

Л. Г. Величко, А. А. Кривчикова, Ю. К. Сиренко

*Институт радиопрофики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина*

E-mail: lgy@ire.kharkov.ua; kryvchikova@ire.kharkov.ua; yks@ire.kharkov.ua

ДВУМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ ЧАСТЬ 3. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Представлены результаты, необходимые для построения спектральной теории трехмерных периодических структур. Получено аналитическое представление канонической функции Грина, определена естественная область вариации спектрального параметра (комплексной частоты) – бесконечнолистная риманова поверхность, сформулированы утверждения, позволяющие оценить области локализации элементов спектрального множества. Ил. 1. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: трехмерная дифракционная решетка, каноническая функция Грина, точечный спектр, спектральная задача, теорема единственности.

В работах [1, 2] мы получили результаты, использование которых позволяет строить и тестировать строгие алгоритмы для решения трехмерных векторных начально-краевых задач электродинамической теории решеток. Были представлены точные поглощающие условия, существенно сокращающие пространство счета модельных задач, описаны основные соотношения закона сохранения энергии и соотношения взаимности, которым удовлетворяют амплитуды монохроматических волн, формируемых периодическими структурами.

Доказано, что все импульсные поля, возникающие в зонах отражения и прохождения решетки (в регулярных отрезках канала Флоке), однозначно определяются своими продольными компонентами. Этот результат позволяет, в частности, описывать рассеивающие свойства трехмерных решеток в терминах операторов преобразования, которые действуют в пространстве эволюционных базисов сигналов [3], т. е. в пространстве бесконечных последовательностей пространственно-временных амплитуд импульсных волн, распространяющихся в регулярных отрезках канала Флоке. В рамках такого подхода анализ сложных многослойных периодических структур можно вести с использованием операторного метода [3], который существенно сокращает пространство счета, исключая из него регулярные отрезки канала Флоке, разделяющие различные «элементарные» (однослойные) структуры. В частотной области аналог такого операторного метода носит название метода обобщенных матриц рассеяния.

Перечисленные результаты обеспечивают эффективную алгоритмизацию решаемых задач, корректную постановку соответствующих вычис-

лительных экспериментов и получение численных данных, характеризующих изучаемые пространственно-временные и пространственно-частотные трансформации электромагнитных волн. Опыт работы с двухмерными периодическими структурами доказывает, что верная физическая трактовка численных результатов, относящихся к процессам резонансного рассеяния волн, невозможна без опоры на результаты спектральной теории, в рамках которой решетки рассматриваются как открытые периодические резонаторы или открытые периодические волноводы.

Спектральная теория решеток изучает особенности аналитического продолжения решений краевых задач частотной области (см., например, задачи (23), (24) и (30), (31) в работе [2]) в область комплексных (нефизических) значений различных действительных параметров – частоты, постоянных распространения и т. д. – и роль этих особенностей в реализации резонансных и аномальных режимов рассеяния монохроматических и импульсных волн. Основные результаты этой теории для двухмерных решеток представлены в работах [3–5]. Опираясь на них, а также на наши предыдущие работы [1, 2], мы сформулируем некоторые общие утверждения спектральной теории трехмерных решеток. Роль спектрального параметра отводится частотному параметру $k = 2\pi/\lambda$ (λ – длина волны в свободном пространстве) – трехмерная периодическая структура рассматривается как открытый периодический резонатор.

1. Функция Грина. Назовем канонической функцией Грина для трехмерной решетки решение $\tilde{G}_0(g, p, k)$ скалярной задачи

$$\begin{cases} [\Delta_g + k^2][\tilde{G}_0(g, p, k)] = \delta(g - p), & g = \{x_g, y_g, z_g\} \in R, \quad p = \{x_p, y_p, z_p\} \in Q_L, \\ D[\tilde{G}_0](l_x, y_g) = e^{2\pi i \Phi_x} D[\tilde{G}_0](0, y_g), & 0 \leq y_g \leq l_y, \\ D[\tilde{G}_0](x_g, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D[\tilde{G}_0](x_g, 0), & 0 \leq x_g \leq l_x, \\ \tilde{G}_0(g, p, k) = \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} A_{nm}(p, k) \\ B_{nm}(p, k) \end{matrix} \right\} e^{\pm i \Gamma_{nm}(z_g \mp L)} \times \mu_{nm}(x_g, y_g), & g \in \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

Все обозначения, использованные в задаче (1) и далее в тексте статьи, подробно описаны в работах [1, 2]. В случае простейшей периодической структуры (какие-либо материальные рассеиватели отсутствуют) к задачам такого типа, но с произвольными правыми частями в уравнении Гельмгольца, мы приходим при изучении поля монохроматических волн, порождаемых квазипериодическими токовыми источниками, локализованными в области $|z| < L$.

