонатора волнами пространственного заряда электронного пучка в магнитном поле. Для понимания механизма этого излучения, безусловно, заслуживают внимания исследования потерь энергии заряженной частицы, движущейся по спиральной траектории над поверхностью диэлектрического цилиндра, на возбуждение собственных электромагнитных волн в нем. Этому вопросу и посвящена предлагаемая работа.

1. Постановка задачи. Исходные уравнения. Пусть частица с зарядом e и массой m (электрон) движется с поступательной скоростью v_z по винтовой линии с радиусом $\rho = \rho_0$ над цилиндром с радиусом $\rho = \rho_1$, ось которого направлена вдоль оси Z (рис. 1). Плотность заряда $Q(\vec{r}, t)$, создаваемого частицей, можно представить в виде произведений δ -функций $Q(\vec{r}, t) = e\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$.

Здесь $z_0 = v_z t$; $x_0 \equiv x_0(t) = \rho_0 \cos \omega_H t$ и $y_0 \equiv y_0(t) = -\rho_0 \sin \omega_H t$, в которых $\rho_0 = -v_\phi / \omega_H$ – радиус вращения частицы; $\omega_H = (eH_0 / mc)\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ – циклотронная частота частицы, движущейся со скоростью $v = \sqrt{v_z^2 + v_\phi^2}$; v_ϕ – скорость вращательного движения частицы в плоскости XY ; H_0 – напряженность внешнего постоянного магнитного поля, параллельного оси Z ; c – скорость света.

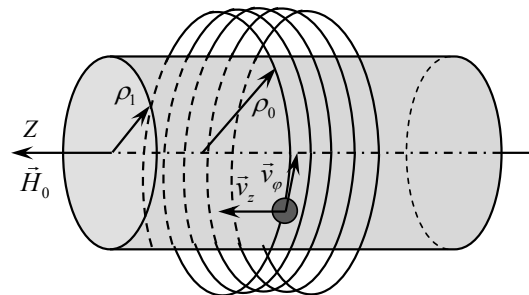


Рис. 1. Движение заряженной частицы в магнитном поле над цилиндром

Плотность тока, создаваемого заряженной частицей, определяется формулой $\vec{j} = \vec{v}Q(\vec{r}, t)$. (1)

Его составляющие в цилиндрической системе координат имеют вид $j_\rho = 0$, $j_\phi = v_\phi Q(\vec{r}, t)$ и $j_z = v_z Q(\vec{r}, t)$.

Электромагнитные поля \vec{E} и \vec{H} , создаваемые движущейся частицей, находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi Q(\vec{r}, t); & \frac{\partial Q(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Электрическая индукция поля \vec{D} в точке с радиус-вектором \vec{r} в момент времени t без учета пространственной дисперсии определяется материальным уравнением $\vec{D} = \int_{-\infty}^t \hat{\varepsilon}(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt'$, где $\hat{\varepsilon}(t)$ – параметр, характеризующий электромагнитные свойства изотропной среды.

Учитывая свойства дельта-функции Дирака, плотность заряда $Q(\vec{r}, t)$ представим в виде набора пространственно-временных гармоник

$$Q(\vec{r}, t) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i[q_x(x-x_0) + q_y(y-y_0) + q_z(z-v_z t)] dq_x dq_y dq_z.$$

В цилиндрической системе координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $q_x = \kappa \cos \varphi'$ и $q_y = \kappa \sin \varphi'$, где φ – угол между вектором $\vec{\rho}$ и осью x ; φ' – угол между вектором $\vec{\kappa}$ и осью x . Тогда $Q(\vec{r}, t)$ можно привести к виду

$$Q(\vec{r}, t) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_0^{\infty} d\kappa \int_0^{2\pi} d\varphi' \kappa \exp i\{q_z(z-v_z t) + \kappa[\rho \cos(\varphi' - \varphi) - \rho_0 \cos(\varphi' + \omega_H t)]\} d\varphi'.$$

Используя соотношение $\exp(i\kappa\rho \cos \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\kappa\rho) \exp(-in\alpha)$ [6], где $J_n(\kappa\rho)$ – функция Бесселя n -го порядка, получим

$$Q(\vec{r}, t) = \frac{e}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa J_n(\kappa\rho) J_n(\kappa\rho_0) d\kappa \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp i[q_z(z-v_z t) + n\varphi + n\omega_H t] dq_z.$$

Принимая во внимание, что $\int_0^{\infty} \kappa J_n(\kappa\rho) J_n(\kappa\rho_0) d\kappa = \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\sqrt{\rho_0 \rho}}$ [7], а $\exp[-i(q_z v_z - n\omega_H)t] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \delta(\omega - q_z v_z + n\omega_H) d\omega$, плотность заряда $Q(\vec{r}, t)$ можно записать следующим образом

$$Q(\vec{r}, t) = \frac{e}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\sqrt{\rho_0 \rho}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \times \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - q_z v_z + n\omega_H) \exp i(q_z z + n\varphi - \omega t) d\omega. \quad (3)$$

Поля, входящие в уравнения (2), также представим как набор пространственно-временных гармоник, например:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(\rho, \omega, q_z) \times \exp i(q_z z + n\varphi - \omega t) d\omega. \quad (4)$$

Отметим, что $\vec{E}_n(\rho, \omega, q_z) = \vec{E}_{-n}^*(\rho, -\omega, -q_z)$, где «*» указывает на комплексно-сопряженную величину. Из уравнений (2) следует, что продольные компоненты электрического E_{zn} и магнитного H_{zn} полей определяются решениями уравнений

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} E_{zn} + \left(q^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) E_{zn} = 4\pi i \left(\frac{q_z}{\varepsilon} - \frac{\omega v_z}{c^2}\right) Q_n; \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} H_{zn} + \left(q^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) H_{zn} = -4\pi \frac{v_\varphi}{c\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho Q_n). \quad (6)$$

Здесь

$$Q_n \equiv Q_n(\rho, q_z, \omega) = \frac{e}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\sqrt{\rho_0 \rho}} \delta(\omega - q_z v_z + n\omega_H);$$

$$q^2 = \varepsilon \omega^2 / c^2 - q_z^2; \quad \varepsilon = \int_0^{\infty} \hat{\varepsilon}(\tau) \exp i\omega \tau d\tau - \text{диэлектрическая}$$

проницаемость среды. Если временная (частотная) дисперсия отсутствует, то $\hat{\varepsilon}(\tau) = \varepsilon \delta(\tau)$.

Для нахождения потерь энергии частицы необходимо из уравнений (5) и (6) найти поля, создаваемые частицей в безграничной среде (т. е. поля волн, падающих на границу раздела сред), а также поля волн, отраженных от поверхности цилиндра (поля излучения). Затем значения этих полей в точке нахождения частицы $\rho = \rho_0$, $\varphi = |\omega_H| t$ и $z = v_z t$ подставить в формулу для изменения энергии частицы в единицу времени

$$\frac{dW}{dt} = e \vec{v} \vec{E}(\rho_0, |\omega_H| t, v_z t). \quad (7)$$

Следует отметить, что при потерях энергии заряженной частицы на возбуждение электромагнитных волн в однородной среде выполняются законы сохранения энергии и импульса

$$W_1 = W_2 + \hbar \omega; \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \hbar \vec{q}.$$

Здесь W_i и p_i – энергия и импульс частицы ($i=1; 2$); $\hbar \omega$ и $\hbar \vec{q}$ – энергия и импульс кванта электромагнитного поля, излучаемого частицей; \vec{q} – волновой вектор; \hbar – постоянная Планка.

Легко убедиться, что при прямолинейном движении заряженной частицы эти законы сводятся к выполнению условий излучений Вавилова–Черенкова. Хорошо известно, что они реализуются, если скорость частицы превышает фазовую скорость электромагнитной волны в среде. Однако в постоянном магнитном поле, когда частица движется по спиральной траектории, законы сохранения выполняются в вакууме (магнитно-тормозное излучение) [8].

2. Поля частицы. Из уравнений (5) и (6) следует, что в областях $\rho < \rho_0$ (область 1) и $\rho > \rho_0$ (область 2) при удовлетворении условию конечности поля на оси винтовой траектории движения частицы (при $\rho \rightarrow 0$) и условию излучения на бесконечность (при $\rho \rightarrow \infty$) аксиальные компоненты электромагнитного поля выражаются через цилиндрические функции n -го порядка Бесселя $J_n(q\rho)$ и Ганкеля $H_n(q\rho)$ первого рода $H_n^{(1)}(q\rho)$ при $\omega > 0$ или второго рода $H_n^{(2)}(q\rho)$ при $\omega < 0$.

