

В. Ф. Борулко, С. М. Вовк

*Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
72, пр. Гагарина, Днепропетровск, 49051, Украина
E-mail: borulko@inbox.ru; vovk_s_m@mail.ru*

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МИНИМУМА ПРОТЯЖЕННОСТИ ДЛЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрена задача экстраполяции пространственного спектра комплекснозначных источников излучения, местоположение которых априорно неизвестно. Для решения задачи использован принцип минимума пространственной протяженности источников излучения. Предложены скалярная и векторная версии функционала квазипротяженности, на основании которых сформулированы соответствующие задачи нелинейной оптимизации. Рассмотрен подход к их решению, основанный на градиентном методе оптимизации. Представлены результаты численного моделирования для случаев одного и пяти комплекснозначных источников излучения. Ил. 4. Библиогр.: 16 назв.

Ключевые слова: экстраполяция спектра, источники излучения, минимум пространственной протяженности.

Для радиофизических приложений можно указать два основных класса задач экстраполяции спектра: экстраполяция пространственного спектра и экстраполяция временного спектра. Классическим представителем первого класса является задача синтеза линейной антенны по заданной комплексной диаграмме направленности [1, 2], для решения которой необходимо продолжить значения диаграммы направленности за пределы области действительных углов. Примером из второго класса является задача экстраполяции комплексного коэффициента отражения для слоистой диэлектрической структуры [3, 4], решение которой позволяет повысить разрешающую способность радиофизических измерений по электрической толщине слоев сверх технически достижимого предела. Один из общих подходов к решению этих и аналогичных им задач основан на априорно формулируемом требовании получить такое решение задачи экстраполяции, которое в совокупности с известными данными приводит к получению финитного фурье-образа. В рамках этого подхода традиционный способ решения задач экстраполяции основан на методе разложения решения в ряд по функциям с двойной ортогональностью [2] или на методе итераций Тартаковского-Гершберга-Папулиса [5–7]. Однако при применении этих методов необходимо точно знать носитель финитного фурье-образа. К сожалению, для многих практических задач эти априорные сведения не только часто отсутствуют, но иногда составляют конечную цель решения задачи экстраполяции (например, достижение сверхразрешения). Для преодоления априорной неопределенности, связанной с неизвестным носителем финитного фурье-образа, мы предлагаем использовать принцип его минимальной протяженности. Ранее этот принцип для временных задач мы формулировали как принцип минимума

длительности [4, 8, 9], а для пространственных задач – как принцип минимума пространственной протяженности (ПМП) [10–12].

В данной работе мы рассматриваем применение ПМП для решения задачи экстраполяции пространственного спектра комплекснозначных источников в условиях, когда местоположение этих источников в пространстве является неизвестным. Мы представляем две версии ПМП, которые основаны на скалярном и векторном вариантах описания функционала пространственной протяженности для комплекснозначных источников излучения. В общем виде предлагаемая математическая формулировка задачи экстраполяции заключается в поиске такого продолжения пространственного спектра, которое минимизирует пространственную протяженность источников излучения. Для учета искажений, которые обусловлены аддитивным шумом, в постановку задачи включен сглаживающий параметр, который мы называем параметром «внутренней» регуляризации. В целом мы свели задачу экстраполяции пространственного спектра к задаче безусловной минимизации функции, которая может являться сильно неунимодальной. Для минимизации такой функции был построен алгоритм, который основан на градиентном методе оптимизации. Этот алгоритм работает непосредственно в пространственной области и использует алгоритм дискретного (быстрого) преобразования Фурье для вычисления вектора антиградиента на основе компонент экстраполируемой части пространственного спектра. Для выбора величины шага вдоль направления спуска был использован метод «обнуляющих шагов» [12], применение которого приводит к обязательному уменьшению значения функционала, который минимизируется.

1. Постановка задачи. Рассмотрим одномерную задачу экстраполяции пространствен-

ного спектра, полагая, что приведенные здесь результаты могут быть обобщены на случай большей размерности. Постановку и решение задачи экстраполяции представим в пространственной области на основе аддитивной модели.

