

Л. Г. Величко, А. А. Кривчикова

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: [lgv@ire.kharkov.ua](mailto:lgv@ire.kharkov.ua); [kryvchikova@ire.kharkov.ua](mailto:kryvchikova@ire.kharkov.ua)

ДВУМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ.

ЧАСТЬ II. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ПОВЕДЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И  
УСТАНОВИВШИХСЯ ПОЛЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ ФЛОКЕ

Представлены аналитические результаты, описывающие ряд важных свойств импульсных и монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в регулярных частях прямоугольного канала Флоке – в зонах отражения и прохождения двумерно-периодических структур. Эти результаты связаны в основном с математической формулировкой и физической трактовкой соотношений закона сохранения энергии и соотношений взаимности. Ил. 1. Библиогр.: 12 назв.

**Ключевые слова:** двумерно-периодическая решетка, канал Флоке, нестационарные и стационарные поля, закон сохранения энергии, соотношения взаимности.

В работе [1] мы привели математически строгую формулировку начально-краевых задач относительно векторов напряженности электромагнитного поля, формируемого двумерно-периодическими структурами. В продолжение начатой работы [1] мы выводим ряд важных соотношений, характеризующих все трехмерные периодические структуры – уравнение баланса энергии, связывающего коэффициенты отражения и прохождения, а также соотношения, определяющие связь коэффициентов преобразования различных волн друг в друга – так называемые соотношения взаимности. Аналоги этих соотношений в теории двумерных периодических решеток широко используются при тестировании алгоритмов решения различных модельных задач, а также для верной физической трактовки резуль-

татов соответствующих численных экспериментов [2–7]. Все обозначения, использованные в настоящей статье, подробно описаны в работе [1].

**1. О некоторых свойствах нестационарных полей в прямоугольном канале Флоке R.** Для реализации вычислительных схем, к которым приводит использование условия (19) или условия (20) работы [1], необходима информация о значениях функции  $\bar{U}^i(g, t)$  ( $t \in [0; T]$ ) и ее производной по нормали на виртуальной границе  $L_+$  (см. рисунок из [1]). В случае, когда волна  $\bar{U}^i(g, t)$  порождается заданной системой источников  $\bar{J}^A(g, t)$ ,  $\bar{\varphi}_E^A(g)$  и  $\bar{\varphi}_H^A(g)$ , получение такой информации сводится к решению следующих начально-краевых задач о распространении возмущения в регулярном полом канале Флоке  $R$  [1]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right] \begin{Bmatrix} \bar{E}^i \\ \bar{H}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial \bar{J}^A / \partial t + \text{grad} \rho_2^A \\ -\text{rot} \bar{J}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_E^A \\ \bar{F}_H^A \end{Bmatrix}, \\ & g = \{x, y, z\} \in R, \quad t > 0, \\ & \begin{Bmatrix} \bar{E}^i(g, 0) \\ \bar{H}^i(g, 0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_E^A \\ \bar{\varphi}_H^A \end{Bmatrix}, \\ & \left\{ \begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{E}^i(g, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \eta_0 \text{rot} \bar{H}^i(g, 0) \\ \left. \frac{\partial \bar{H}^i(g, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\eta_0^{-1} \text{rot} \bar{E}^i(g, 0) \end{aligned} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\psi}_E^A \\ \bar{\psi}_H^A \end{Bmatrix}, \quad g \in \bar{R}, \\ & D[\bar{E}^i(\bar{H}^i)](l_x, y) = e^{2\pi i \Phi_x} D[\bar{E}^i(\bar{H}^i)](0, y), \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ & D[\bar{E}^i(\bar{H}^i)](x, l_y) = e^{2\pi i \Phi_y} D[\bar{E}^i(\bar{H}^i)](x, 0), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad t \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь функция  $\rho_2^A(g, t)$  отвечает объемной плотности сторонних электрических зарядов.

Определим сначала продольные компоненты  $E_z^i$  и  $H_z^i$  поля  $\{\bar{E}^i, \bar{H}^i\}$  во всех точках  $g$

