УДК 517.9+535.4

И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко
Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: petrusigor@yahoo.com

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СШИВАНИЯ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛНОВОДНЫХ МОД ЧАСТЬ II. СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Строгое обоснование применения техники редукции для приближенного решения матричных уравнений метода сшивания является нерешенной задачей на протяжении всех лет использования этого метода. Обобщенный метод сшивания, предлагаемый для решения задач дифракции мод на скачкообразных неоднородностях в волноводе, приводит к формулам Френеля для матричных операторов отражения и прохождения волн, а не к стандартным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Целью настоящей статьи является нахождение проекционных приближений для указанных операторных формул Френеля и аналитическое исследование качественных характеристик их сходимости. Использована теория операторов в гильбертовом пространстве. Аналитически доказана безусловная сильная сходимость конечномерных приближений для операторных формул Френеля к истинным операторам рассеяния. Дана оценка числа обусловленности матрицы редуцированного уравнения. Полученные результаты позволяют строго обосновать обобщенный метод сшивания, предназначенный для эффективного анализа устройств СВЧ. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: метод сшивания, метод редукции, операторные формулы Френеля, проекционная сходимость.

Обоснование применения метода редукции для приближенного решения матрично-операторных уравнений классического метода сшивания относится к кругу тех актуальных проблем, которые оставались трудно-разрешимыми на протяжении всего времени использования этого метода.

Обычно метод сшивания выходит за рамки хорошо развитой теории «проекционных методов» решения линейного уравнения

$$L\,x = f, \qquad x, f \in H, \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным оператором $L: H \to H$ (изложение теории этих методов в работах [1–3]). Пусть $H_n \subset H$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность конечномерных подпространств и P_n – оператор проектирования $H \to H_n$. Согласно проекционному методу в качестве искомого приближения принимается решение уравнения

$$P_n L\, x^{(n)} = P_n f, \qquad x^{(n)} \in H_n \tag{2}$$

(необходимые и достаточные условия сильной сходимости $\left\| x - x^{(n)} \right\| \to 0$, $n \to 0$, приведены, например, в работах [2–4]). Условия применимости такого подхода, т. е. принадлежность оператора L классу «правильных операторов» [4], сводятся к тому, что оператор L должен быть обратимым (двусторонне) и должно выполняться так называемое «условие Польского» [2]. Последнее эквивалентно требованию обратимости оператора $P_n L: H_n \to H_n$ начиная с некоторого $n > n_0$.

Стандартный вариант метода сшивания всегда приводит, как известно, к математической модели (1) в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для которой ограниченность заданного матричного оператора обычно нетрудно доказать. Однако уже обоснование обратимости этого оператора, опирающееся на анализ асимптотического поведения элементов бесконечной матрицы СЛАУ, оказалось непреодолимым затруднением.

Отличие классического метода сшивания состоит в том, что он предполагает две последовательные аппроксимации оператора задачи (т. е. является «*fully discrete*» методом). Именно, вначале вводится приближенный оператор $\hat{L}_m : H \to H$, который должен каким-либо образом аппроксимировать исходный матричный оператор: $\hat{L}_m \to L$ при $m \to \infty$, и только затем к полученному приближенному уравнению применяется проекционная схема (2), приводящая к уравнению

$$P_n \hat{L}_m x^{(m,n)} = P_n f_m,\; x^{(m,n)} \in H_n,\; m = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Здесь f_m обозначает соответствующее приближение к правой части уравнения (1), такое что $f_m \to f$ при $m \to \infty$. Уравнение (3) выявляет характерную для метода сшивания проблему относительной (или условной) сходимости: будет ли двойной предельный переход $m, n \to \infty$ приводить к результату, отличному от истинного решения?

Как оказалось, бесконечные СЛАУ (1) не присущи методу сшивания как таковому, а являются следствием общепринятой частной постановки задачи дифракции. Если изменить формулировку задачи, например так, как это предложено в работе [5], то приходим к уравнениям относительно матричных операторов отражения $\mathbf{R}$ и прохождения $\mathbf{T}$ волн, а не к уравнению (1). Для класса задач дифракции мод на скачкообразной неоднородности в волноводе итоговая матричная модель метода сшивания может быть представлена в виде операторных формул Френеля

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{D}_0\mathbf{D}_0^T - \mathbf{I}}{\mathbf{D}_0\mathbf{D}_0^T + \mathbf{I}}; \quad \mathbf{T} = \left(\mathbf{D}_0\mathbf{D}_0^T + \mathbf{I}\right)^{-1} 2\,\mathbf{D}_0. \tag{4}$$

Здесь известный оператор задачи $\mathbf{D}_0$ задан геометрией области определения поля и зависит от частоты [5].