Пусть функция $B(\omega)$ описывает известные значения пространственного спектра в полосе пространственных частот $[-\Omega, \Omega]$, где Ω – круговая частота. Продолжим нулем значения спектра за пределы этой полосы частот, полагая $B(\omega) = 0; |\omega| > \Omega$. Будем говорить, что комплекснозначная функция $b(x) = F^{-1}[B(\omega)]$, где F^{-1} – оператор обратного преобразования Фурье, описывает исходные данные в пространственной области. Для функции $b(x)$ справедливы равенства

$$b(x) \otimes \frac{\sin(\Omega x)}{\pi x}, \quad b(x) \otimes \left[\delta(x) - \frac{\sin(\Omega x)}{\pi x} \right] = 0,$$

где \otimes обозначает операцию свертки.

Пусть функция $S(\omega)$ описывает экстраполированные за пределы полосы частот $[-\Omega, \Omega]$ значения пространственного спектра. Продолжим нулем значения $S(\omega)$ вовнутрь этой полосы частот, полагая $S(\omega) = 0, |\omega| \leq \Omega$. Будем говорить, что функция $s(x) = F^{-1}[S(\omega)]$ описывает решение задачи экстраполяции в пространственной области. Для функции $s(x)$ справедливы равенства

$$s(x) \otimes \frac{\sin(\Omega x)}{\pi x} = 0; \quad s(x) = s(x) \otimes \left[\delta(x) - \frac{\sin(\Omega x)}{\pi x} \right].$$

Используем аддитивную модель для представления пространственного спектра $U(\omega)$ комплекснозначных источников излучения, которую зададим в виде $U(\omega) = B(\omega) + S(\omega), |\omega| < \infty$. Тогда функция $u(x) = F^{-1}[U(\omega)] = b(x) + s(x)$ описывает пространственное распределение источников излучения. В рамках этой модели общая математическая постановка задачи экстраполяции пространственного спектра, которая основана на ПМПП источников излучения, имеет вид задачи вариационного исчисления

$$D[u(x)] = D[b(x) + s(x)] \rightarrow \min\{s(x)\}, \quad (1)$$

где D – функционал, который задает меру протяженности [13] функции $u(x)$ и который необходимо минимизировать [8, 11] для заданной функции $b(x)$ посредством выбора (варьирования) функции $s(x)$. Постановка задачи в виде (1) означает, что экстраполяция спектра должна выполняться таким образом, чтобы пространственная протяженность источников излучения была минимальна.

К сожалению, использование строгого математического определения меры протяженнос-

ти функции в задаче (1) не является конструктивным по двум основным причинам: отсутствие общего способа поиска минимума разрывного функционала и наличие шума. Для построения конструктивной постановки можно использовать в задаче (1) различные варианты аппроксимации функционала D , которые в дальнейшем мы определяем термином «функционалы квазипротяженности». Простые варианты такой аппроксимации могут быть построены на основе функций Хьюбера, Мешалкина, Демиденко, а также других невыпуклых функций [8, 11, 14]. При этом важной частью построения функционалов квазипротяженности является способ учета шума, который определяется как уровнем, так и статистическими характеристиками шума. Далее мы использовали вариант построения функционала квазипротяженности на основе логарифмической функции и предположения о гауссовском законе распределения шума [15]; в этом случае задача (1) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(|b(x) + s(x)|^2 + \alpha^2) dx \rightarrow \min\{s(x)\}, \quad (2)$$

где α^2 – параметр «внутренней» регуляризации, который предназначен для сглаживания малых значений суммы $b(x) + s(x)$. Функционал квазипротяженности, который стоит в левой части (2), мы назвали «мириадным функционалом» и отнесли его к классу обобщенных логарифмических функционалов [16]. Согласно (2) математическая постановка задачи экстраполяции пространственного спектра комплекснозначных источников на основе принципа минимума пространственной протяженности заключается в поиске такой функции $s(x)$, которая для известной функции $b(x)$ и заданной величины параметра α^2 доставляет минимум мириадному функционалу.