области  $R$  и для всех моментов времени наблюдения  $t > 0$ . Для этого рассмотрим следующие скалярные начально-краевые задачи, вытекающие из (1):

$$\begin{cases}
 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right] \begin{Bmatrix} E_z^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z,E}^A \\ F_{z,H}^A \end{Bmatrix}, \\
 g \in R, t > 0, \\
 \begin{Bmatrix} E_z^i(g,0) \\ H_z^i(g,0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{z,E}^A \\ \varphi_{z,H}^A \end{Bmatrix}, \\
 \begin{Bmatrix} \partial E_z^i(g,t)/\partial t|_{t=0} \\ \partial H_z^i(g,t)/\partial t|_{t=0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_{z,E}^A \\ \psi_{z,H}^A \end{Bmatrix}, g \in \bar{R}, \\
 D[E_z^i(H_z^i)](l_x, y) = \\
 = e^{2\pi\Phi_x} D[E_z^i(H_z^i)](0, y), 0 \leq y \leq l_y, \\
 D[E_z^i(H_z^i)](x, l_y) = \\
 = e^{2\pi\Phi_y} D[E_z^i(H_z^i)](x, 0), 0 \leq x \leq l_x, t \geq 0.
 \end{cases} \quad (2)$$

Отделим в задачах (2) поперечные переменные  $x$  и  $y$  и представим их решение в виде

$$\begin{Bmatrix} E_z^i(g,t) \\ H_z^i(g,t) \end{Bmatrix} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} \mu_{nm}(x,y). \quad (3)$$

Определение скалярных функций  $v_{nm(z,E)}(z,t)$  и  $v_{nm(z,H)}(z,t)$  сводится к обращению следующих задач Коши для одномерных уравнений Клейна-Гордона:

$$\begin{cases}
 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda_{nm} \right] \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} = \\
 = \begin{Bmatrix} F_{nm(z,E)}^A \\ F_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix}, t > 0, -\infty < z < \infty, \\
 \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,0) \\ v_{nm(z,H)}(z,0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{nm(z,E)}^A \\ \varphi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix}, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{Bmatrix} \psi_{nm(z,E)}^A \\ \psi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix}, \\
 -\infty < z < \infty, n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $F_{nm(z,E)}^A$ ,  $\varphi_{nm(z,E)}^A$ ,  $\psi_{nm(z,E)}^A$  и  $F_{nm(z,H)}^A$ ,  $\varphi_{nm(z,H)}^A$ ,  $\psi_{nm(z,H)}^A$  – амплитуды разложений Фурье функций  $F_{z,E}^A$ ,  $\varphi_{z,E}^A$ ,  $\psi_{z,E}^A$  и  $F_{z,H}^A$ ,  $\varphi_{z,H}^A$ ,  $\psi_{z,H}^A$  в базисе  $\{\mu_{nm}(x,y)\}$ .

Продолжим функции  $v_{nm(z,E)}(z,t)$ ,  $v_{nm(z,H)}(z,t)$  и  $F_{nm(z,E)}^A$ ,  $F_{nm(z,H)}^A$  нулем на полуоси  $t < 0$  и перейдем к обобщенной формулировке задач Коши (4) [8]:

$$\begin{aligned}
 B(\lambda_{nm}) \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} &\equiv \\
 &\equiv \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda_{nm}^2 \right] \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} F_{nm(z,E)}^A \\ F_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \delta^{(1)}(t) \begin{Bmatrix} \varphi_{nm(z,E)}^A \\ \varphi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \\
 &- \delta(t) \begin{Bmatrix} \psi_{nm(z,E)}^A \\ \psi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{nm(z,E)} \\ f_{nm(z,H)} \end{Bmatrix}, \\
 &-\infty < z < \infty, -\infty < t < \infty, n, m = 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \quad (5)$$

Решения  $v_{nm(z,E)}(z,t)$  и  $v_{nm(z,H)}(z,t)$  уравнений (5) построим, опираясь на свойства фундаментального решения  $G(z,t,\lambda) = -(1/2)\chi(t-|z|)J_0(\lambda\sqrt{t^2-z^2})$

оператора  $B(\lambda)$  (см., например, [9] и [10]):

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{Bmatrix} &= G(z,t,\lambda_{nm}) * \begin{Bmatrix} f_{nm(z,E)} \\ f_{nm(z,H)} \end{Bmatrix} = \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{t-|z-\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\lambda_{nm}\sqrt{(t-\tau)^2-(z-\omega)^2}) \times \right. \\
 &\times \left( \begin{Bmatrix} F_{nm(z,E)}^A \\ F_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \delta^{(1)}(t) \begin{Bmatrix} \varphi_{nm(z,E)}^A \\ \varphi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} - \right. \\
 &- \left. \left. \delta(t) \begin{Bmatrix} \psi_{nm(z,E)}^A \\ \psi_{nm(z,H)}^A \end{Bmatrix} \right) d\omega d\tau \right], \\
 &-\infty < z < \infty, t \geq 0, n, m = 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения (3), (6) полностью определяют продольные компоненты поля  $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$ . Здесь  $\delta^{(m)}(t)$  – производная порядка  $m$  дельта-функции Дирака  $\delta(t)$ ,  $\chi(t)$  – ступенчатая функция Хевисайда,  $J_0(x)$  – функция Бесселя.