Построим $\tilde{G}_0(g, p, k)$ как суперпозицию

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(g, p, k) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ik|g-p_{nm}|]}{|g-p_{nm}|} e^{2\pi i n \Phi_x} e^{2\pi i m \Phi_y}, \quad (2) \\ p_{nm} &= \{x_p + n l_x, y_p + m l_y, z_p\} \end{aligned}$$

из функций Грина свободного пространства R^3 . Используя в (2) формулу суммирования Пуассона [6]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(2\pi n - x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inx} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) e^{-int} dt$$

и табличные интегралы [7]

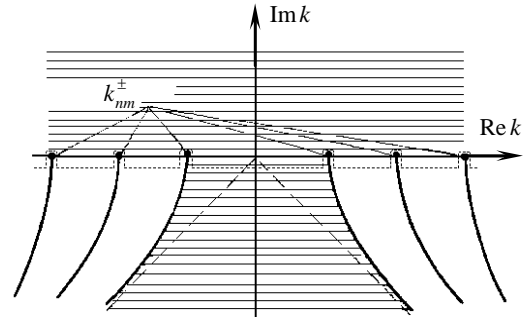
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip\sqrt{x^2+a^2})}{\sqrt{x^2+a^2}} e^{ibx} dx &= \pi i H_0^{(1)}\left(a\sqrt{p^2-b^2}\right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(p\sqrt{x^2+a^2}\right) e^{ibx} dx &= 2 \frac{\exp(ia\sqrt{p^2-b^2})}{\sqrt{p^2-b^2}} \end{aligned}$$

(здесь $H_0^{(1)}(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля), получим

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(g, p, k) &= \\ &= -\frac{i}{2l_x l_y} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha_n(x_g - x_p) + \beta_m(y_g - y_p)]} \times \quad (3) \\ &\times \frac{\exp[i|z_g - z_p| \Gamma_{nm}]}{\Gamma_{nm}}. \end{aligned}$$

Поверхность К аналитического продолжения канонической функции Грина (3) с действительной оси $\text{Im} k = 0$ в область комплексных значений k представляет собой бесконечнолистную риманову поверхность, состоящую из комплексных плоскостей $k \in C$ с разрезами вдоль направлений $(\text{Re} k)^2 - (\text{Im} k)^2 - \lambda_{nm}^2 = 0$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{Im} k \leq 0$) (рисунок). Первый (физический) лист C_k поверхности К однозначно определен условиями излучения для $\tilde{G}_0(g, p, k)$ в областях А и В, т. е. выбором значений $\text{Re} \Gamma_{nm} \text{Re} k \geq 0$ и $\text{Im} \Gamma_{nm} \geq 0$ на оси $\text{Im} k = 0$ [2].

На этом листе на интервале $0 < \arg k < \pi$ мы имеем: $\text{Im} \Gamma_{nm} > 0$ и $\text{Re} \Gamma_{nm} \geq 0$ для $0 < \arg k \leq \pi/2$ и $\text{Re} \Gamma_{nm} \leq 0$ для $\pi/2 \leq \arg k < \pi$. На интервале $3\pi/2 \leq \arg k < 2\pi$ для конечного числа функций $\Gamma_{nm}(k)$ (с n и m такими, что $(\text{Re} k)^2 - (\text{Im} k)^2 - \lambda_{nm}^2 > 0$) выполняются неравенства $\text{Im} \Gamma_{nm} < 0, \text{Re} \Gamma_{nm} > 0$; для всех остальных функций мы имеем $\text{Im} \Gamma_{nm} > 0$ и $\text{Re} \Gamma_{nm} \leq 0$. На интервале $\pi < \arg k \leq 3\pi/2$ ситуация аналогична, но с противоположными знаками при $\text{Re} \Gamma_{nm}$. Следующие листы (каждый из них со своим собственным набором пар $\{k \rightarrow \Gamma_{nm}(k)\}$, задающих связь между положением точки k на листе и значениями функций $\text{Im} \Gamma_{nm}(k)$ и $\text{Re} \Gamma_{nm}(k)$ в этой точке) имеют, в отличие от первого, противоположные знаки (ветви корня) $\Gamma_{nm}(k)$ для конечного числа значений индексов n и m . Разрезы (сплошные линии на рисунке) начинаются в вещественных алгебраических точках ветвления $k_{nm}^{\pm} = \pm |\lambda_{nm}|$.