Из (2) путем вычисления вариации мириадного функционала по функции $s(x)$ можно получить нелинейное уравнение Эйлера относительно неизвестной функции $s(x)$

$$\frac{[b(x) + s(x)]}{|b(x) + s(x)|^2 + \alpha^2} \otimes \left[\delta(x) - \frac{\sin(\Omega x)}{\pi x} \right] = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) дает альтернативную постановку задачи экстраполяции в виде задачи решения нелинейного уравнения. Отметим, что левая часть уравнения (3) является аналогом градиента мириадного функционала для конечномерного случая.

2. Скалярная версия. Постановка задач обработки многокомпонентного (многоканального) сигнала на основе скалярной версии ПМПП заключается в минимизации суммы пространственных протяженностей всех компонент такого сигнала. Для рассматриваемой задачи можно выделить два канала обработки, связывая их с ре-

альной $u^R(x)$ и мнимой $u^I(x)$ частями комплекснозначной функции $u(x)$. В этом случае мы записываем математическую постановку задачи в виде

$$D_{\Sigma} = D[u^R(x)] + D[u^I(x)] \rightarrow \min\{s^R(x), s^I(x)\}, \quad (4)$$

где функционал $D[u^R(x)]$ задает протяженность функции $u^R(x) = b^R(x) + s^R(x)$, функционал $D[u^I(x)]$ задает протяженность функции $u^I(x) = b^I(x) + s^I(x)$, а функционал D_{Σ} есть сумма пространственных протяженностей этих двух каналов. В условиях симметричности известной полосы пространственных частот задача (4) может быть сформулирована в виде двух задач минимизации, которые при использовании «мириадной» аппроксимации имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln([b^R(x) + s^R(x)]^2 + \alpha^2) dx \rightarrow \min\{s^R(x)\}; \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln([b^I(x) + s^I(x)]^2 + \alpha^2) dx \rightarrow \min\{s^I(x)\}, \quad (6)$$

и которые могут решаться параллельно. Отметим, что здесь параметр α^2 мы считаем общим для всех каналов.

3. Векторная версия. Постановка задач обработки многокомпонентного (многоканального) сигнала на основе векторной версии ПМПП заключается в минимизации общей пространственной протяженности такого сигнала. Для рассматриваемой задачи экстраполяции пространственного спектра комплекснозначных источников, где мы выделяем два канала обработки, имеем частный случай двухканальной обработки. Так как эти каналы мы связываем с реальной и мнимой частями функции $u(x)$, то в этом случае при использовании «мириадной» аппроксимации мы записываем постановку задачи в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln([b^R(x) + s^R(x)]^2 + [b^I(x) + s^I(x)]^2 + \alpha^2) dx \rightarrow \rightarrow \min\{s^R(x), s^I(x)\}, \quad (7)$$

где функционал в левой части (7) задает общую пространственную квазипротяженность функции $u(x)$. В отличие от скалярной версии, здесь мы оперируем фактически с огибающей комплексного пространственного сигнала.

4. Алгоритмы оптимизации. Решение задач (5)–(7) нельзя получить в аналитическом виде, однако для их решения можно использовать численные методы. Мы предлагаем один из возможных подходов, который основан на градиентном методе со следующей схемой вычислений:

$$u^{(t+1)} = u^{(t)} - h^{(t)} g^{(t)}; \quad h^{(t)} = \arg(\min_h f(u^{(t)} - hg^{(t)})),$$

где t – номер итерации; $u^{(t)}$ – приближение к функции $u(x)$ на t -й итерации; $h^{(t)}$ – шаг вдоль направления спуска (которое задается антиградиентом) на t -й итерации; $g^{(t)}$ – градиент функционала f на t -й итерации. Для применения этого подхода к решению задачи экстраполяции перепишем функционалы (5)–(7) в виде, пригодном для их использования при численных расчетах.