Выйдем теперь за пределы ограниченной области в канале Флоке  $R$ , в которой сосредоточены все источники, в область  $G \subset R$ , где волны, которые порождаются этими источниками, распространяются свободно. Здесь справедливы [9, 10] представления

$$\begin{cases}
 \vec{E}^i = \left( \frac{\partial^2 U^E}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial y \partial t} \right) \vec{x} + \\
 + \left( \frac{\partial^2 U^E}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial x \partial t} \right) \vec{y} + \left( \frac{\partial^2 U^E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^E}{\partial t^2} \right) \vec{z}, \\
 \eta_0 \vec{H}^i = \left( \frac{\partial^2 U^E}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial x \partial z} \right) \vec{x} + \\
 + \left( -\frac{\partial^2 U^E}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial y \partial z} \right) \vec{y} + \left( \frac{\partial^2 U^H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial t^2} \right) \vec{z},
 \end{cases} \quad (7)$$

в которых

$$U^{E,H}(g,t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} u_{nm}^{E,H}(z,t) \mu_{nm}(x,y) \quad (8)$$

– скалярные функции Боргнаса такие, что  $[\Delta - \partial^2/\partial t^2][\partial U^{E,H}(g,t)/\partial t] = 0$ . Соотношения (3), (6)–(8) определяют поле  $\{\bar{E}^i, \bar{H}^i\}$  во всех точках  $g$  области  $G$  и для всех моментов времени наблюдения  $t > 0$ . Действительно, поскольку в момент времени  $t = 0$  область  $G$  не была возмущена, то  $[\Delta - \partial^2/\partial t^2]U^{E,H} = 0$  ( $g \in G, t > 0$ ). Отсюда из (7), (8) следует, что

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\partial^2 U^E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^E}{\partial t^2} = \\ &= -\left(\frac{\partial^2 U^E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^E}{\partial y^2}\right) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \lambda_{nm}^2 u_{nm}^E \mu_{nm}, \\ \eta_0 H_z &= \frac{\partial^2 U^H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial t^2} = \\ &= -\left(\frac{\partial^2 U^H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial y^2}\right) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \lambda_{nm}^2 u_{nm}^H \mu_{nm} \end{aligned}$$

и (см. представление (3))

$$\begin{aligned} u_{nm}^E(z,t) &= (\lambda_{nm})^{-2} v_{nm(z,E)}(z,t), \\ u_{nm}^H(z,t) &= \eta_0 (\lambda_{nm})^{-2} v_{nm(z,H)}(z,t). \end{aligned} \quad (9)$$

Функции  $U^{E,H}(g,t)$  определены, а вместе с ними соотношениями (7) и поперечные компоненты векторов напряженности поля  $\{\bar{E}^i, \bar{H}^i\}$ .

Еще один важный вывод позволяет сделать проведенный анализ: все поля, возникающие в зоне отражения (область  $A$ ) и прохождения (область  $B$ ) периодической структуры, однозначно определяются своими продольными (направленными вдоль оси  $z$ ) компонентами, которые могут быть представлены в следующем виде (см. также формулы (14) из [1] и (3)). В поле падающей волны –

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_z^i(g,t) \\ H_z^i(g,t) \end{array} \right\} &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} v_{nm(z,E)}(z,t) \\ v_{nm(z,H)}(z,t) \end{array} \right\} \mu_{nm}(x,y), \\ g \in \bar{A}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В поле отраженной волны  $\bar{U}^s(g,t)$ , которое совпадает с полным полем  $\bar{U}(g,t)$  в случае  $\bar{U}^i(g,t) \equiv 0$ , –

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_z^s(g,t) \text{ или } E_z(g,t) \\ H_z^s(g,t) \text{ или } H_z(g,t) \end{array} \right\} &= \\ &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} u_{nm(z,E)}^+(z,t) \\ u_{nm(z,H)}^+(z,t) \end{array} \right\} \mu_{nm}(x,y), \\ g \in \bar{A}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В поле прошедшей волны, которое совпадает с полным полем  $\bar{U}(g,t)$ , –