Целью данной работы является построение проекционных приближений для операторных формул Френеля (4) и аналитическое исследование качественных характеристик их сходимости.

Общепринятым способом численной реализации матрично-операторной модели ме-тода сшивания является метод усечения. Согласно последнему заданный оператор задачи заменяется на конечную $M \times M$ матрицу, элементы которой есть аппроксимации элементов исходного матричного оператора $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_0\mathbf{D}_0^T$. Для исследуемой задачи дифракции каждый такой элемент представляет собой N-ю частичную сумму ряда. Далее численно находится приближение к искомому решению для некоторых конечных последовательностей чисел M и N (так называемая «практическая сходимость» приближений). Затем мы будем рассматривать метод редукции нахождения конечномерных матричных приближений к операторным формулам Френеля, который, в отличие от метода усечения, предполагает переход к пределу $M, N \to \infty$.

В этой статье мы используем результаты и обозначения работы [5], в которой развитый подход был продемонстрирован на примере канонической скалярной задачи дифракции мод типа LM_{m0}, $m = 1, 2, \ldots$ и LE_{m1}, $m = 0, 1, \ldots$ на скачке поперечного сечения прямоугольного волновода в H- и, соответственно, в E-плоскости.

P-сходимость проекционных приближений. По аналогии с формулами (10) из статьи [5] введем ортопроекторы

$$\mathbf{P}_K \equiv \left\{ P_{mn}^{(K)} = \sum_{p=(0)1}^{K} \delta_{mp}\delta_{pn} \right\}, \quad \mathbf{Q}_K \equiv \mathbf{I} - \mathbf{P}_K, \tag{5}$$

где $K = M, N$ означает число учитываемых волноводных мод в рассматриваемых частичных областях. Далее полагаем, что поле в p-й области, $p = 1, 2$, редуцировано к сумме M мод, тогда как N мод учитывается в смежной частичной области.

Согласно проекционной схеме (3) искомое конечномерное $M \times M$ приближение к оператору отражения имеет вид

$$\tilde{\mathbf{R}}_p = \frac{\tilde{\mathbf{D}}_p - \mathbf{P}_M}{\tilde{\mathbf{D}}_p + \mathbf{P}_M}, \tilde{\mathbf{D}}_p = \begin{cases} \mathbf{P}_M\mathbf{D}_0\mathbf{P}_N\mathbf{D}_0^T\mathbf{P}_M, & p = 1, \\ \mathbf{P}_M\mathbf{D}_0^T\mathbf{P}_N\mathbf{D}_0\mathbf{P}_M, & p = 2. \end{cases} \tag{6}$$

Формула (6) является преобразованием Кэли (напр., [6]) и обладает следующими основными свойствами:

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{R}}_p^T = \tilde{\mathbf{R}}_p \;\Leftrightarrow\; \tilde{\mathbf{D}}_p^T = \tilde{\mathbf{D}}_p, \\ &\left\| \tilde{\mathbf{R}}_p \right\| < 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{D}}_p > 0, \\ &\tilde{\mathbf{R}}_p = \mathbf{P}_M - 2\,\tilde{\mathbf{A}}_p, \;\; \tilde{\mathbf{A}}_p \equiv \left(\tilde{\mathbf{D}}_p + \mathbf{P}_M\right)^{-1} : \\ &\tilde{\mathbf{A}}_p^T = \tilde{\mathbf{A}}_p, \;\; \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{A}}_p > \tilde{\mathbf{A}}_p\tilde{\mathbf{A}}_p^\dagger, \;\; \left\| \tilde{\mathbf{A}}_p \right\| < 1. \end{aligned} \tag{7}$$

При этом приближения для операторов прохождения мод имеют вид ${}^{12}\tilde{\mathbf{T}} = 2\,\tilde{\mathbf{A}}_1\mathbf{D}_0\mathbf{P}_K$, ${}^{21}\tilde{\mathbf{T}} = 2\,\tilde{\mathbf{A}}_2\mathbf{D}_0^T\mathbf{P}_K$.