Пусть вдоль оси x с равномерным шагом размещены узлы дискретной сетки, на которой заданы значения функции $b(x) = b^R(x) + jb^I(x)$ и на которой ищем неизвестные значения функции $s(x) = s^R(x) + js^I(x)$. Тогда для скалярной версии ПМПП вместо (5), (6) в дискретном случае имеем задачи

$$\sum_{n=1}^N \ln([b_n^R + s_n^R]^2 + \alpha^2) \rightarrow \min\{s_1^R, \dots, s_N^R\}; \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^N \ln([b_n^I + s_n^I]^2 + \alpha^2) \rightarrow \min\{s_1^I, \dots, s_N^I\}, \quad (9)$$

где $b_n^R + s_n^R = u_n^R$ – элементы массива u^R , которые отвечают вещественной части функции $u(x)$; $b_n^I + s_n^I = u_n^I$ – элементы массива u^I , которые отвечают мнимой части функции $u(x)$; N – количество узлов дискретной сетки; α^2 – параметр внутренней регуляризации. Для векторной версии ПМПП вместо (7) в дискретном случае имеем задачу

$$\sum_{n=1}^N \ln([b_n^R + s_n^R]^2 + [b_n^I + s_n^I]^2 + \alpha^2) \rightarrow \rightarrow \min\{s_1^R, \dots, s_N^R; s_1^I, \dots, s_N^I\}. \quad (10)$$

Из (3) следует, что градиент мириадного функционала может быть получен по такому алгоритму:

– построить вспомогательную функцию $h(x) = [p(x) + q(x)] / [|p(x) + q(x)|^2 + \alpha^2]$;

– выполнить прямое преобразование Фурье от функции $h(x)$, получив пространственный спектр $H(\omega)$;

– приравнять нулю значения функции $H(\omega)$ внутри полосы частот $[-\Omega, \Omega]$, обозначив полученную функцию $G(\omega)$;

– выполнить обратное преобразование Фурье от функции $G(\omega)$, получив искомый градиент $g(x)$.

В этом алгоритме для скалярной версии ПМПП в качестве функций $p(x)$ и $q(x)$ в задаче (5) необходимо использовать функции $b^R(x)$ и $s^R(x)$, а в задаче (6) – функции $b^I(x)$ и $s^I(x)$. Для векторной версии ПМПП в качестве функций $p(x)$ и $q(x)$ необходимо применять комплекснозначные функции $b(x)$ и $s(x)$. Из этого рассмотрения ясно,

что основным инструментом построения вектора градиента являются алгоритмы дискретного преобразования Фурье, которые при соответствующем выборе значения N могут быть реализованы по схемам алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Решение одномерной задачи минимизации $h^{(t)} = \arg(\min_h f(u^{(t)} - hg^{(t)}))$ мы предлагаем выполнять на конечном множестве «пробных шагов». В данной работе в это множество мы включили только «обнуляющие шаги» [12]; величина этих шагов на t -й итерации есть: $h_n = u_n^{(t)} / g_n^{(t)}$, $n = 1, \dots, N$. Видно, что каждый из этих шагов обращает в нуль соответствующее значение $u_n^{(t)}$, минимизируя тем самым n -е слагаемое функционала квазипротяженности. На каждой итерации из множества пробных шагов мы выбирали тот шаг, который минимизировал соответствующий функционал как функцию h . Если этот шаг был равен нулю, то мы завершали итерационный процесс.

Для скалярной версии ПМПП мы вычисляли два таких шага. Первый шаг применялся для минимизации (8); его значение выбиралось среди N значений: $h_n^R = \text{Re}[u_n^{(t)}] / \text{Re}[g_n^{(t)}]$, $n = 1, \dots, N$, где $\text{Re}[\dots]$ обозначает операцию взятия реальной части. Второй шаг применялся для минимизации (9); его значение выбиралось среди N значений: $h_n^I = \text{Im}[u_n^{(t)}] / \text{Im}[g_n^{(t)}]$, $n = 1, \dots, N$, где $\text{Im}[\dots]$ обозначает операцию взятия мнимой части. Таким образом, на каждой итерации для вычисления значений этих двух шагов требовалось N раз вычислить значение функционала (8) и N раз вычислить значение функционала (9).