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_z(g,t) \\ H_z(g,t) \end{array} \right\} &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} u_{nm(z,E)}^-(z,t) \\ u_{nm(z,H)}^-(z,t) \end{array} \right\} \mu_{nm}(x,y), \\ g \in \bar{B}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При изучении физики процессов, реализуемых в решетках, и при решении различных прикладных задач чаще всего рассматриваются ситуации, в которых периодическая структура возбуждается одной из парциальных составляющих  $TE$ - ( $E_z(g,t) = 0$ ) или  $TM$ -волны ( $H_z^i(g,t) = 0$ )  $\bar{U}^i(g,t)$  [7]. Пусть этой составляющей отвечают номера  $p$  и  $q$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{U}^i(g,t) &= \\ &= \bar{U}_{pq(H)}^i(g,t): H_z^i(g,t) = v_{pq(z,H)}(z,t) \mu_{pq}(x,y) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{U}^i(g,t) &= \\ &= \bar{U}_{pq(E)}^i(g,t): E_z^i(g,t) = v_{pq(z,E)}(z,t) \mu_{pq}(x,y). \end{aligned}$$

Возбуждение такого рода реализуется в наших моделях следующим образом. На границе  $L_+$  задается временная функция  $v_{pq(z,H)}(L,t)$  ( $v_{pq(z,E)}(L,t)$ ), определяющая полосу частот  $k = 2\pi/\lambda$ , занятую импульсом  $\bar{U}^i(g,t)$ , – интервал  $[0 \leq K_1; K_1 < \infty]$  такой, что для всех  $k \in [K_1; K_1]$  относительная величина

$$\gamma = \frac{|\tilde{v}_{pq(z,H \text{ или } E)}(L,k)|}{\max_{k \in [K_1; K_2]} |\tilde{v}_{pq(z,H \text{ или } E)}(L,k)|}$$

модулей спектральных амплитуд  $\tilde{v}_{pq(z,H \text{ или } E)}(L,k)$  импульса  $v_{pq(z,H \text{ или } E)}(L,t)$  не опускается ниже какого-то определенного уровня  $\gamma = \gamma_0$ . Здесь  $\lambda$  – длина волны в свободном

пространстве, а все спектральные характеристики  $\tilde{f}(k)$  мы получаем из временных характеристик  $f(t)$ , используя интегральное преобразование Лапласа  $\tilde{f}(k) \leftrightarrow f(t)$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{ikt} dt, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \tilde{f}(k)e^{-ikt} dk, \quad \text{Im } k \geq \alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для реализации условий (19) и (20) из [1] и для расчета пространственно-временных амплитуд поперечных компонент поля волны  $\vec{U}^i(g, t)$  в сечении  $z=L$  канала Флоке (см. формулы (7), (9)) нам необходимо определить функцию  $(v_{pq(z, H \text{ или } E)})'(L, t)$ . Сделать это, не нарушая принцип причинности, можно, используя соотношение [7]

$$\begin{aligned} \vec{v}_{pq(H \text{ или } E)}(L, t) &= \\ &= \int_0^t J_0[\lambda_{pq}(t-\tau)] (\vec{v}_{pq(H \text{ или } E)})'(L, t) d\tau, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

(см. также формулу (16) из [1]), справедливое для всех амплитуд импульсной волны  $\vec{U}^i(g, t)$ , уходящей в направлении  $z = -\infty$ .

## 2. Некоторые свойства стационарных полей в прямоугольном канале Флоке R. Возбуждение TM-волной.

Пусть решетка возбуждается из области A импульсной TM-волной  $\vec{U}^i(g, t) = \vec{U}_{pq(E)}^i(g, t): E_z^i(g, t) =$

$= v_{pq(z, E)}(z, t) \mu_{pq}(x, y)$  и источники  $\vec{J}(g, t), \vec{\varphi}_E(g)$  и  $\vec{\varphi}_H(g)$  в области  $Q_L$  отсутствуют. Возникающее

в областях A и B вторичное поле полностью определяется своими продольными компонентами. Их мы представим в виде (11), (12). Установившиеся поля  $\{\tilde{E}(g, k), \tilde{H}(g, k)\}$  (см. преобразование (13);  $\text{Im } k = 0$ ), отвечающие импульсным полям  $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}, \{\vec{E}^s, \vec{H}^s\}$  в области A и импульсному полю  $\{\vec{E}, \vec{H}\}$  в области B, зададим их продольными компонентами