При $q^2 > 0$ решения уравнений (5) и (6) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{1zn} &= C_1 J_n(q\rho), \quad H_{1zn} = F_1 J_n(q\rho), \quad \rho < \rho_0, \\ E_{2zn} &= C_2 H_n(q\rho), \quad H_{2zn} = F_2 H_n(q\rho), \quad \rho > \rho_0. \end{aligned} \quad (8)$$

При $q^2 < 0$ решения уравнений (5) и (6) выражаются цилиндрическими модифицированными функциями Бесселя и Макдональда

$$\begin{aligned} E_{1zn} &= C_1 I_n(k\rho), \quad H_{1zn} = F_1 I_n(k\rho), \quad \rho < \rho_0, \\ E_{2zn} &= C_2 K_n(k\rho), \quad H_{2zn} = F_2 K_n(k\rho), \quad \rho > \rho_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $k^2 = -q^2 = q_z^2 - \varepsilon\omega^2/c^2$.

Азимутальные компоненты поля частицы определяются через аксиальные E_{zn} и H_{zn} следующим образом:

$$H_{\varphi n} = \frac{i\omega}{cq^2} \varepsilon \frac{\partial E_{zn}}{\partial \rho} - \frac{nq_z}{\rho q^2} H_{zn}; \quad (10)$$

$$E_{\varphi n} = -\frac{nq_z}{\rho q^2} E_{zn} - \frac{i\omega}{cq^2} \frac{\partial H_{zn}}{\partial \rho}. \quad (11)$$

Неизвестные константы C_1, C_2, F_1, F_2 определяются из граничных условий на поверхности $\rho = \rho_0$, где непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля E_{zn} и $E_{\varphi n}$, а компоненты магнитного поля H_{zn} и $H_{\varphi n}$ претерпевают разрыв. Разрывы вызваны токами $j_{zn} = v_z Q_n$ и $j_{\varphi n} = v_\varphi Q_n$, а их величины находятся в результате интегрирования уравнений Максвелла по ρ . Таким образом, получим

$$H_{1zn}(\rho_0) - H_{2zn}(\rho_0) = \frac{ev_\varphi}{\pi c\rho_0} \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z),$$

$$H_{1\varphi n}(\rho_0) - H_{2\varphi n}(\rho_0) = \frac{ev_z}{\pi c\rho_0} \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z).$$

Система уравнений для нахождения констант при $q^2 > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_1 J_n(q\rho_0) - C_2 H_n(q\rho_0) &= 0, \\ C_1 J'_n(q\rho_0) - C_2 H'_n(q\rho_0) &= \\ &= \frac{ie}{\pi\rho_0 q} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - \frac{q_z}{\varepsilon} \right) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z), \\ F_1 J'_n(q\rho_0) - F_2 H'_n(q\rho_0) &= 0, \\ F_1 J_n(q\rho_0) - F_2 H_n(q\rho_0) &= \\ &= \frac{ev_\varphi}{\pi c\rho_0} \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z), \end{aligned} \quad (12)$$

где штрих означает производную функции по ее аргументу. Из (12) находим

$$\begin{aligned} C_1 &= \\ &= \frac{e}{2} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - \frac{q_z}{\varepsilon} \right) H_n(q\rho_0) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z), \\ F_1 &= -\frac{iev_\varphi}{2c} H'_n(q\rho_0) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z). \end{aligned} \quad (13)$$

Для $q^2 < 0$

$$\begin{aligned} C_1 &= \\ &= \frac{ie}{2} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - \frac{q_z}{\varepsilon} \right) K_n(k\rho_0) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z), \\ F_1 &= -\frac{iekv_\varphi}{2c} K'_n(k\rho_0) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z). \end{aligned} \quad (14)$$

3. Поля излучения. При движении заряженной частицы над цилиндром ее поля испытывают отражение и преломление на границе раздела сред. Возникают так называемые поля излучения. В цилиндре компоненты поля связаны между собой соотношениями (10) и (11), в которых следует заменить диэлектрическую проницаемость ε на диэлектрическую проницаемость цилиндра ε_1 , а q^2 на $q_1^2 = \varepsilon_1 \omega^2 / c^2 - q_z^2$ ($q_1^2 > 0$). Диэлектрическая проницаемость ε_1 , в принципе, может обладать частотной дисперсией. Считаем, что магнитное поле H_0 не оказывает влияния на зависимость ε_1 от частоты, т. е. циклотронная частота электронов проводимости меньше характерных частот среды с ε_1 .

Зависимости компонент E_{zn} и H_{zn} от радиуса находятся, соответственно, из уравнений (5) и (6), в которых q^2 заменяется на q_1^2 и $Q_n = 0$. В результате получаем

$$E_{zn} = A_1 J_n(q_1 \rho), \quad H_{zn} = B_1 J_n(q_1 \rho). \quad (15)$$

Такая зависимость поля от радиуса выбрана с учетом условий его конечности при $\rho \rightarrow 0$.

В области $\rho_1 \leq \rho < \rho_0$ наряду с полями частицы, которым в дальнейшем приписываем верхний индекс e , существуют поля, отраженные от поверхности цилиндра. Как обусловлено видом δ -функции в выражениях (13) и (14), зависимость поля частицы от координаты z пропорциональна $\exp iz(\omega - n|\omega_H|)/v_z$, где учтен отрицательный заряд частицы в циклотронной частоте. В таком же виде ищем зависимость поля излучения от координаты z . Поскольку $q_z = (\omega - n|\omega_H|)/v_z$, то q^2 может быть положительной или отрицательной величиной. Это определяется номером гармоники циклотронной частоты, который соответствует порядку n цилиндрической функции. Если $q^2 > 0$ (в вакууме это условие реализуется, если $\beta^2 > (1 + n\omega_H/\omega)^2$, где $\beta = v_z/c$), то поля излучения описываются функциями Ганкеля первого рода, убывающими с осцилляциями при $\rho \rightarrow \infty$. Тогда в области $\rho_1 \leq \rho < \rho_0$ аксиальные компоненты поля имеют вид

$$E_{zn} = E_{zn}^e + AH_n(q\rho), \quad H_{zn} = H_{zn}^e + BH_n(q\rho),$$

в которых компоненты поля частицы E_{zn}^e и H_{zn}^e определяются соотношениями (8) с учетом постоянных C_1 и F_1 (13):

$$\begin{aligned} E_{zn}^e &= -\frac{e}{2} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - \frac{q_z}{\varepsilon} \right) \times \\ &\times H_n(q\rho_0) J_n(q\rho) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z), \\ H_{zn}^e &= \\ &= -\frac{e}{2} \frac{v_\varphi q}{c} H'_n(q\rho_0) J_n(q\rho) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z). \end{aligned} \quad (16)$$

При $q^2 < 0$, когда поля излучения описываются экспоненциально-убывающими функциями Макдональда, имеем

$$E_{zn} = E_{zn}^e + AK_n(k\rho), \quad H_{zn} = H_{zn}^e + BK_n(k\rho), \quad (17)$$

где E_{zn}^e и H_{zn}^e определяются соотношениями (9) с учетом постоянных C_1 и F_1 (14).

Константы A_1 , B_1 , A и B определяются из граничных условий – непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на цилиндрической поверхности $\rho = \rho_1$. При $q^2 > 0$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} AH_n(q\rho_1) + E_{zn}^e(\rho_1) &= A_1 J_n(q_1\rho_1), \\ BH_n(q\rho_1) + H_{zn}^e(\rho_1) &= B_1 J_n(q_1\rho_1), \\ -A \frac{nq_z}{q^2 \rho_1} H_n(q\rho_1) - B \frac{i\omega}{cq} H'_n(q\rho_1) + E_{\varphi n}^e(\rho_1) &= \\ = -A_1 \frac{nq_z}{q_1^2 \rho_1} J_n(q_1\rho_1) - B_1 \frac{i\omega}{cq_1} J'_n(q_1\rho_1), \\ A \frac{i\omega}{cq} \varepsilon H'_n(q\rho_1) - B \frac{nq_z}{q^2 \rho_1} H_n(q\rho_1) + H_{\varphi n}^e(\rho_1) &= \\ = A_1 \frac{i\omega}{cq_1} \varepsilon_1 J'_n(q_1\rho_1) - B_1 \frac{nq_z}{q_1^2 \rho_1} J_n(q_1\rho_1). \end{aligned} \quad (18)$$