Для векторной версии ПМПП возможны различные варианты вычисления величины шага (шагов). В дальнейшем мы использовали вариант, который заключался в выборе двух шагов, где один шаг выбирался из условия равенства нулю в одном из дискретных отсчетов реальной части выражения $u^{(t)} - hg^{(t)}$, а второй – из условия равенства нулю в одном из дискретных отсчетов мнимой части этого выражения. Формально этот вариант аналогичен вычислениям для скалярной версии ПМПП, однако градиент функционала (10), который вычисляется для реальной s^R (мнимой s^I) части решения, зависит и от реальной s^R (мнимой s^I), и от мнимой s^I (реальной s^R) части решения. Поэтому функционал (10) есть двумерная функция шагов для реальной и мнимой части решения; для вычисления этих двух шагов на каждой итерации требовалось N^2 раз вычислить значение функционала (10).

В качестве начального приближения мы использовали нулевое начальное приближение, полагая $s_n^R = 0$ и $s_n^I = 0$ для всех $n = 1, \dots, N$ в самом начале итерационного процесса.

5. Результаты численного моделирования. Численное моделирование проводилось для случаев одного и пяти комплекснозначных источников излучения единичной амплитуды, которые располагались в узлах заданной дискретной сетки. Общее количество дискретных отсчетов было равно $N = 128$, а полосе частот $[-\Omega, \Omega]$ отвечали 49 дискретных отсчетов. Вычисления проводились согласно описанным выше алгоритмам, причем для вычисления вектора градиента использовался алгоритм БПФ по основанию 2.

На рис. 1–4 приведены зависимости относительной среднеквадратической ошибки экстраполяции

$$\delta = \left(\sum_{n=1}^N |s_n^\# - s_n|^2 / \sum_{n=1}^N |s_n|^2 \right)^{1/2} \cdot 100 \%,$$

где $s_n^\#$ и s_n – полученные и истинные комплексные значения соответственно. На рис. 1 приведены зависимости δ от фазы ϕ комплекснозначного источника единичной амплитуды (который был расположен в узле с номером $n = 32$) для случая отсутствия шума при выборе трех значений α^2 в скалярной и векторной версиях ПМПП.

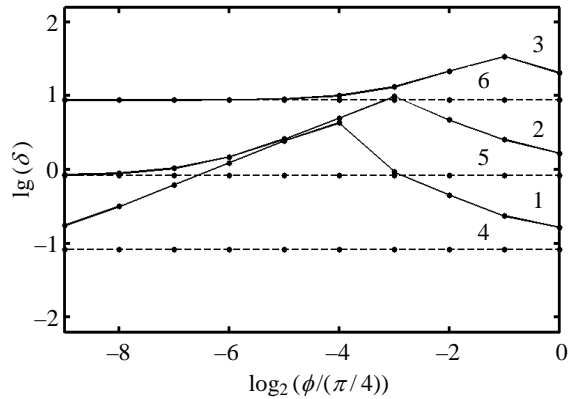


Рис. 1. Зависимости δ (значения отмечены точками) от фазы ϕ источника единичной амплитуды при отсутствии шума для $\alpha^2 = 10^{-3.5}$, $\alpha^2 = 10^{-2.5}$ и $\alpha^2 = 10^{-1.5}$: скалярная (кривые 1–3) и векторная (кривые 4–6) версии ПМПП

Видно, что результаты применения скалярной версии зависят от фазы источника; так, если $\alpha^2 = 10^{-3.5}$, то значение δ для $\phi = \pi / 64$ было приблизительно в 25 раз больше тех значений δ , которые отвечают $\phi = \pi / 512$ или $\phi = \pi / 4$. Также видно, что результаты применения векторной версии не зависят от фазы источника.

На рис. 2 приведены зависимости δ от параметра α^2 .