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_z^i(g, k) \\ \tilde{H}_z^i(g, k) \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{Bmatrix} \vec{v}_{pq(z, E)}(k) \\ 0 \end{Bmatrix} e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y), \quad g \in \bar{A}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_z^s(g, k) \\ \tilde{H}_z^s(g, k) \end{Bmatrix} &= \\ &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{nm(z, E)}^+(k) \\ \tilde{u}_{nm(z, H)}^+(k) \end{Bmatrix} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y), \quad g \in \bar{A}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{Bmatrix} &= \\ &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{nm(z, E)}^-(k) \\ \tilde{u}_{nm(z, H)}^-(k) \end{Bmatrix} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y), \quad g \in \bar{B}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\vec{v}_{pq(z, E)}(k) \leftrightarrow v_{pq(z, E)}(L, t)$ ,  $\tilde{u}_{nm(z, E \text{ или } H)}^{\pm}(k) \leftrightarrow u_{nm(z, E \text{ или } H)}^{\pm}(\pm L, t)$  и  $\Gamma_{nm} = (k^2 - \lambda_{nm}^2)^{1/2}$ ,  $\text{Re } \Gamma_n \text{ Re } k \geq 0$ ,  $\text{Im } \Gamma_n \geq 0$  [7].

Амплитуды  $\tilde{u}_{nm(z, E \text{ или } H)}^{\pm}(k)$  формируют систему так называемых коэффициентов рассеяния решетки: коэффициентов отражения

$$\begin{aligned} R_{pq(E)}^{nm(H)} &= \frac{\tilde{u}_{nm(z, H)}^+(k)}{\vec{v}_{pq(z, E)}(k)}, \\ R_{pq(E)}^{nm(E)} &= \frac{\tilde{u}_{nm(z, E)}^+(k)}{\vec{v}_{pq(z, E)}(k)}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

которые характеризуют эффективность преобразования  $pq$ -й гармоники монохроматической TM-волны в  $nm$ -е гармоники вторичного поля  $\{\tilde{E}^s, \tilde{H}^s\}$  в зоне отражения решетки, и коэффициентов прохождения

$$\begin{aligned} T_{pq(E)}^{nm(H)} &= \frac{\tilde{u}_{nm(z, H)}^-(k)}{\vec{v}_{pq(z, E)}(k)}, \\ T_{pq(E)}^{nm(E)} &= \frac{\tilde{u}_{nm(z, E)}^-(k)}{\vec{v}_{pq(z, E)}(k)}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

определяющие эффективность возбуждения гармоник вторичного поля в области B.

Эти коэффициенты связаны соотношениями баланса энергии

$$\begin{aligned} &\sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}^2} \left[ (|R_{pq(E)}^{nm(E)}|^2 + |T_{pq(E)}^{nm(E)}|^2) \pm \right. \\ &\pm \eta_0^2 (|R_{pq(E)}^{nm(H)}|^2 + |T_{pq(E)}^{nm(H)}|^2) \left. \right] \begin{Bmatrix} \text{Re } \Gamma_{nm} \\ \text{Im } \Gamma_{nm} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda_{pq}^2} \begin{Bmatrix} \text{Re } \Gamma_{pq} + 2 \text{Im } \Gamma_{pq} \text{Im } R_{pq(E)}^{pq(E)} \\ \text{Im } \Gamma_{pq} - 2 \text{Re } \Gamma_{pq} \text{Im } R_{pq(E)}^{pq(E)} \end{Bmatrix} \mp \\ &\mp \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix}, \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{\varepsilon_0}{k} \int_{Q_L} \sigma(g, k) \left| \tilde{E}(g, k) \right|^2 dg, \\
 W_2 &= \int_{Q_L} \left[ \mu_0 \mu(g, k) \left| \tilde{H}(g, k) \right|^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon_0 \varepsilon(g, k) \left| \tilde{E}(g, k) \right|^2 \right] dg,
 \end{aligned} \tag{21}$$

которые следуют из интегральной формы теоремы о комплексной мощности (теоремы Пойнтинга) [11, 12]

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_L} \left( \left[ \tilde{E} \times \tilde{H}^* \right] ds \right) &= \int_{Q_L} \operatorname{div} \left[ \tilde{E} \times \tilde{H}^* \right] dg = \\
 &= ik\eta_0 \int_{Q_L} \mu \left| \tilde{H} \right|^2 dg - \\
 &\quad - \frac{ik}{\eta_0} \int_{Q_L} \varepsilon \left| \tilde{E} \right|^2 dg - \int_{Q_L} \sigma_0 \left| \tilde{E} \right|^2 dg.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь  $\varepsilon(g, k) - 1 = \tilde{\chi}_\varepsilon(g, k) \leftrightarrow \chi_\varepsilon(g, t)$ ,  $\mu(g, k) - 1 = \tilde{\chi}_\mu(g, k) \leftrightarrow \chi_\mu(g, t)$ ,  $\sigma(g, k) = \tilde{\chi}_\sigma(g, k) \leftrightarrow \chi_\sigma(g, t)$ ,