В результате решения системы уравнений (18) находим, что

$$A = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n}, \quad B = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n}. \quad (19)$$

Главный Δ_n и вспомогательные Δ_{1n} и Δ_{2n} определители системы (18) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_n &= H_n^2(q\rho_1) \times \\ &\times \left\{ \frac{n^2 q_z^2}{\rho_1^2} \left(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{q} \frac{H'_n(q\rho_1)}{H_n(q\rho_1)} \right] \left[\frac{\varepsilon_1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} - \frac{\varepsilon}{q} \frac{H'_n(q\rho_1)}{H_n(q\rho_1)} \right] \right\}, \\ \Delta_{1n} &= H_n(q\rho_1) \left\{ \frac{nq_z}{\rho_1} \left(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q^2} \right) f_{1n} + \right. \\ &\left. + \frac{i\omega}{c} \left[\frac{1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} - \frac{1}{q} \frac{H'_n(q\rho_1)}{H_n(q\rho_1)} \right] f_{2n} \right\}, \\ \Delta_{2n} &= H_n(q\rho_1) \left\{ -\frac{nq_z}{\rho_1} \left(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q^2} \right) f_{2n} + \right. \\ &\left. + \frac{i\omega}{c} \left[\frac{\varepsilon_1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} - \frac{\varepsilon}{q} \frac{H'_n(q\rho_1)}{H_n(q\rho_1)} \right] f_{1n} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1n} &= -E_{\varphi n}^e(\rho_1) - \frac{nq_z}{q_1^2 \rho_1} E_{zn}^e(\rho_1) - \\ &- \frac{i\omega}{cq_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} H_{zn}^e(\rho_1); \\ f_{2n} &= H_{\varphi n}^e(\rho_1) + \frac{nq_z}{q_1^2 \rho_1} H_{zn}^e(\rho_1) - \\ &- \frac{i\omega}{cq_1} \frac{\varepsilon_1 J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} E_{zn}^e(\rho_1). \end{aligned}$$

При $q^2 < 0$ составляющие поля E_{zn} и H_{zn} описываются следующими формулами: в цилиндре – (15),

вне цилиндра – (17). Тогда в (19) определители Δ_n , Δ_{1n} и Δ_{2n} приобретают вид

$$\begin{aligned} \Delta_n &= K_n^2(k\rho_1) \times \\ &\times \left\{ \frac{n^2 q_z^2}{\rho_1^2} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{k^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{k} \frac{K'_n(k\rho_1)}{K_n(k\rho_1)} \right] \left[\frac{\varepsilon_1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} + \frac{\varepsilon}{k} \frac{K'_n(k\rho_1)}{K_n(k\rho_1)} \right] \right\}, \\ \Delta_{1n} &= K_n(k\rho_1) \left\{ \frac{nq_z}{\rho_1} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{k^2} \right) f_{1n} + \right. \\ &\left. + \frac{i\omega}{c} \left[\frac{1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} + \frac{1}{k} \frac{K'_n(k\rho_1)}{K_n(k\rho_1)} \right] f_{2n} \right\}, \\ \Delta_{2n} &= K_n(k\rho_1) \left\{ -\frac{nq_z}{\rho_1} \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{k^2} \right) f_{2n} + \right. \\ &\left. + \frac{i\omega}{c} \left[\frac{\varepsilon_1}{q_1} \frac{J'_n(q_1\rho_1)}{J_n(q_1\rho_1)} + \frac{\varepsilon}{k} \frac{K'_n(k\rho_1)}{K_n(k\rho_1)} \right] f_{1n} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

4. Потери энергии частицы. Если диэлектрические проницаемости ε_1 и ε не обладают частотной дисперсией, то в такой системе существуют собственные колебания только в случае, когда $q_1^2 > 0$. Дисперсионное уравнение собственных колебаний находится из условия $\Delta_n = 0$.

Потери энергии W частицы на излучение в единицу времени t определяются выражением (7). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(v_z - \frac{nq_z v_\varphi}{\rho_0 q^2} \right) E_{zn}^e(\rho_0, q_z, \omega) - \right. \\ &\left. - i \frac{\omega v_\varphi}{cq} H'_{zn}(\rho_0, q_z, \omega) \right] dq_z. \end{aligned}$$

В этой формуле E_{zn} и H_{zn} являются суперпозицией поля частицы и поля излучения.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(v_z - \frac{nq_z v_\varphi}{\rho_0 q^2} \right) E_{zn}^e(\rho_0, q_z, \omega) - \right. \\ &\left. - i \frac{\omega v_\varphi}{cq} H'_{zn}(\rho_0, q_z, \omega) + \right. \\ &\left. + \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} \left(v_z - \frac{nq_z v_\varphi}{\rho_0 q^2} \right) H_n(q\rho_0) - \right. \\ &\left. - i \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \frac{\omega v_\varphi}{cq} H'_n(q\rho_0) \right\} dq_z. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегрирование распространяется на область частот, где выполняется условие $q_1^2 > 0$. Первое и второе слагаемое в фигурной скобке описывают потери энергии частицы на возбуждение полей в безграничной среде. Третье и четвертое слагаемое определяют потери энергии частицы на возбуждение волн в цилиндре. При этом

$$\frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} H_n(q\rho_0) = E_{zn}(\rho_0), \quad \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} H_n(q\rho_0) = H_{zn}(\rho_0)$$

являются значениями продольных спектральных компонент полей в точке нахождения частицы, порожденных отраженными волнами от поверхности цилиндра $\rho = \rho_1$.

4.1. Прежде всего рассмотрим потери энергии частицы (dW'/dt) на возбуждение волн в безграничной среде. Используя выражения (16) для компонент E_{zn}^e и H_{zn}^e , получим

$$\begin{aligned} \frac{dW'}{dt} &= -\frac{e^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\omega v_z}{c^2} - \frac{q_z}{\varepsilon} \right) \times \right. \\ &\times \left(v_z - \frac{nq_z v_\varphi}{\rho_0 q^2} \right) J_n(q\rho_0) H_n(q\rho_0) - \frac{\omega v_\varphi^2}{c^2} \times \\ &\times \left. \left. J'_n(q\rho_0) H'_n(q\rho_0) \right] \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z) dq_z. \end{aligned} \quad (23)$$

В формуле (23) перейдем к суммированию и интегрированию по положительным значениям n , q_z и ω , принимая во внимание, что согласно [9]

$$H_n(q\rho) \equiv \begin{cases} H_n^{(1)}(q\rho) = J_n(q\rho) + iN(q\rho), & \omega > 0, \\ H_n^{(2)}(q\rho) = J_n(q\rho) - iN(q\rho), & \omega < 0, \end{cases} \quad (24)$$

где $N(q\rho)$ – функция Неймана. Проинтегрировав выражение (23) по q_z , при $\beta^2 \varepsilon > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{dW'}{dt} &= -\frac{e^2}{v_z} \int_0^\infty \frac{\omega}{\varepsilon} \left\{ \left[(\beta^2 \varepsilon - 1) J_0^2(x_0) + \frac{v_\varphi^2}{c^2} J_0'^2(x_0) \right] + \right. \\ &+ \sum_n \left\{ \frac{\left[\beta^2 \varepsilon - \left(1 + \frac{n\omega_H}{\omega} \right) \right]^2}{\beta^2 \varepsilon - \left(1 + \frac{n\omega_H}{\omega} \right)^2} J_n^2(x_1) + \frac{v_\varphi^2}{c^2} J_n'^2(x_1) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\left[\beta^2 \varepsilon - \left(1 - \frac{n\omega_H}{\omega} \right) \right]^2}{\beta^2 \varepsilon - \left(1 - \frac{n\omega_H}{\omega} \right)^2} J_n^2(x_2) + \frac{v_\varphi^2}{c^2} J_n'^2(x_2) \right\} \right\} d\omega, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$x_0 = \frac{v_\varphi}{v_z} \frac{\omega}{|\omega_H|} \sqrt{\beta^2 \varepsilon - 1}; \quad x_1 = \frac{v_\varphi}{v_z} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_H^2} \beta^2 \varepsilon - \left(n + \frac{\omega}{\omega_H} \right)^2};$$

$$x_2 = \frac{v_\varphi}{v_z} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_H^2} \beta^2 \varepsilon - \left(n - \frac{\omega}{\omega_H}\right)^2}. \quad \text{Формула (25)}$$

справедлива, когда x_1 и x_2 являются вещественными. Это означает, что магнитно-тормозное излучение частицы реализуется в ограниченном интервале частот и азимутальных волновых чисел n : $1 \leq n \leq n_c$. Для второго слагаемого в выражении (25) $n_c = \omega(\beta\sqrt{\varepsilon} + 1)/|\omega_H|$, а для третьего – $n_c = \omega(\beta\sqrt{\varepsilon} - 1)/|\omega_H|$.