Область изменения спектрального параметра k : первый лист поверхности К

В окрестности любой фиксированной точки $K \in K$ функция $\tilde{G}_0(g, p, k)$ разлагается в ряд Лорана по степеням локальной переменной [8]

$$\kappa = \begin{cases} k - K, & K \notin \{k_{nm}^{\pm}\}, \\ \sqrt{k - K}, & K \in \{k_{nm}^{\pm}\}. \end{cases}$$

Следовательно, это мероморфная (на поверхности К) функция. Вычисляя вычеты $\text{Res}_{k=K} \tilde{G}_0(g, p, k)$ в ее простых полюсах $\bar{k} \in \{k_{nm}^{\pm}\}$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{E}(g, k_{nm}^{\pm}) &= \{\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z\}, \\ \tilde{E}_{x, y \text{ или } z} &= a_{x, y \text{ или } z} \exp[i(\alpha_n x + \beta_m y)], \quad (4) \\ \tilde{H}(g, k_{nm}^{\pm}) &= (ik_{nm}^{\pm} \eta_0)^{-1} \text{rot} \tilde{E}(g, k_{nm}^{\pm}) \end{aligned}$$

(a_x, y или z – произвольные константы) – нетривиальные решения однородных ($\tilde{U}^i(g, k) \equiv 0$) канонических ($\bar{\varepsilon}(g, k) \equiv 1$, $\mu(g, k) \equiv 1$ и $\text{int } S = \emptyset$ – пустое множество) задач (23), (24) и (30), (31) работы [2]. Эти решения определяют возможные свободные колебания поля в свободном пространстве, удовлетворяющие условиям квазипериодичности:

$$\begin{aligned} D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (x+l_x, y) &= \\ &= e^{2\pi i \Phi_x} D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (x, y), \\ D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (x, y+l_y) &= \\ &= e^{2\pi i \Phi_y} D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

2. Точечный спектр. Определим теперь точечный спектр Ω_k решетки как множество точек $\{\bar{k}_j\}_{j=1}^{\infty} \in K$ таких, что для всех $k \in \{\bar{k}_j\}_j$ однородная (спектральная) задача

$$\begin{cases} \eta_0 \text{rot} \tilde{H}(g, k) = -ik \bar{\varepsilon}(g, k) \tilde{E}(g, k), \\ \text{rot} \tilde{E}(g, k) = ik \eta_0 \mu(g, k) \tilde{H}(g, k), \\ g \in Q_L, \\ D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (l_x, y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_x} D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (0, y), \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (x, l_y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_y} D \left[\tilde{E} \left(\tilde{H} \right) \right] (x, 0), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad |z| < L, \\ \tilde{E}_{tg}(g, k)|_{g \in S} = 0, \quad \tilde{H}_{nr}(g, k)|_{g \in S} = 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} &= \\ &= \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_{nm(E)}(k) \\ A_{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y), \\ g \in \bar{A}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} &= \\ &= \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} B_{nm(E)}(k) \\ B_{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y), \\ g \in \bar{B}, \end{aligned} \quad (7)$$

имеет нетривиальное (не обязательно единственное) решение $\tilde{U}(g, \bar{k}_j) = \left\{ \tilde{E}(g, \bar{k}_j), \tilde{H}(g, \bar{k}_j) \right\}$. Очевидно,

что такие решения описывают так называемые свободные колебания поля в решетке, основные характеристики которых (конфигурация поля колебаний, качественный состав их пространственных гармоник и поведение этих гармоник при больших $|z|$ и t) определяются величиной $\bar{k}_j = \text{Re } \bar{k}_j + i \text{Im } \bar{k}_j$ и положением точки \bar{k}_j (собственной частоты, отвечающей свободному колебанию $\tilde{U}(g, \bar{k}_j)$) на поверхности K [4, 6, 7]. Продолжая задачи (23), (24) и (30), (31) работы [2] и их решения $\tilde{U}(g, k) = \left\{ \tilde{E}(g, k), \tilde{H}(g, k) \right\}$ в область K комплексных значений k , мы обнаружим в точках $k = \bar{k}_j$ полюса функций $\tilde{U}(g, k)$, в окрестности которых искомые решения могут быть представлены рядами Лорана по степеням локальной на поверхности K переменной k [8]. Такие представления (локальные теоремы о разложимости решений $\tilde{U}(g, k)$) дают основания для аналитического исследования физических особенностей резонансного рассеяния монохроматических и импульсных волн одномерно- и двумерно-периодическими структурами [3–5, 9, 10].