$\vec{ds}$  – векторный элемент поверхности  $S_L$ , ограничивающей область  $Q_L$ , и при выводе (20)–(22) мы исходили из следующей краевой задачи, определяющей дифракционные характеристики решетки, помещенной в поле плоской  $TM$ -волны  $\tilde{U}_{pq(E)}^i(g, k): \tilde{E}_z^i(g, k) = \exp[-i\Gamma_{pq}(z-L)]\mu_{pq}(x, y):$

$$\begin{cases}
 \eta_0 \operatorname{rot} \tilde{H}(g, k) = -ik\bar{\varepsilon}(g, k) \tilde{E}(g, k), \\
 \operatorname{rot} \tilde{E}(g, k) = ik\eta_0 \mu(g, k) \tilde{H}(g, k), \quad g \in Q_L, \\
 D \left[ \tilde{E} \left( \tilde{H} \right) \right] (l_x, y) = \\
 = e^{2i\pi\Phi_x} D \left[ \tilde{E} \left( \tilde{H} \right) \right] (0, y), \quad 0 \leq y \leq l_y, \\
 D \left[ \tilde{E} \left( \tilde{H} \right) \right] (x, l_y) = \\
 = e^{2i\pi\Phi_y} D \left[ \tilde{E} \left( \tilde{H} \right) \right] (x, 0), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad |z| < L, \\
 \tilde{E}_{tg}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0, \quad \tilde{H}_{nr}(g, k) \Big|_{g \in S} = 0;
 \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} &= \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y) + \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{pq(E)}^{nm(E)}(k) \\ R_{pq(E)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y), \quad g \in \bar{A}, \\
 \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} T_{pq(E)}^{nm(E)}(k) \\ T_{pq(E)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y), \quad g \in \bar{B}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

При построении (20), (21) были использованы также следующие легко проверяемые соотношения, связывающие поперечные компоненты поля  $\left\{ \tilde{E}, \tilde{H} \right\}$  собственной монохроматической волны канала Флоке

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}(g, k): \tilde{E}_z(g, k) &= Ae^{\pm i\Gamma z} \mu(x, y) \quad \text{и} \\
 \tilde{H}_z(g, k) &= Be^{\pm i\Gamma z} \mu(x, y)
 \end{aligned} \tag{25}$$

(индексы  $nm$  мы здесь опускаем) с его продольными компонентами:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_x &= -\frac{\beta k \eta_0}{\lambda^2} \tilde{H}_z \mp \frac{\alpha \Gamma}{\lambda^2} \tilde{E}_z, \\
 \tilde{E}_y &= \frac{\alpha k \eta_0}{\lambda^2} \tilde{H}_z \mp \frac{\beta \Gamma}{\lambda^2} \tilde{E}_z, \\
 \tilde{H}_x &= \mp \frac{\alpha \Gamma}{\lambda^2} \tilde{H}_z + \frac{\beta k}{\eta_0 \lambda^2} \tilde{E}_z, \\
 \tilde{H}_y &= \mp \frac{\beta \Gamma}{\lambda^2} \tilde{H}_z - \frac{\alpha k}{\eta_0 \lambda^2} \tilde{E}_z.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь  $\bar{\varepsilon}(g, k) = \varepsilon(g, k) + i\sigma(g, k)/k$  и  $\mu(x, y) = (l_x l_y)^{-1/2} \exp(i\alpha x) \exp(i\beta y)$ ,  $\Gamma = (k^2 - \lambda^2)^{1/2}$ ,  $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

Поля  $\left\{ \tilde{E}^{(1)}, \tilde{H}^{(1)} \right\}$  и  $\left\{ \tilde{E}^{(2)}, \tilde{H}^{(2)} \right\}$ , порождаемые решеткой и двумя плоскими  $TM$ -волнами

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_{pq(E)}^{i(1)}(g, k): \tilde{E}_z^{i(1)}(g, k) &= \\
 &= \exp[-i\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)(z-L)] \mu_{pq}(x, y, \Phi_x, \Phi_y)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_{-r,-s(E)}^{i(2)}(g, k): \tilde{E}_z^{i(2)}(g, k) &= \\
 &= \exp[-i\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)(z-L)] \times \\
 &\quad \times \mu_{-r,-s}(x, y, -\Phi_x, -\Phi_y)
 \end{aligned}$$

согласно лемме Лоренца [11], удовлетворяют уравнению

$$\oint_{S_L} \left( \left[ \tilde{E}^{(1)} \times \tilde{H}^{(2)} \right] - \left[ \tilde{E}^{(2)} \times \tilde{H}^{(1)} \right] \right) ds = 0. \tag{27}$$

Из (27), используя представления (24) и (26), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{R_{pq(E)}^{rs(E)}(\Phi_x, \Phi_y) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} = \\ & = \frac{R_{-r,-s(E)}^{-p,-q(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

– соотношения взаимности, играющие важную роль при физическом анализе рассеяния электромагнитных волн периодическими структурами, при тестировании алгоритмов численного решения краевых задач (23), (24).