Отметим, что при $q^2 > 0$ формулу (25) можно получить, не прибегая к граничным условиям при $\rho = \rho_0$. Действительно, представим поля частицы в виде разложения по функциям Бесселя ($\rho < \rho_0$):

$$E_{zn}^e = \int_0^\infty \kappa E_{zn}^e(\kappa, q_z, \omega) J_n(\kappa\rho) d\kappa; \quad (26)$$

$$H_{zn}^e = \int_0^\infty \kappa H_{zn}^e(\kappa, q_z, \omega) J_n(\kappa\rho) d\kappa. \quad (27)$$

Такое представление обусловлено тем, что плотность заряда Q_n в уравнениях (5) и (6) можно представить в виде

$$Q_n = \frac{e}{(2\pi)^2} \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z) \int_0^\infty \kappa J_n(\kappa\rho) J_n(\kappa\rho_0) d\kappa.$$

Тогда из уравнений (5) и (6) находим

$$E_{zn}^e(\kappa, q_z, \omega) = \frac{ie}{\pi} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - \frac{q_z}{\varepsilon} \right) J_n(\kappa\rho_0) \frac{\delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z)}{\kappa^2 - q^2}; \quad (28)$$

$$H_{zn}^e(\kappa, q_z, \omega) = -\frac{ev_\varphi \kappa}{\pi c} J_n'(q\rho_0) \frac{\delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z)}{\kappa^2 - q^2}. \quad (29)$$

При интегрировании в (26) и (27) по κ учитываем особенность подынтегральных функций (28) и (29), содержащих полюс $\kappa^2 = q^2 = \varepsilon\omega^2/c^2 - q_z^2$. Обход этой особой точки определяется малой мнимой частью диэлектрической проницаемости ε . В результате при $\varepsilon = 1$ (в вакууме) получим

$$E_{zn}^e = -\frac{e}{2} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - q_z \right) \times \\ \times J_n(q\rho_0) J_n(q\rho) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z), \\ H_{zn}^e = -i \frac{e v_\varphi}{2 c} \frac{\partial J_n(q\rho_0)}{\partial \rho_0} J_n(q\rho) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z).$$

Видно, что эти поля немного отличаются от выражений (16). Однако, имея в виду соотноше-

ние (24), можно убедиться, что согласно (4) поля $\vec{E}(\rho, t)$ и $\vec{H}(\rho, t)$ совпадают в обоих случаях.

Отметим, что выражение (25) отличается от результатов Дж. Бекефи (формула 6.15 [10]) тем, что в нем найдены потери энергии частицы как на черенковское излучение $\beta^2 \varepsilon > 1$, так и на магнитно-тормозное излучение. При $v_\varphi = 0$ и $\rho_0 = v_\varphi / |\omega_H| = 0$ мы получим выражение для потерь энергии частицы в единицу времени, аналогичное формуле (115.3), приведенной в книге [11]. В принципе, может быть реализован случай, когда $v_\varphi = 0$, но ρ_0 отлично от нуля (имеется в виду заряженное кольцо, движущееся с поступательной скоростью v_z). Тогда формула (25) для потерь энергии заряженного кольца на черенковское излучение принимает вид

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{-e_s^2}{v_z} \int_0^\infty \frac{\omega}{\varepsilon} (\beta^2 \varepsilon - 1) J_0^2(x_0) d\omega, \quad (30)$$

где e_s – заряд кольца. В этом случае возникают особенности потерь энергии в единицу времени на излучение, связанные с поведением квадрата функции Бесселя. Видно, что потери энергии заряженного кольца обращаются в нуль, если $q\rho_0$ совпадает с корнями функции Бесселя нулевого порядка. Зависимость спектральной плотности потерь энергии заряженного кольца в единицу времени (подынтегрального выражения в (30)) представлена на рис. 2. Ее особенность связана с тем, что поле кольца описывается осциллирующей функцией частоты.

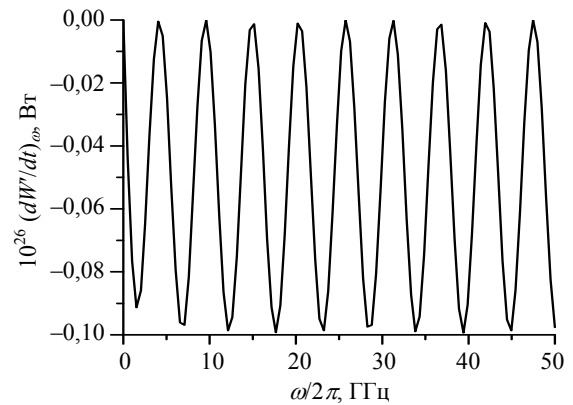


Рис. 2. Частотная зависимость спектральной плотности потерь энергии в единицу времени заряженного кольца с радиусом 4 см, которое движется прямолинейно со скоростью 0,8c в среде с $\varepsilon = 2,04$

Следует обратить внимание, что формула (25) при $\varepsilon = 1$ и $\beta^2 > (1 - n|\omega_H|/\omega)^2$ описывает только магнитно-тормозное излучение заряженной частицы в безграничной среде и приобретает вид

$$\frac{dW'}{dt} = -\frac{e^2}{v_z} \sum_n \int_0^\infty \omega \times \left\{ \frac{\left[\beta^2 - \left(1 + \frac{n\omega_H}{\omega} \right) \right]^2}{\beta^2 - \left(1 + \frac{n\omega_H}{\omega} \right)} J_n^2(x_1) + \frac{v_\varphi^2}{c^2} J_n'^2(x_1) \right\} d\omega. \quad (31)$$

Здесь интегрирование по ω и суммирование по n осуществляются в области, для которой выполняется условие

$$\frac{1 - \beta}{|\omega_H|} < \frac{n}{\omega} < \frac{1 + \beta}{|\omega_H|}. \quad (32)$$

На рис. 3 приведены зависимости гармоник (спектральных составляющих) плотности потерь энергии электрона от его азимутальной

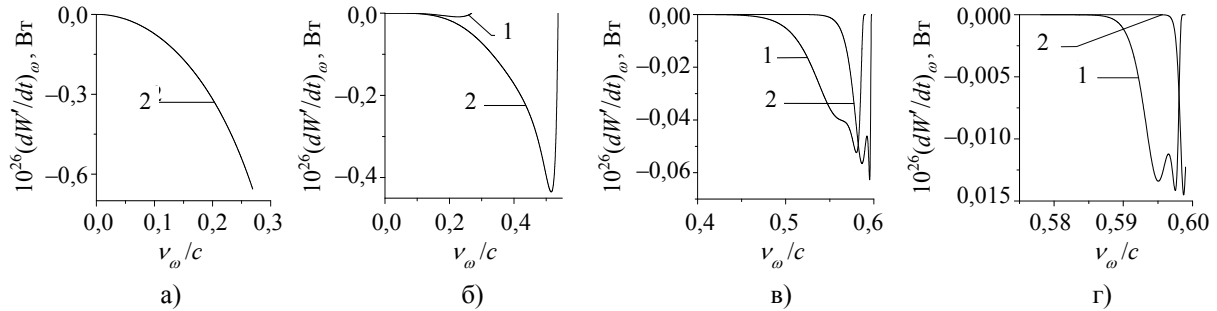


Рис. 3. Зависимости гармоник спектральной плотности потерь энергии электрона на частоте 30 ГГц от его азимутальной скорости: а) – $n = 1$; б) – $n = 2$; в) – $n = 10$; г) – $n = 30$

На рис. 4 приведены зависимости спектральной плотности потерь энергии электрона от величины его азимутальной скорости. Продольная скорость электрона равна $0,8c$. Кривые 1 и 2 соответствуют его движению во внешних продольных магнитных полях с напряженностями 2 и 4 кЭ соответственно. Видно, что спектральная плотность потерь энергии имеет осциллирующий характер. С ростом v_φ вначале потери энергии частицы растут. Однако с некоторых значений v_φ определенный набор гармоник, участвующих в формировании магнитно-тормозного излучения, изменяется. При этом исчезают низшие (с малым индексом n) гармоники, дающие наибольший энергетический вклад в излучение. В результате имеются интервалы скоростей v_φ , в которых потери энергии частицы убывают с ростом v_φ , причем при исчезновении высокоэнергетических гармоник, особенно при движении частицы в большом магнитном поле, наблюдается почти «скачкообразное» убывание потерь ее энергии на излучение. Из рис. 4 видно, что существуют скорости вращательного движения электрона, при

скорости. Электрон движется в вакууме с продольной скоростью $0,8c$ по спиральной траектории в продольном магнитном поле с напряженностью H_0 , равной 2 (кривая 1) или 4 кЭ (кривая 2). Из рисунка следует, что при фиксированных значениях n потери энергии частицы на излучение растут с увеличением ее азимутальной (поперечной) скорости v_φ , причем излучение на высоких гармониках имеет осциллирующий характер. С ростом n уровень потерь энергии частицы уменьшается, а также сужается интервал скорости вращательного движения v_φ , в котором реализуется магнитно-тормозное излучение. При стремлении скорости частицы v к скорости света c потери ее энергии исчезают. Отметим, что каждая гармоника вносит различный вклад в общие потери энергии частицы на излучение.