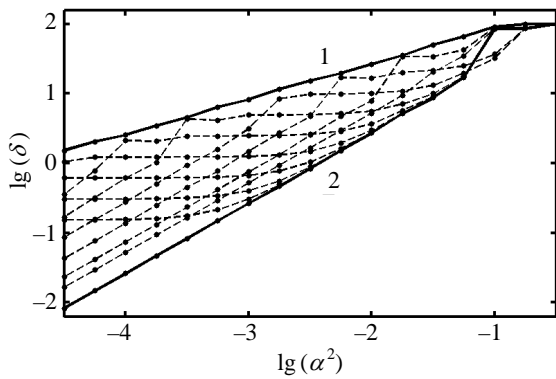


Рис. 2. Зависимости δ от параметра α^2 для источника единичной амплитуды при отсутствии шума: сплошные кривые 1 и 2 представляют наибольшие значения δ для скалярной и векторной версий ПМПП соответственно; пунктирные кривые – набор зависимостей для скалярной версии при различных ϕ

Сплошная кривая 1 представляет наибольшие (по фазе источника, которая была вычислена с абсолютной точностью 0,001 рад) значения δ для скалярной версии в виде условной огибающей набора зависимостей, которые отвечают конкретным значениям фазы источника из диапазона $[0, \pi/4]$; пунктирными кривыми приведены 10 таких зависимостей для $\phi = (\pi/4)/2^{m-1}$, $m = 1, \dots, 10$. Сплошная кривая 2 представляет значения δ для векторной версии, причем она отвечает также и скалярной версии для $\phi = 0$. Значения коэффициентов наклона для кривых 1 и 2 на участке от $\alpha^2 = 10^{-4.5}$ до $\alpha^2 = 10^{-1.5}$ (они были рассчитаны методом наименьших квадратов и равны 0,50 и 1,01) позволяют заключить, что скорости изменения наибольших значений δ для скалярной и векторной версий приблизительно равны $\sqrt{\alpha^2}$ и α^2 соответственно. Отметим, что при $\alpha^2 = 10^{-3}$ и $\phi = 0,029\pi$ значение δ для скалярной версии было больше значения δ для векторной версии почти в 30 раз.

На рис. 3 приведены зависимости средней $\bar{\delta}$ (по 100 реализациям шума) величины δ от параметра α^2 для случая одного источника единичной амплитуды при наличии аддитивного шума в области пространственных частот с отношением сигнал–шум $SNR \approx +20$ дБ. Сплошная кривая 1 представляет наибольшие (по фазе источника, вычисленной с абсолютной точностью 0,001 рад) значения $\bar{\delta}$ для скалярной версии в виде условной огибающей набора зависимостей, которые отвечают конкретным значениям фазы источника из диапазона $[0, \pi/4]$; пунктирными кривыми приведены 10 таких зависимостей для $\phi = (\pi/4)/2^{m-1}$, $m = 1, \dots, 10$. Сплошная кривая 2 представляет наибольшие (по фазам $\phi = 0$,

$\phi = \pi/32$ и $\phi = \pi/4$) значения $\bar{\delta}$ для векторной версии.

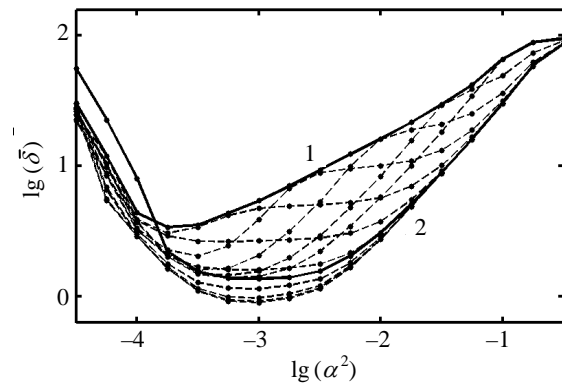


Рис. 3. Зависимости средней (по 100 реализациям шума) величины δ от параметра α^2 для источника единичной амплитуды при наличии шума: сплошные кривые 1 и 2 – наибольшие значения средней величины δ для скалярной и векторной версий ПМПП соответственно; пунктирные кривые – набор зависимостей для скалярной версии при различных ϕ