Заметим, что идентичность свойств приближения (7) и свойств точного решения [5] является следствием условия непрерывности потока энергии через апертуру неоднородности. Действительно, приравнивая на референсной плоскости приближенные представления для тангенциальных компонентов полей двух частичных областей в виде усеченных разложений по волноводным модам, мы подчиняем эти приближения четырем энергетическим законам [5]. При этом теорема о колеблющейся мощности и первая лемма Лоренца приводят к соотношениям (в обозначениях работы [5])

$$\begin{aligned} &\begin{cases} {}^p\tilde{\mathbf{R}}^T = {}^p\tilde{\mathbf{R}}, \\ {}^{pq}\tilde{\mathbf{T}}^T = {}^{qp}\tilde{\mathbf{T}}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{S}}^T = \tilde{\mathbf{S}}, \\ &\begin{cases} {}^p\tilde{\mathbf{R}}^2 + {}^{pq}\tilde{\mathbf{T}}\,{}^{pq}\tilde{\mathbf{T}}^T = \tilde{\mathbf{I}}, \\ {}^p\tilde{\mathbf{R}}\,{}^{pq}\tilde{\mathbf{T}} + \left({}^q\tilde{\mathbf{R}}\,{}^{qp}\tilde{\mathbf{T}}\right)^T = 0, \end{cases} \Rightarrow \tilde{\mathbf{S}}^2 = \tilde{\mathbf{I}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $(M+N)\times(M+N)$ матрицы $\tilde{\mathbf{S}}$ и $\tilde{\mathbf{I}}$ есть конечномерное приближение к обобщенной матрице рассеяния и единичная матрица соответственно. В свою очередь теорема о комплексной мощности и вторая лемма Лоренца дают закон сохранения энергии в обобщенном виде

$$\left(\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{S}}\right)\tilde{\mathbf{U}}\left(\tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{S}}^\dagger\right) = 0, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\mathbf{U}} = \operatorname{diag}\left(\tilde{\mathbf{U}}_1, \tilde{\mathbf{U}}_2\right); \tilde{\mathbf{U}}_j \equiv \mathbf{P}_K\mathbf{U}_j\mathbf{P}_K;\; j = 1, 2; K = M, N$$

есть конечномерное приближение к оператору волноводных портов, определенному ранее [5].

В терминах трансформанты Кэли (6) закон сохранения энергии

$$\left(\mathbf{P}_K + {}^p\tilde{\mathbf{R}}\right)\tilde{\mathbf{U}}_p\left(\mathbf{P}_K - {}^p\tilde{\mathbf{R}}^\dagger\right) = {}^{pq}\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{U}}_q\,{}^{pq}\tilde{\mathbf{T}}^\dagger \tag{10}$$

принимает вид

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{\mathbf{D}}_1\widetilde{\mathbf{U}}_1\\ \widetilde{\mathbf{U}}_1\widetilde{\mathbf{D}}_1^{\dagger}\end{array}\right\} = \mathbf{P}_K\mathbf{D}_0\widetilde{\mathbf{U}}_2\mathbf{D}_0^{\dagger}\mathbf{P}_K, \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \qquad (11)$$
$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{\mathbf{U}}_2\widetilde{\mathbf{D}}_2^{\dagger}\\ \widetilde{\mathbf{D}}_2\widetilde{\mathbf{U}}_2\end{array}\right\} = \mathbf{P}_K\mathbf{D}_0^T\widetilde{\mathbf{U}}_1\mathbf{D}_0^{*}\mathbf{P}_K.$$

Используя те же самые рассуждения, что и при анализе точного решения, находим, что $\operatorname{Re}\widetilde{\mathbf{D}}_p > 0$, $p = 1, 2,$ при всех значениях величин M и N. Это означает, что приближенное решение (6) существует и является единственным и, следовательно, упомянутое выше «условие Польского» выполняется для любого количества учитываемых типов волн (как распространяющихся, так и высших) в двух частичных областях.