которых наблюдаются максимумы потерь его энергии на излучение. При скорости электрона $v \rightarrow c$ потери его энергии исчезают. Отметим, что с ростом напряженности внешнего магнитного поля H_0 потери энергии частицы на излучение растут.

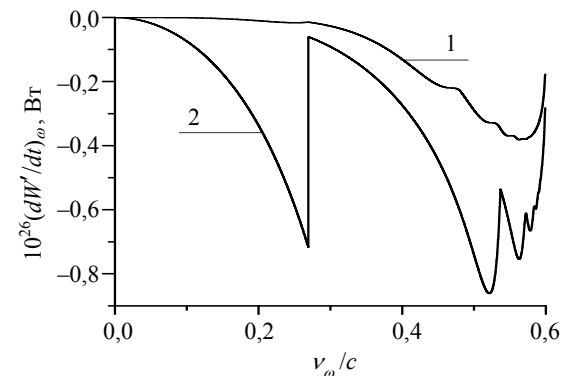


Рис. 4. Зависимости спектральной плотности потерь энергии электрона на частоте 30 ГГц от азимутальной скорости

На рис. 5 приведена зависимость $(dW'/dt)_\omega$ от величины напряженности внешнего

магнитного поля. Электрон движется по спиральной траектории в вакууме с продольной скоростью $0,8c$ и азимутальной скоростью $0,5c$.

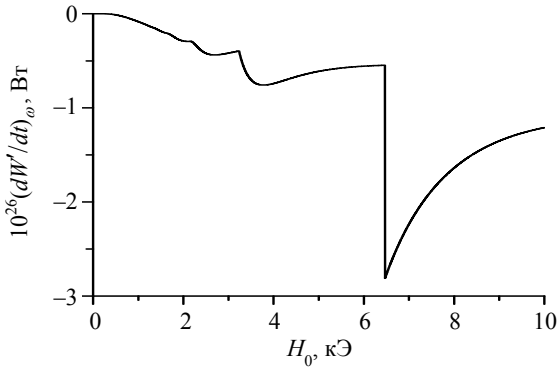


Рис. 5. Зависимость спектральной плотности потерь энергии электрона на частоте 30 ГГц от напряженности внешнего продольного магнитного поля

Как видно, спектральная плотность потерь энергии имеет осциллирующий характер, а средний уровень потерь энергии растет с увеличением H_0 . Это обусловлено тем, что при малых значениях напряженности внешнего магнитного поля в формировании магнитно-тормозного излучения не участвуют низшие (с малым индексом n) гармоники, что следует из условия (32). С ростом H_0 определенный набор гармоник в потерях энергии частицы (31) изменяется, причем появляется энергетический вклад низших гармоник, а исчезает вклад высших гармоник. Появление низших гармоник сопровождается более весомым вкладом в рост потерь энергии частицы на излу-

чение, чем исчезновение вклада высших гармоник в их убывание. В результате имеются интервалы значений напряженности внешнего магнитного поля, в которых наблюдается почти «скачкообразный» рост потерь энергии частицы на магнитно-тормозное излучение.

На рис. 6 приведены зависимости спектральных плотностей потерь энергии электрона (подынтегрального выражения в (31)) на излучение от частоты при его движении в продольных магнитных полях с напряженностями H_0 по спиральным траекториям с ларморовскими радиусами ρ_0 в безграничной среде с $\varepsilon=1$. С ростом частоты излучаемой волны средний уровень потерь энергии частицы в единицу времени вначале возрастает, а затем убывает. При этом, чем больше значение напряженности внешнего магнитного поля, тем шире интервал частот магнитно-тормозного излучения. Ограниченность частотных диапазонов спектральных составляющих (рис. 7) и их неравнозначность вкладов в потери энергии частицы на излучение приводят к осциллирующей зависимости спектральной плотности потерь энергии в единицу времени от частоты. Это особенно проявляется в области низких частот (рис. 6). Максимумы спектральных плотностей потерь энергии частицы, движущейся в вакууме с постоянной продольной скоростью по спиральной траектории, определяются значениями ее азимутальной (поперечной) скорости и напряженности внешнего аксиального магнитного поля и наблюдаются на частотах, близких к частотам, кратным $\omega_H/(1-\beta)$ (рис. 6).

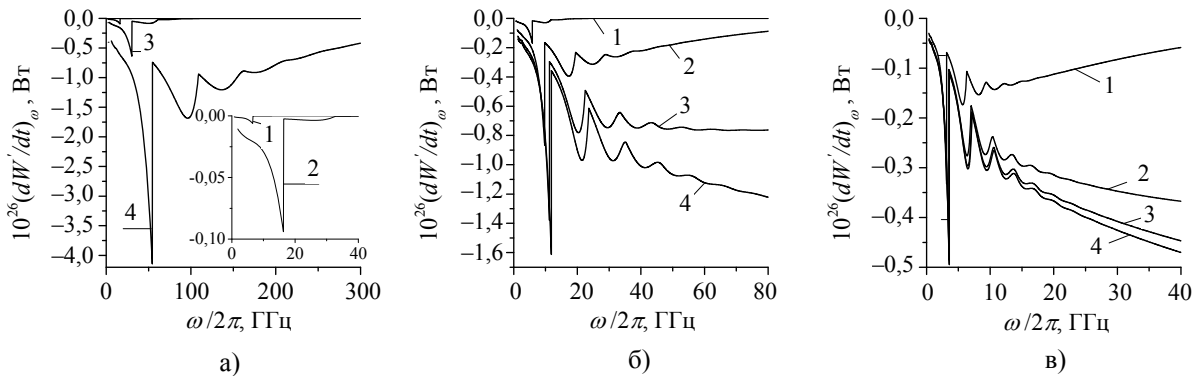


Рис. 6. Зависимости спектральной плотности потерь энергии от частоты излучения электрона, движущегося в вакууме с продольной скоростью $0,8c$ по спиральной траектории с радиусом $\rho_0 = 0,2$ см (а); $1,2$ см (б) и 4 см (в) в продольном магнитном поле с напряженностью H_0 , кЭ: 1 – $0,8$; 2 – 2 ; 3 – 4 ; 4 – 10

На рис. 7 приведены зависимости спектральных составляющих (гармоник) плотности потерь энергии электрона от частоты его магнитно-тормозного излучения в вакууме. Видно, что каждая гармоника вносит энергетический вклад в

потери энергии на излучение в ограниченном интервале частот $\Delta\omega$, который согласно (32) определяется выражением

$$\Delta\omega = \frac{2\beta n |\omega_H|}{1 - \beta^2}.$$

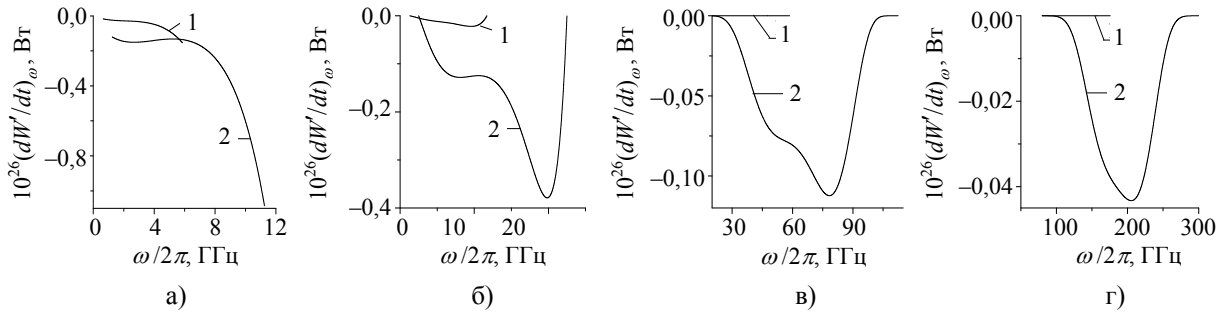


Рис. 7. Зависимости спектральных составляющих ($n = 1$ (а); 2 (б); 10 (в) и 30 (г)) плотности потерь энергии от частоты излучения электрона, движущегося в вакууме с продольной скоростью $0,8c$ по спиральной траектории с радиусом $1,2$ см в продольном магнитном поле с напряженностью H_0 , кЭ: 1 – 0,8; 2 – 4

Отметим, что увеличение напряженности внешнего магнитного поля H_0 приводит к расширению частотного диапазона $\Delta\omega$ и росту уровня потерь энергии электрона в единицу времени. Таким образом, за счет поступательного движения частицы расширяется область частот магнитно-тормозного излучения частицы (расширяется резонансная линия). Для каждой гармоники максимум потерь энергии электрона наблюдаются на частоте, близкой к частоте $n|\omega_H|/(1-\beta)$.