Видно, что существуют значения α^2 , для которых соответствующие величины $\bar{\delta}$ являются наименьшими. Так, для векторной версии наименьшее значение $\bar{\delta}$ достигалось в среднем за 48 итераций для $\alpha^2 = 10^{-3}$ и составляло 1,36 % при стандартном отклонении 0,65 %; при этом максимальное (по 100 реализациям шума) значение δ было равно 3,30 %. Для скалярной версии в случае наихудшего значения фазы ($\phi = 0,039$ рад) наименьшее значение $\bar{\delta}$ достигалось в среднем за 124 итерации для $\alpha^2 = 10^{-3.75}$ и составляло 3,39 % при стандартном отклонении 1,27 %, а максимальное (по 100 реализациям шума) значение δ было равно 6,96 %. Также видно, что для большинства значений ϕ скалярная версия приводит к худшим результатам, чем векторная версия, однако существуют и такие значения ϕ (близкие к нулю, рис. 3), для которых скалярная версия имеет преимущество. Последний факт связан с тем, что при $\phi \approx k\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \dots$ одна из двух компонент источника может стать настолько малой по сравнению с шумом, что соответствующий ей канал практически будет содержать только шум.

На рис. 4 приведены зависимости δ от α^2 для набора из пяти комплекснозначных источников излучения единичной амплитуды, которые были расположены в узлах с номерами 32, 42, 52, 62, 72 и имели фазу $0, \pi/64, 2\pi/64, 3\pi/64, 4\pi/64$ соответственно, при отсутствии и наличии аддитивного гауссовского шума с $SNR \approx +20$ дБ. Видно, что векторная версия для этого случая имеет преимущество по сравнению со скалярной версией.

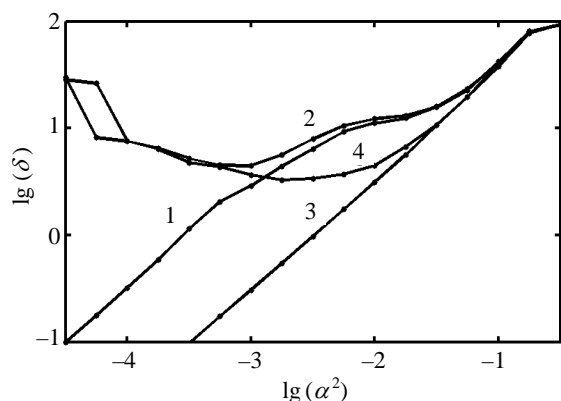


Рис. 4. Относительная ошибка экстраполяции для случая пяти комплекснозначных источников излучения: скалярная обработка данных без шума (кривая 1) и с шумом (кривая 2); векторная обработка данных без шума (кривая 3) и с шумом (кривая 4)

Выводы. Использование ПМПП позволяет решать задачи экстраполяции пространственного спектра комплекснозначных источников в условиях, когда местоположение источников неизвестно. Скалярная версия ПМПП требует небольшого объема вычислений, но результат ее применения зависит от фазы источников излучения. Векторная версия ПМПП требует большего объема вычислений, но результат ее применения не зависит от фазы источников излучения; для больших отношений сигнал–шум она приводит к меньшей ошибке по сравнению со скалярной версией. Однако если отношение сигнал–шум уменьшается, то это преимущество уменьшается.

Библиографический список

1. *Антенны* / Под ред. Л. Д. Бахраха и Д. И. Воскресенского. – М.: Сов. радио, 1979. – 208 с.
2. *Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике* / Под ред. М. Л. Размахнина, В. П. Яковлева. – М.: Сов. радио, 1971. – 256 с.
3. *Ахметшин А. М.* Сверхразрешение оценок параметров слоистых диэлектрических структур методом адаптивной экстраполяции комплексного коэффициента отражения / А. М. Ахметшин, С. М. Вовк // *Дефектоскопия*. – 1986. – № 11. – С. 76–85.
4. *Вовк С. М.* Відновлення рефлектограм за допомогою екстраполяції ширококугових НВЧ-вимірювань методом мінімуму тривалості / С. М. Вовк, В. Ф. Борулько // *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління*. – 2005. – № 1. – С. 5–8.
5. *Тартаковский Л. Б.* Синтез линейного излучателя и его аналогии в задаче широкополосного согласования / Л. Б. Тартаковский // *Радиотехника и электрон.* – 1958. – 3, № 12. – С. 1463–1474.
6. *Gerchberg R. W.* Super-resolution through error energy reduction / R. W. Gerchberg // *Optica Acta*. – 1974. – 21, N 9. – P. 709–720.
7. *Papoulis A.* A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation / A. Papoulis // *IEEE Trans. Circuits and System*. – 1975. – 22, N 9. – P. 735–742.
8. *Вовк С. М.* Метод минимума длительности для восстановления финитных сигналов / С. М. Вовк, В. Ф. Борулько // *Изв. вузов. Радиоэлектрон.* – 1991. – 34, № 8. – С. 66–69.