3. Локализация точечного спектра. Получим теперь ряд условий, ограничивающих возможность существования нетривиальных решений задачи (6), (7). Эти условия могут рассматриваться как теоремы единственности решений задач (23), (24) и (30), (31) из работы [2], сформулированные для различных участков поверхности K . Отметим, что изучение вопроса о единственности позволяет оценить области локализации элементов множества Ω_k на K , а в последующем – существенно упростить или ускорить численное решение спектральных задач за счет сужения зоны поиска собственных частот. Теоремы единственности служат также основой для применения «аналитической» теоремы Фредгольма [11] при построении строго обоснованных алгоритмов решения дифракционных задач и исследовании качественных характеристик полных спектров решеток [3, 5].

Пусть рассеивающие элементы решетки не являются дисперсными ($\varepsilon(g, k) = \varepsilon(g)$, $\mu(g, k) = \mu(g)$ и $\sigma(g, k) = \sigma(g)$) – это значительно упрощает ситуацию с аналитическим продолжением спектральной задачи (6), (7) в область комплексных значений k . Из интегральной формы теоремы о комплексной мощности, которая для нетривиальных решений $\tilde{U}(g, \bar{k}_j)$ этой задачи принимает вид

$$\oint_{S_L} \left(\left[\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right] \cdot \vec{ds} \right) = \int_{Q_L} \operatorname{div} \left[\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right] dg =$$

$$= ik\eta_0 \int_{Q_L} \mu \left| \tilde{\vec{H}} \right|^2 dg - \frac{ik^*}{\eta_0} \int_{Q_L} \varepsilon \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg -$$

$$- \int_{Q_L} \sigma_0 \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg,$$

вытекают следующие соотношения:

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}^2} \left\{ \left(\operatorname{Re} \Gamma_{nm} \operatorname{Re} k + \operatorname{Im} \Gamma_{nm} \operatorname{Im} k \right) \right\} \times$$

$$\times \left[\left(\left| A_{nm(E)} \right|^2 + \left| B_{nm(E)} \right|^2 \right) \pm \right.$$

$$\left. \pm \eta_0^2 \left(\left| A_{nm(H)} \right|^2 + \left| B_{nm(H)} \right|^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ -\operatorname{Im} k (V_3 + V_2) - V_1 \right\}.$$

Здесь $k = \bar{k}_j$; $\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}(g, \bar{k}_j)$; $\Gamma_{nm} = \Gamma_{nm}(\bar{k}_j)$;
 $A_{nm(E)} = A_{nm(E)}(\bar{k}_j)$ и так далее, и введены обо-
 значения

$$V_1 = \varepsilon_0 \int_{Q_L} \sigma \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg,$$

$$V_2 = \int_{Q_L} \varepsilon_0 \varepsilon \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 dg,$$

$$V_3 = \int_{Q_L} \mu_0 \mu \left| \tilde{\vec{H}} \right|^2 dg.$$

Не существует свободных колебаний поля, амплитуды которых не удовлетворяют уравнениям (9). Из этого общего утверждения вытекает ряд важных следствий, частично сформулированных для решеток, выполненных из обычных материалов ($\varepsilon(g) > 0$, $\mu(g) > 0$ и $\sigma(g) \geq 0$).

- Не существует свободных колебаний поля, собственные частоты \bar{k}_j которых расположены в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} k > 0$) первого листа поверхности К. В этом можно убедиться, рассматривая верхнее из соотношений (9) и принимая во внимание распределение значений $\Gamma_{nm}(k)$ на C_k и неравенства $V_1 \geq 0$, $V_2 > 0$, $V_3 > 0$.