4.2. Обратим внимание на потери энергии частицы, движущейся в вакууме по спирали над идеально проводящим цилиндром. Тангенциальные составляющие поля над поверхностью цилиндра описываются выражениями

$$E_{zn} = AH_n(q\rho) - \frac{e}{2} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - q_z \right) J_n(q\rho_0) \times \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \times J_n(q\rho) \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z); \\ E_{\varphi n} = & -\frac{nq_z}{\rho q^2} AH_n(q\rho) - \frac{i\omega}{cq} BH'_n(q\rho) + \\ & + \frac{e}{2} \left[\frac{nq_z}{q^2 \rho} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - q_z \right) J_n(q\rho_0) J_n(q\rho) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega v_\varphi}{c^2} J'_n(q\rho_0) J'_n(q\rho) \right] \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z). \end{aligned} \quad (34)$$

На поверхности $\rho = \rho_1$ выполняются условия равенства нулю компонент E_{zn} и $E_{\varphi n}$. Из этих условий определяются константы A и B , которые имеют вид

$$\begin{aligned} A = & \frac{e}{2} \left(\frac{\omega v_z}{c^2} - q_z \right) \times \\ & \times \frac{J_n(q\rho_0) J_n(q\rho_1)}{H_n(q\rho_1)} \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z), \\ B = & \frac{ieq v_\varphi}{2c} \frac{J'_n(q\rho_0) J'_n(q\rho_1)}{H'_n(q\rho_1)} \delta(\omega + n\omega_H - q_z v_z). \end{aligned}$$

Отметим, что выполнение условия $E_{\varphi n}(\rho_1) = E_{zn}(\rho_1) = 0$ сводится к равенству нулю произ-

водной тангенциальной составляющей магнитного поля при $\rho = \rho_1$. Подставляя величины полей (33) и (34) в формулу (7), получим выражение для потери энергии частицы, пролетающей по спирали над идеально проводящим цилиндром:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & -\frac{e^2}{v_z} \sum_n \int_0^\infty \omega \left\{ \frac{\left[\beta^2 - \left(1 - n \frac{|\omega_H|}{\omega} \right) \right]^2}{\beta^2 - \left(1 - n \frac{|\omega_H|}{\omega} \right)^2} \right\} \times \\ & \times \frac{J_n(q_0 \rho_0) N_n(q_0 \rho_1)}{J_n^2(q_0 \rho_1) + N_n^2(q_0 \rho_1)} \times \\ & \times [J_n(q_0 \rho_0) N_n(q_0 \rho_1) - J_n(q_0 \rho_1) N_n(q_0 \rho_0)] + \\ & + \frac{v_\varphi^2}{c^2} \frac{J'_n(q_0 \rho_0) N'_n(q_0 \rho_1)}{J_n'^2(q_0 \rho_1) + N_n'^2(q_0 \rho_1)} \times \\ & \times [J'_n(q_0 \rho_0) N'_n(q_0 \rho_1) - J'_n(q_0 \rho_1) N'_n(q_0 \rho_0)] \} d\omega, \end{aligned}$$

где $q_0 = \frac{\omega}{v_z} \sqrt{\beta^2 - \left(1 - n \frac{|\omega_H|}{\omega} \right)^2}$ и суммирование по n осуществляется в ограниченной области $(1-\beta)\omega/|\omega_H| < n < (1+\beta)\omega/|\omega_H|$. При $\rho_1 \rightarrow 0$ получим выражение (31).

Зависимости спектральных плотностей потерь энергии электрона в единицу времени на излучение от частоты представлены на рис. 8. Электрон движется с продольной скоростью $v_z = 0,8c$ по спиральной орбите с радиусом ρ_0 соосно идеально проводящему цилиндру с радиусом ρ_1 в продольном магнитном поле с напряженностью H_0 . Наличие проводящего цилиндра приводит к снижению уровня потерь энергии частицы в единицу времени на магнитно-тормозное излучение из-за интерференции излученной ею волны и отраженной волны от поверхности цилиндра. Причем чем больше радиус проводящего цилиндра и, соответственно, ларморовский радиус частицы, тем значительнее меньше потери энергии частицы на излучение по сравнению с ее

движением в безграничной вакуумной среде. Энергия электромагнитного излучения равномерно движущейся частицы, вызванного эффектом Доплера, имеет осциллирующий характер из-за ограниченности частотных диапазонов спектральных составляющих и неравнозначности их

вкладов в ее спектральную плотность потерь энергии. Как и при движении электрона в безграничной вакуумной среде, максимумы спектральных плотностей потерь энергии частицы в единицу времени наблюдаются на частотах, которые близки к частотам, кратным $\omega_H/(1-\beta)$.

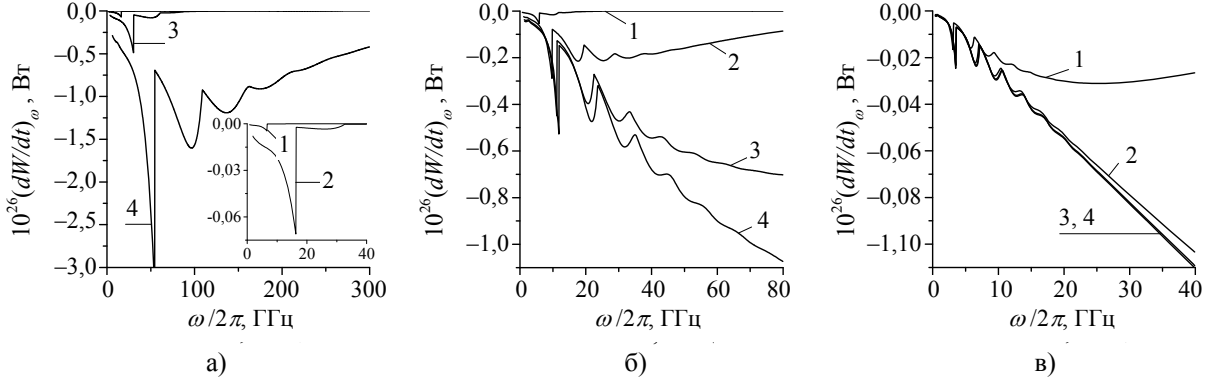


Рис. 8. Зависимости спектральной плотности потерь энергии от частоты излучения электрона, движущегося в вакууме с продольной скоростью 0,8с по спиральной траектории с радиусом $\rho_0 = 0,2$ см (а); 1,2 см (б) и 4 см (в) соосно металлическому цилиндру с радиусом $\rho_1 = 0,1$ см (а); 1 см (б) и 3,9 см (в) в продольном магнитном поле с напряженностью H_0 , кЭ: 1 – 0,8; 2 – 2; 3 – 4; 4 – 10

4.3. Рассмотрим потери энергии заряженной частицы, движущейся в вакууме ($\epsilon = 1$) по спиральной траектории, на возбуждение колебаний в цилиндре с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 .