9. *Вовк С. М.* Удаление измерительного фона методом минимума длительности / С. М. Вовк, В. Ф. Борулько // *Изв. вузов. Радиоэлектрон.* – 1998. – 41, № 10. – С. 70–72.
10. *Vovk S.* Image processing by minimum extent method / S. Vovk, V. Borulko // *Proc. 3rd Intern. Conf. Pattern Recognition and Information Analysis*. – Minsk, 1995. – V. 3. – P. 71–72.
11. *Vovk S. M.* Using the method of minimum extension to extrapolation of antenna measurements / S. M. Vovk, V. F. Borulko // *Proc. 10th Intern. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET-04)*. – Dnepropetrovsk, 2004. – P. 159–161.
12. *Борулько В. Ф.* Определение источников в одномерной решетке электрических диполей на основе принципа минимальной пространственной протяженности решения / В. Ф. Борулько, С. М. Вовк // *Радиофизика и электрон.* – 2011. – 2(16), № 2. – С. 14–20.
13. *Титчмарш Е.* Теория функций / Е. Титчмарш. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
14. *Демиденко Е. З.* Оптимизация и регрессия / Е. З. Демиденко. – М.: Наука, 1989. – 296 с.
15. *Вовк С. М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазинормированных пространствах / С. М. Вовк, В. Ф. Борулько // *Изв. вузов. Радиоэлектрон.* – 2010. – 53, № 7. – С. 31–42.
16. *Борулько В. Ф.* Принцип мінімуму тривалості та обґрунтування методів мірядної й меридіанної фільтрації / В. Ф. Борулько, С. М. Вовк, В. М. Долгов // *Вісник ДНУ. Фізика. Радиоелектрон.* – 2010. – 18, вип. 17, № 2. – С. 98–102.

Рукопись поступила 21.11.2011

V. F. Borulko, S. M. Vovk

USING PRINCIPLE OF MINIMUM EXTENT FOR SPATIAL SPECTRUM EXTRAPOLATION OF COMPLEX-VALUED SOURCES

Spectrum extrapolation problem for complex-valued radiation sources with unknown support is considered. For solving extrapolation problem the principle of minimum spatial extent of radiation sources is used. Scalar and vector versions of functional of quasi-extent are proposed. Based on this versions non-linear optimization problems are formulated and approach using gradient method is proposed. Numerical simulations for cases of one and five complex-valued radiation sources are presented.

Key words: spectrum extrapolation, radiation sources, minimum of spatial extent.

В. Ф. Борулько, С. М. Вовк

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МІНІМУМУ ПРОТЯЖНОСТІ ДЛЯ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ПРОСТОРОВОГО СПЕКТРА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ДЖЕРЕЛ

Розглянуто задачу екстраполяції просторового спектра комплекснозначних джерел випромінювання, місцезнаходження яких априорно невідомо. Для розв'язку задачі використано принцип мінімуму просторової протяжності джерел випромінювання. Запропоновано скалярну та векторну версії функціоналу квазіпротяжності, на основі яких сформульовано відповідні задачі нелінійної оптимізації. Розглянуто підхід до їх розв'язку, що ґрунтується на градієнтному методі оптимізації. Представлено результати числового моделювання для випадків одного та п'ятих комплекснозначних джерел випромінювання.

Ключові слова: екстраполяція спектра, джерела випромінювання, мінімум просторової протяжності.