- При $\sigma(g) \equiv 0$ (решетка не поглощает энергию поля) не существует и свободных колебаний, собственные частоты \bar{k}_j которых расположены в нижней полуплоскости ($\operatorname{Im} k < 0$) листа C_k между разрезами, отвечающими наименьшим по модулю значениям k_{nm}^{\pm} . На рисунке эта область первого листа поверхности К и область, которую

мы упоминали выше, заштрихованы горизонтальными линиями.

- Если $\sigma(g) > 0$ на каком-либо множестве точек $g \in Q_L$ ненулевой меры, то на действительной оси плоскости C_k нет элементов \bar{k}_j точечного спектра решетки Ω_k .

Выводы. Изучение физических процессов резонансного рассеяния импульсных и монохроматических волн периодическими структурами различного типа не ограничивается расчетом их электродинамических характеристик. Анализ аномальных пространственно-временных и пространственно-частотных трансформаций электромагнитного поля требует привлечения результатов спектральной теории, которая изучает особенности аналитического продолжения краевых задач в область комплексных (нефизических) значений различных параметров. Настоящая работа посвящена разработке элементов такой теории для трехмерных решеток. В ней получено аналитическое представление канонической функции Грина, определена естественная область вариации спектрального параметра (комплексной частоты), сформулированы утверждения, позволяющие оценить области локализации элементов спектрального множества.

Библиографический список

1. Величко Л. Г. Двумерно-периодические решетки. Часть I. Начально-краевые задачи и точные поглощающие условия для прямоугольного канала Флоке / Л. Г. Величко, А. А. Кривчикова, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электрон. – 2012. – 3(17), № 2. – С. 3–9.
2. Величко Л. Г. Двумерно-периодические решетки. Часть II. Свойства нестационарных и установившихся полей в прямоугольном канале Флоке / Л. Г. Величко, А. А. Кривчикова // Там же. – С. 10–19.
3. Sirenko Y. K. Modeling and analysis of transient processes in open resonant structures. New methods and techniques / Y. K. Sirenko, S. Strom, N. P. Yashina. – N. Y.: Springer, 2007. – 362 p.
4. Шестопалов В. П. Динамическая теория решеток / В. П. Шестопалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с.
5. Sirenko Y. K. Modern theory of gratings. Resonant scattering: analysis techniques and phenomena / Y. K. Sirenko, S. Strom (eds). – N. Y.: Springer, 2010. – 390 p.
6. Титчмарш Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э. Ч. Титчмарш. – М.: КомКнига, 2007. – 480 с.
7. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
8. Гурвиц А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
9. Sirenko Y. K. Time-domain and frequency-domain methods combined in the study of open resonance structures of complex geometry / Y. K. Sirenko, L. G. Velychko, F. Erden // Progress in Electromagnetics Research. – 2004. – 44. – P. 57–79.
10. Velychko L. G. Time-domain analysis of open resonators. Analytical grounds / L. G. Velychko, Y. K. Sirenko, O. S. Shafalyuk // Progress in Electromagnetics Research. – 2006. – 61. – P. 1–26.

11. Рид М. Методы современной математической физики. Том 4. Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон; пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 428 с.

Рукопись поступила 10.11.11.

L. G. Velychko, A. A. Kryvchikova,
Yu. K. Sirenko

TWO-DIMENSIONALLY PERIODIC GRATINGS PART 3. ELEMENTS OF THE SPECTRAL THEORY

The results required for constructing a spectral theory of three-dimensional periodic structures are presented in the paper. An analytical representation for the canonical Green function is derived, the natural domain for the spectral parameter (complex-valued frequency) is determined in the form of the infinite-sheeted Riemann surface. Some statements allowing one to estimate the location of the spectral set members are formulated.

Key words: three-dimensional diffraction grating, canonical Green function, point spectrum, spectral problem, uniqueness theorem.

Л. Г. Величко, Г. О. Кривчікова, Ю. К. Сіренко

ДВОВИМІРНО-ПЕРІОДИЧНІ ҐРАТКИ ЧАСТИНА 3. ЕЛЕМЕНТИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ

Наведено результати, що є необхідними для побудови спектральної теорії тривимірних періодичних структур. Отримано аналітичне зображення канонічної функції Гріна, визначено природну область варіації спектрального параметра (комплексної частоти) – нескінченнолистову ріманову поверхню, сформульовано твердження, що дозволяють оцінити області локалізації елементів спектральної множини.

Ключові слова: двовимірно-періодична ґратка, канонічна функція Гріна, точковий спектр, спектральна задача, теорема єдиності.