Для удобства введем обозначение

$$\Phi_n(\rho_0, q_z, \omega) = \frac{1}{\Delta_n} \left[\left(v_z - \frac{nq_z v_\varphi}{\rho_0 q^2} \right) H_n(q\rho_0) \Delta_{1n} - i \frac{\omega v_\varphi}{cq} H'_n(q\rho_0) \Delta_{2n} \right]$$

Тогда потери энергии частицы (22) запишутся следующим образом:

$$\frac{dW}{dt} = e \int_0^\infty d\omega \left\{ \Phi_0(\rho_0, q_z, \omega) + \sum_n [\Phi_n(\rho_0, q_z, \omega) + \Phi_{-n}(\rho_0, q_z, \omega)] \right\} dq_z + \text{к.с.} \quad (35)$$

Определим потери энергии частицы (макрочастицы в виде кольца) на возбуждение собственных колебаний цилиндра с симметричной модой ($n = 0$). Для этого случая дисперсионное уравнение собственных колебаний $\Delta_0 = 0$ (21) распадается на два независимых соотношения, соответствующие колебаниям E -типа с составляющей $H_z = 0$ и колебаниям H -типа с $E_z = 0$. Так как при $n = 0$ $q_z = \omega/v_z$ и $q^2 = -(1-\beta^2)\omega^2/v_z^2$ является отрицательной величиной, то зависимости продольных компонент

полей от радиуса ρ в вакуумной области $\rho > \rho_1$ имеют вид (17). В этом случае дисперсионные уравнения находим из соотношений:

– для колебаний H -типа

$$\frac{1}{\beta^2 \epsilon_1 - 1} \frac{1}{J_0(q_1 \rho_1)} \frac{\partial J_0(q_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{1}{K_0(k \rho_1)} \frac{\partial K_0(k \rho_1)}{\partial \rho_1} = 0;$$

– для колебаний E -типа

$$\frac{\epsilon_1}{\beta^2 \epsilon_1 - 1} \frac{1}{J_0(q_1 \rho_1)} \frac{\partial J_0(q_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{1}{K_0(k \rho_1)} \frac{\partial K_0(k \rho_1)}{\partial \rho_1} = 0. \quad (36)$$

Зависимость частоты собственных симметричных волн ω_p фторопластового ($\epsilon_1 = 2,04$) цилиндра с радиусом $\rho_1 = 3,9$ см от волнового числа q_z (решения уравнения (36)) приведена на рис. 9, кривая 1. Здесь p является двойным модовым индексом, состоящим из азимутального $n = 0$ и радиального $s = 1$, соответствующего порядковому номеру корня уравнения (36). Прямая 2 отображает зависимость частоты излучения заряженного кольца (или частицы) от волнового числа: $\omega = q_z v_z$. Кольцо с зарядом e_s движется в вакууме прямолинейно с продольной скоростью $v_z = 0,8c$ параллельно образующей диэлектрического цилиндра. В режиме резонанса (точка пересечения зависимостей 1 и 2) осуществляется че-

ренковское излучение в цилиндре при расстоянии между его боковой поверхностью и макрочастицей, не превышающим длину волны излучения [1].

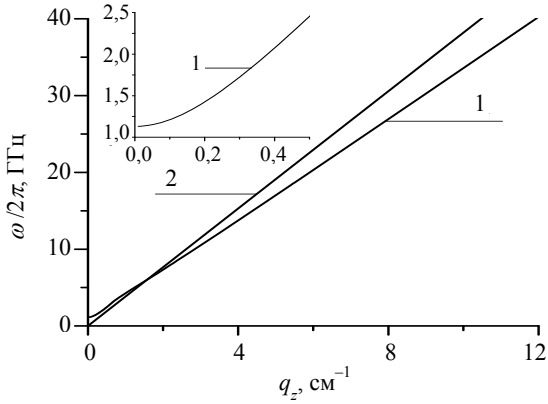


Рис. 9. Дисперсионные зависимости собственной симметричной моды фторопластового цилиндра 1 и излучаемой волны заряженного кольца 2

После интегрирования по q_z в выражении (35) получим

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2e^2(1-\beta^2)}{v_z} \int_0^\infty \omega \frac{\gamma_1 K_0^2(k\rho_0) I_0(k\rho_1)}{K_0(k\rho_1)} \delta(a) d\omega - \quad (37)$$

$$-\frac{2e^2 \omega_H^2 \rho_0^2}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \int_0^\infty \omega \frac{\gamma_2 k K_0'^2(k\rho_0) I_0(k\rho_1)}{K_0(k\rho_1)} \delta(b) d\omega.$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{\varepsilon_1}{\beta^2 \varepsilon_1 - 1} \frac{1}{J_0(q_1 \rho_1)} \frac{\partial J_0(q_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{1-\beta^2} \frac{1}{I_0(k\rho_1)} \frac{\partial I_0(k\rho_1)}{\partial \rho_1};$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_1 - 1} \frac{1}{J_0(q_1 \rho_1)} \frac{\partial J_0(q_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{1-\beta^2} \frac{1}{I_0(k\rho_1)} \frac{\partial I_0(k\rho_1)}{\partial \rho_1};$$

$$a = \frac{\varepsilon_1}{\beta^2 \varepsilon_1 - 1} \frac{1}{J_0(q_1 \rho_1)} \frac{\partial J_0(q_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{1-\beta^2} \frac{1}{K_0(k\rho_1)} \frac{\partial K_0(k\rho_1)}{\partial \rho_1};$$

$$b = \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_1 - 1} \frac{1}{J_0(q_1 \rho_1)} \frac{\partial J_0(q_1 \rho_1)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{1-\beta^2} \frac{1}{K_0(k\rho_1)} \frac{\partial K_0(k\rho_1)}{\partial \rho_1}.$$

При получении выражения (37) учитывалось, что малая мнимая часть диэлектрической проницаемости ε_1'' является положительной величиной при $\omega > 0$. Кроме того, использовалось

соотношение $\lim_{\xi \rightarrow +0} 1/(a + i\xi) = -i\pi\delta(a) + P/a$, где

P – главное значение интеграла. Первое слагаемое в (37) описывает потери энергии частицы, обусловленные ее чисто поступательным движением вдоль оси Z . Второе – связано с ее движением по спиральной траектории. В первом случае возбуждаются в цилиндре собственные колебания E -типа с $H_z = 0$ и законом дисперсии $a = 0$, во втором – H -типа с $E_z = 0$ и $b = 0$.

Определим потери энергии частицы на возбуждение собственных колебаний при выполнении неравенств $\omega^2/c^2 < q_z^2$ и $\varepsilon_1 \omega^2/c^2 > q_z^2$ (т. е. $\beta^2 \varepsilon_1 > (1 - n|\omega_H|/\omega)^2$). В этом случае, как уже упоминалось выше, продольные компоненты электромагнитного поля описываются соотношениям (15) и (17). Потери энергии частицы на возбуждение собственных колебаний (35) приобретают вид

$$\frac{dW}{dt} = e \sum_n \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta_n} \left[\left(v_z + \frac{nq_z v_\varphi}{\rho_0 k^2} \right) K_n(k\rho_0) \Delta_{1n} - i \frac{\omega v_\varphi}{ck} K_n'(k\rho_0) \Delta_{2n} \right] \right] dq_z + \text{к.с.}$$

Здесь Δ_n , Δ_{1n} , Δ_{2n} определяются из соотношений (21). После ряда несложных, но громоздких вычислений получим выражения для спектральной плотности потерь энергии частицы в единицу времени на частоте $\omega = \omega_p$. Частота ω_p определяется из условия $\Delta_n = 0$. Приняв во внимание полюс, после интегрирования получаем

$$\frac{dW(\omega_p)}{dt} = -\frac{2e^2}{v_z c} \times$$

$$\times \sum_n \frac{1}{\Delta_n'(\omega_p)} \frac{\omega_p}{k_0^2 \rho_1} \frac{K_n(k_0 \rho_1)}{K_n(k_0 \rho_0)} \left[\left(v_z + \frac{nq_{z0} v_\varphi}{\rho_0 k_0^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left. K_n(k_0 \rho_0) \Delta_{1n} - \frac{\omega_p v_\varphi}{ck_0} \frac{\alpha}{\delta} K_n'(k_0 \rho_0) \Delta_{2n} \right] \times$$

$$\times \left[K_n(k_0 \rho_0) \left(\frac{\omega_p v_z}{c^2} - q_{z0} \right) \delta + \frac{v_\varphi}{c} \alpha \frac{\partial K_n(k_0 \rho_0)}{\partial \rho_0} \right],$$

где

$$\alpha = \frac{nq_{z0}}{\rho_1} \left(\frac{1}{q_{10}^2} + \frac{1}{k_0^2} \right);$$

$$\delta = \frac{\omega_p}{c} \left(\frac{1}{q_{10}^2} \frac{1}{J_n(q_{10} \rho_1)} \frac{\partial J_n(q_{10} \rho_1)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{k_0^2} \frac{1}{K_n(k_0 \rho_1)} \frac{\partial K_n(k_0 \rho_1)}{\partial \rho_1} \right); \quad \Delta_n'(\omega_p) = \left. \frac{\partial \Delta_n}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_p};$$

k_0 – значение k на частоте собственной волны цилиндра ω_p (т. е. $k_0^2 = -q_0^2$).