Используя свойства точных и приближенных операторов рассеяния, получаем следующую оценку для построенных проекционных приближений:

$$\frac{1}{2}\left\|\left(\mathbf{P}_M\mathbf{R}_p - \widetilde{\mathbf{R}}_p\right)\mathbf{b}^T\right\| < \left\|\left(\mathbf{P}_M\mathbf{D}_p - \widetilde{\mathbf{D}}_p\right)\mathbf{A}_p\mathbf{b}^T\right\|,$$
$$\frac{1}{2}\left\|\left(\mathbf{P}_M\,{}^{pq}\mathbf{T} - {}^{pq}\widetilde{\mathbf{T}}\right)\mathbf{b}^T\right\| < \left\|\left(\mathbf{P}_M\mathbf{D}_p - \widetilde{\mathbf{D}}_p\right)\mathbf{A}_p\mathbf{d}^T\right\|, \qquad (12)$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{b}\begin{cases}\mathbf{D}_0, & p = 1,\\ \mathbf{D}_0^T, & p = 2,\end{cases} \quad q \neq p, \quad \forall\mathbf{b} \in \ell_2.$$

Эти неравенства позволяют рассматривать сходимость вида

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\left(\mathbf{P}_M\mathbf{R}_p - \widetilde{\mathbf{R}}_p\right)\mathbf{b}^T\right\|\\ \left\|\left(\mathbf{P}_M\,{}^{pq}\mathbf{T} - {}^{pq}\widetilde{\mathbf{T}}\right)\mathbf{b}^T\right\|\end{array}\right\} \to 0, \text{ при } M, N \to \infty, \forall\mathbf{b} \in \ell_2$$

известную как сильная проекционная сходимость (или P-сходимость) [3]. Итак, в соответствии с оценками (12) доказательство сильной P-сходимости построенных приближений сводится к определению условий сильной P-сходимости известной матрицы $\widetilde{\mathbf{D}}_p$ к заданному оператору $\mathbf{D}_p$, $p = 1, 2$.

Теорема 3. Проекционные приближения $\widetilde{\mathbf{R}}_p$ и ${}^{pq}\widetilde{\mathbf{T}}$ всегда сильно P-сходятся к соответствующим операторам рассеяния.

Доказательство. Используя формулу (22) из работы [5] и определение (6), запишем исследуемую разность операторов в виде

$$\mathbf{P}_M\mathbf{D}_1 - \widetilde{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{P}_M\mathbf{D}_0\mathbf{Q}_N\mathbf{D}_0^T + \mathbf{P}_M\mathbf{D}_0\mathbf{P}_N\mathbf{D}_0^T\mathbf{Q}_M \qquad (13)$$

(для случая $p = 2$ здесь необходимо произвести замены $\mathbf{D}_0 \to \mathbf{D}_0^T$ и $\mathbf{D}_0^T \to \mathbf{D}_0$). Утверждение теоремы прямо следует из представления (13), поскольку в пространстве ℓ_2 ортопроектор $\mathbf{P}_K, K = M, N$, сильно (но неравномерно) сходится к единичному оператору.

Как следствие, для математической модели обобщенного метода сшивания в виде операторных формул Френеля (4) отсутствует условная (или относительная) сильная P-сходимость проекционных приближений.

Наконец, исходя из свойства (7), для числа обусловленности матрицы задачи получаем равномерную оценку

$$1 \leq \operatorname{cond}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_p\right) \leq 1 + \left\|\mathbf{D}_0\right\|\left\|\mathbf{D}_0^T\right\| < \infty, \ \forall M, N, \qquad (14)$$

гарантирующую устойчивость вычислительного процесса.

Выводы. Характерная для классического метода сшивания трудноразрешимая проблема обоснования применимости метода редукции для приближенного решения итоговой бесконечной СЛАУ является следствием общепринятой частной формулировки задачи дифракции, а не собственно метода сшивания.

Предложенная в работе [5] новая постановка задачи дифракции волн приводит к обобщенному методу сшивания, для которого сходимость проекционных приближений к истинному решению задачи может быть строго доказана аналитически.

На примере операторных формул Френеля для канонической задачи дифракции волн на ступеньке в H-(E-)плоскости в прямоугольном волноводе построены проекционные приближения метода редукции к искомым операторам рассеяния.