Отметим, что в случае, когда $\beta^2 \varepsilon_1 < (1 - n|\omega_H|/\omega)^2$ (т. е. $\varepsilon_1 \omega^2 / c^2 < q_z^2$, что тождественно $q_1^2 < 0$) и ε_1 не имеет частотной дисперсии (другими словами, $\varepsilon_1 > 1$), в рассматриваемой структуре отсутствуют собственные колебания. Следовательно, заряженная частица не теряет энергию.

Выводы. Таким образом, решена задача о потерях в единицу времени энергии заряженной частицы, движущейся по спиральной траектории. Найдены поля, создаваемые частицей, и проанализированы их структуры. Эти поля представляют собой набор пространственно-временных гармоник (спектральных составляющих). Каждая составляющая поля характеризуется частотой и волновым вектором (волновым числом). В случае прямолинейного движения заряженной частицы электромагнитное поле, создаваемое ею, является аксиально-симметричным и в цилиндрической системе координат не зависит от угловой координаты. Проекция волнового вектора поля на направление движения частицы (продольное волновое число) равняется отношению частоты к скорости частицы. Второй пространственной характеристикой составляющей поля является радиальное (поперечное) волновое число. Если скорость частицы превосходит фазовую скорость волны, что реализуется в материальной среде, то возникает хорошо известное излучение Вавилова–Черенкова. При этом радиальное волновое число является действительной величиной, а зависимость амплитуды поля волны от радиуса описывается функцией Бесселя. Другими словами, поля частицы являются уходящими от нее волнами.

Если же частица движется в вакууме, поперечное волновое число является мнимой величиной. Электромагнитное поле локализуется вблизи частицы, а ее зависимость от радиуса описывается модифицированной функцией Бесселя. Излучение Вавилова–Черенкова отсутствует. Электромагнитные поля, создаваемые заряженным кольцом, движущимся в вакууме, также описываются модифицированными цилиндрическими функциями. Поэтому при движении над диэлектрическим цилиндром кольцо теряет энергию, если в цилиндре возбуждаются собственные колебания, т. е. выполняется условие черенковского излучения. В этом случае зависимость поля волны от радиуса вне цилиндра описывается функцией Макдональда, а внутри цилиндра – функцией Бесселя. Значит, реализуется полное внутреннее отражение волны от поверхности цилиндра.

В постоянном магнитном поле, когда частица движется по винтовой линии, она представляет собой осциллятор, поле которого зависит от угловой координаты. Спектральная составляющая поля дополнительно (по сравнению с прямолинейным движением) характеризуется азимутальным волновым числом. От его величины и знака зависят продольное и поперечное волновые числа (такова специфика поля частицы). Таким образом, весь бесконечный набор спектральных составляющих поля разделяется на две группы в зависимости от азимутальных волновых чисел. Для одной из них поперечные волновые числа являются действительными величинами. Такие спектральные составляющие представляют собой уходящие от частицы волны. Они вызывают потери энергии частицы в вакууме (магнитнотормозное излучение).

Нами показано, что присутствие металлического цилиндра приводит к снижению уровня потерь из-за интерференции в точке нахождения частицы излученной волны и волны, отраженной от его поверхности.

Вторая группа спектральных составляющих поля с мнимыми поперечными волновыми числами обеспечивает потери энергии частицы на возбуждение собственных волн в диэлектрическом цилиндре. Волны внутри диэлектрического волновода характеризуются при этом действительными поперечными волновыми числами.

В работе получены выражения для потерь энергии движущегося заряда, имеющие универсальный характер. Проанализированы различные частные случаи, а именно: потери энергии заряженного кольца при поступательном движении, потери энергии заряженной частицы при движении по спиральной траектории над металлическим или диэлектрическим цилиндром.

Библиографический список

1. *Релятивистские* генераторы поверхностной волны с одно- и двумерно-периодическими структурами / Н. С. Гинзбург, В. Ю. Заславский, А. М. Малкин, А. С. Сергеев // Журн. техн. физики. – 2012. – 82, № 12. – С. 84–97.
2. *Квазиоптическая* теория релятивистских генераторов поверхностной волны коаксиальной и цилиндрической геометрии / Н. С. Гинзбург, В. Ю. Заславский, А. М. Малкин, А. С. Сергеев // Журн. техн. физики. – 2013. – 83, № 2. – С. 119–128.
3. *Автоколебательная* система на основе диэлектрического резонатора с модами «шепчущей галереи» / А. В. Дормидонтов, А. Я. Кириченко, Ю. Ф. Лонин и др. // Письма в Журн. техн. физики. – 2012. – 38, № 2. – С. 65–73.
4. *Возбуждение* миллиметровых волн сильноточным РЭП в диэлектрическом резонаторе / К. В. Галайдыч, Ю. Ф. Лонин, А. Г. Пономарев и др. // Вопросы атомной науки и техники. – 2012. – № 3. – С. 174–178.
5. *Nonlinear analysis of mm waves excitation by high-current REB in dielectric resonator* / K. V. Galaydych, Yu. F. Lonin, A. G. Ponomarev et al. // Вопросы атомной науки и техники. – 2012. – № 6. – С. 158–160.

6. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1951. – 659 с.
7. Иваненко Д. Классическая теория поля / Д. Иваненко, А. Соколов. – М.: Гостехиздат, 1949. – 432 с.
8. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
9. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. Т. 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. с англ. Н. Я. Виленкина. – 2-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1974. – 295 с.
10. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме / Дж. Бекефи; пер. с англ. М. Д. Райзера, под ред. А. А. Веденова. – М.: Мир, 1971. – 437 с.
11. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1957. – 532 с.

Рукопись поступила 27.09.2013.

A. V. Dormidontov, Yu. V. Prokopenko,
S. I. Khankina, V. M. Yakovenko

ENERGY LOSS OF CHARGED PARTICLE MOVING ALONG A SPIRAL PATH

One of the topical problems of modern radiophysics and electronics is the study of the generation mechanisms of electromagnetic waves emitted in motion of charged particles in various electromagnetic systems. It is fundamentally important that the particle energy losses per unit time in the excitation of system eigenoscillations are included to the number descriptions of possible generation process. Knowledge of the energy losses allows us to find the increments and to determine the threshold conditions of oscillation instability when charged particles move in the system. In this paper, using Maxwell's equations and based on an integrated approach (analytical and numerical) the energy losses of a charged particle moving along a spiral path over the surface of the cylinder, which is a dielectric or metal, were

determined. The conditions under which there is a gyrosynchrotron radiation of electromagnetic waves in the system were stated. The research results extend and systematize knowledge (our conceptions) about generation mechanisms of electromagnetic waves in electrodynamic systems that form the basis of microwave oscillators.

Key words: Vavilov–Cerenkov radiation, gyrosynchrotron radiation, cyclotron resonance, particle energy losses by radiation.

A. V. Dormidontov, Yu. V. Prokopenko,
S. I. Khankina, V. M. Yakovenko

ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ, ЦЮ РУХАЄТЬСЯ ПО СПІРАЛЬНІЙ ТРАСЕКТОРІЇ

Однією з актуальних проблем сучасної радіофізики та електроніки є дослідження механізмів генерації електромагнітних хвиль при русі заряджених частинок в різних електродинамічних системах. При цьому до числа принципово важливих характеристик можливого процесу генерування відносяться втрати енергії однієї частинки в одиницю часу на збудження в системі власних коливань. Знання втрат енергії дозволяє знайти інкременти та визначити порогові умови нестійкості коливань при русі потоків заряджених частинок в системі. З використанням рівнянь Максвелла на основі комплексного підходу (аналітичного і чисельного) нами знайдено втрати енергії зарядженої частинки, що рухається по спіральній траєкторії над поверхнею циліндра, який є діелектриком або металом. Сформульовано умови, за яких виникає магнітно-гальмівне випромінювання електромагнітних хвиль у системі. Результати досліджень розширюють і систематизують знання (наші уявлення) про механізми генерування електромагнітних хвиль в електродинамічних системах, які складають основу мікрохвильових генераторів.

Ключові слова: випромінювання Вавилова–Черенкова, магнітно-гальмівне випромінювання, магнітно-циклотронний резонанс, втрати енергії частинки на випромінювання.