Строго доказано, что закон сохранения комплексной мощности и вторая лемма Лоренца в операторной форме [7, 8] обеспечивают при любом числе учитываемых типов волн в регулярных волноводах автоматическое выполнение так называемого «условия Польского» [2, 4], гарантирующее сходимость проекционных приближений (6). Тем самым строго обосновано применение метода редукции к матрично-операторным моделям обобщенного метода сшивания.

Аналитически доказана сильная P-сходимость построенных приближений к истинному решению. Для математической модели обобщенного метода сшивания в виде операторных формул Френеля строго обосновано отсутствие относительной (условной) сходимости приближений. Найдено, что число обусловленности усеченной матричной модели (6) является равномерно ограниченной величиной.

Разработанный и строго обоснованный обобщенный метод сшивания предназначен для эффективного решения задач анализа волноводных узлов и устройств микроволновой техники.

Библиографический список

1. *Польский Н. И.* Проекционные методы в прикладной математике / Н. И. Польский // Докл. АН СССР. – 1962. – 143, № 4. – С. 787–790.
2. *Гохберг И. Ц.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
4. *Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики / А. Ю. Лучка, Т. Ф. Лучка. – К.: Наук. думка, 1985. – 240 с.
5. *Петрусенко И. В.* Обобщенный метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. Часть 1. Формулы Френеля для операторов рассеяния / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электрон. – 2012. – 3(17), № 3. – С. 8–15.
6. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления / Г. Вейль. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947. – 408 с.
7. *Petrusenko I. V.* Generalization of the power conservation law for scalar mode-diffraction problems / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – 68, N 16. – P. 1399–1410.
8. *Petrusenko I. V.* The lost «second Lorentz theorem» in the phasor domain / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – 68, N 7. – P. 555–560.

Рукопись поступила 22.03.2012.

I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko

GENERALIZED MODE-MATCHING TECHNIQUE IN THE THEORY OF MODE DIFFRACTION PART II. CONVERGENCE OF PROJECTION APPROXIMATIONS

The problem of validity of the truncation procedure for matrix equations of the mode-matching technique is an open question during the all period of applying this technique. The generalized mode-matching technique, which is proposed to solve the problem on mode-diffraction by abrupt discontinuity in the wave guide, yields the Fresnel formulae for matrix operators of mode reflection and transmission instead of the traditional infinite systems of linear algebraic equations. The aim of the present paper is to construct projection approximations for these operator-based Fresnel formulae and to make an analytical study into the qualitative characteristics of their convergence. The theory of operators in the Hilbert space is used. The unconditional strong convergence of finite-dimensional approximations for the operator-based Fresnel formulae to the true scattering operators has been proved analytically. The condition number of matrix approximations has been evaluated. The obtained results allow one to justify rigorously the generalized mode-matching technique which has been developed for effective analysis of microwave devices.

Key words: mode-matching technique, reduction method, operator Fresnel formulae, projection convergence.

І. В. Петрусенко, Ю. К. Сіренко

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЗШИВАННЯ В ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ МОД ХВИЛЕВОДІВ ЧАСТИНА II. ЗБІЖНІСТЬ ПРОЕКЦІЙНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Точне обгрунтування застосування техніки редукції для наближеного розв,язання матричних рівнянь методу зшивання є невирішеною задачею на протязі всіх років використання цього методу. Узагальнений метод зшивання, який пропонується для розв,язання задач дифракції мод на стрибкоподібних неоднорідностях у хвилеводі, приводе до формул Френеля для матричних операторів відображення та проходження хвиль, а не до стандартних нескінченних систем лінійних алгебраічних рівнянь. Метою цієї статті є знаходження проекційних наближень для вказаних операторних формул Френеля і аналітичне дослідження якісних характеристик їх збіжності. Використана теорія операторів в гільбертовому просторі. Аналітично доказана безумовна сильна збіжність скінченновимірних наближень для операторних формул Френеля до істинних операторів розсіювання. Дана оцінка числа обумовленості матриці редукованого рівняння. Отримані результати дозволяють точно обгрунтувати узагальнений метод зшивання, який призначений для ефективного аналізу пристроїв НВЧ.

Ключові слова: метод зшивання, метод редукції, операторні формули Френеля, проекційна збіжність.