Пусть теперь так же, как и в рассмотренном выше случае,

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_{pq(E)}^{i(1)}(g, k) : \tilde{E}_z^{i(1)}(g, k) = \\ & = \exp[-i\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)(z-L)] \mu_{pq}(x, y, \Phi_x, \Phi_y) = \\ & = \tilde{U}_{pq(E)}^{i(1)}(g, k, A) \end{aligned}$$

(решетка возбуждается из области  $A$ ), а волна

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_{-r,-s(E)}^{i(2)}(g, k) : \tilde{E}_z^{i(2)}(g, k, B) = \\ & = \exp[i\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)(z+L)] \times \\ & \times \mu_{-r,-s}(x, y, -\Phi_x, -\Phi_y) \end{aligned}$$

приходит на решетку из области  $B$ . Эти две волны также удовлетворяют уравнению (27), откуда, с учетом (24), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{T_{pq(E)}^{rs(E)}(\Phi_x, \Phi_y, A) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} = \\ & = \frac{T_{-r,-s(E)}^{-p,-q(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

*Возбуждение TE-волной.* Пусть теперь решетка возбуждается из области  $A$  импульсной TE-волной

$$\tilde{U}_{pq(H)}^i(g, t) : H_z^i(g, t) = v_{pq(z,H)}(z, t) \mu_{pq}(x, y)$$

и источники  $\tilde{J}(g, t)$ ,  $\tilde{\varphi}_E(g)$  и  $\tilde{\varphi}_H(g)$  в области  $Q_L$  отсутствуют. Возникающее в областях  $A$  и  $B$  вторичное поле полностью определяется своими продольными компонентами. Их мы представим в виде (11), (12). Установившиеся поля  $\{\tilde{E}(g, k), \tilde{H}(g, k)\}$ , отвечающие импульсным полям  $\{\tilde{E}^i, \tilde{H}^i\}$ ,  $\{\tilde{E}^s, \tilde{H}^s\}$  в области  $A$  и импульс-

ному полю  $\{\tilde{E}, \tilde{H}\}$  в области  $B$ , зададим их продольными компонентами так же, как мы это сделали в случае TM-волн (см. формулы (15)–(17)).

Коэффициенты рассеяния  $R_{pq(H)}^{nm(E)}$ ,  $R_{pq(H)}^{nm(H)}$ ,  $T_{pq(H)}^{nm(E)}$  и  $T_{pq(H)}^{nm(H)}$  введем соотношениями типа (18).

Эти коэффициенты определяются из задач

$$\begin{cases} \eta_0 \text{rot} \tilde{H}(g, k) = -ik\bar{\varepsilon}(g, k) \tilde{E}(g, k), \\ \text{rot} \tilde{E}(g, k) = ik\eta_0 \mu(g, k) \tilde{H}(g, k), \quad g \in Q_L, \\ D[\tilde{E}(\tilde{H})](l_x, y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_x} D[\tilde{E}(\tilde{H})](0, y), \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ D[\tilde{E}(\tilde{H})](x, l_y) = \\ = e^{2\pi i \Phi_y} D[\tilde{E}(\tilde{H})](x, 0), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad |z| < L, \\ \tilde{E}_{tg}(g, k)|_{g \in S} = 0, \quad \tilde{H}_{nr}(g, k)|_{g \in S} = 0; \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y) + \\ & + \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{pq(H)}^{nm(E)}(k) \\ R_{pq(H)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{i\Gamma_{nm}(z-L)} \mu_{nm}(x, y), \\ & g \in \bar{A}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(g, k) \\ \tilde{H}_z(g, k) \end{array} \right\} = \\ & = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} T_{pq(H)}^{nm(E)}(k) \\ T_{pq(H)}^{nm(H)}(k) \end{array} \right\} e^{-i\Gamma_{nm}(z+L)} \mu_{nm}(x, y), \\ & g \in \bar{B} \end{aligned}$$

и удовлетворяют следующим соотношениям, являющимся следствиями теоремы Пойнтинга и леммы Лоренца:

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}^2} \left[ \left( |R_{pq(H)}^{nm(H)}|^2 + |T_{pq(H)}^{nm(H)}|^2 \right) \pm \right. \\ & \left. \pm \frac{1}{\eta_0^2} \left( |R_{pq(H)}^{nm(E)}|^2 + |T_{pq(H)}^{nm(E)}|^2 \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \Gamma_{nm} \\ \text{Im} \Gamma_{nm} \end{array} \right\} = \\ & = \frac{1}{\lambda_{pq}^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \Gamma_{pq} + 2 \text{Im} \Gamma_{pq} \text{Im} R_{pq(H)}^{pq(H)} \\ \text{Im} \Gamma_{pq} - 2 \text{Re} \Gamma_{pq} \text{Im} R_{pq(H)}^{pq(H)} \end{array} \right\} - \\ & - \frac{1}{\mu_0} \left\{ \begin{array}{l} W_1 \\ W_2 \end{array} \right\}, \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{R_{pq}^{rs(H)}(\Phi_x, \Phi_y) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} &= \\ &= \frac{R_{-r,-s}^{-p,-q(H)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

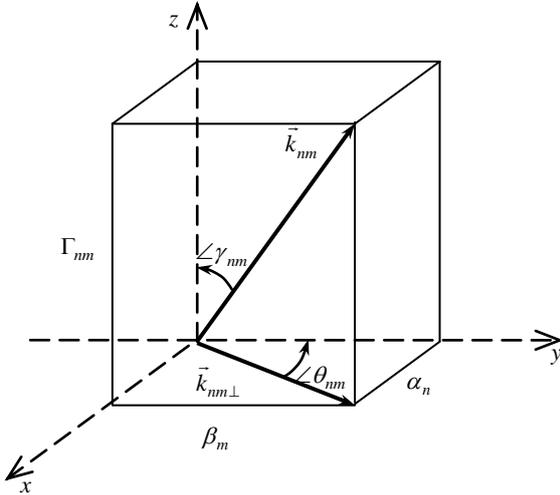
Соотношения типа (19) в этом случае принимают форму

$$\begin{aligned} \frac{T_{pq}^{rs(H)}(\Phi_x, \Phi_y, A) \lambda_{p,q}^2(\Phi_x, \Phi_y)}{\Gamma_{pq}(\Phi_x, \Phi_y)} &= \\ &= \frac{T_{-r,-s}^{-p,-q(H)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B) \lambda_{-r,-s}^2(-\Phi_x, -\Phi_y)}{\Gamma_{-r,-s}(-\Phi_x, -\Phi_y)}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$p, q, r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Общие свойства вторичного поля решетки. Пусть  $k$  – вещественный и положительный частотный параметр, а произвольная полупрозрачная решетка (см. рисунок в [1]) возбуждается из области  $A$  однородной  $TM$ - или  $TE$ -волной

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{pq(E \text{ или } H)}^i(g, k) &: \{ \tilde{E}_z^i(g, k) \text{ или } \tilde{H}_z^i(g, k) \} = \\ &= e^{-i\Gamma_{pq}(z-L)} \mu_{pq}(x, y), \quad p, q: \text{Im} \Gamma_{pq} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$



К определению дифракционных пространственных гармоник вторичного поля решеток

Слагаемые с бесконечными рядами в (24) и (31) представляют  $z$ -компоненту  $nm$ -х дифракционных пространственных гармоник вторичного (рассеянного) поля для областей  $A$  и  $B$ . Комплексные

амплитуды  $R_{pq(E \text{ или } H)}^{nm(E)}$ ,  $R_{pq(E \text{ или } H)}^{nm(H)}$  и так далее являются сложными функциями параметров  $k$ ,  $\Phi_x, \Phi_y$  и других геометрических и материальных параметров решетки. Каждая гармоника, для которой  $\text{Im} \Gamma_{nm} = 0$  и  $\text{Re} \Gamma_{nm} > 0$ , представляет собой однородную плоскую волну, распространяющуюся от решетки в направлении вектора  $\vec{k}_{nm}: k_x = \alpha_n, k_y = \beta_m, k_z = \Gamma_{nm}$  (в области  $A$ ; см. рисунок) или  $k_z = -\Gamma_{nm}$  (в области  $B$ ). Частоты  $k: \Gamma_{nm}(k) = 0$  ( $k = k_{nm}^{\pm} = \pm |\lambda_{nm}|$ ), на которых затухающие пространственные гармоники ( $nm: \text{Im} \Gamma_{nm} > 0$ ) превращаются в распространяющиеся однородные плоские волны, называют обычно пороговыми точками или точками скольжения [2–7, 11].

Очевидно, что направления векторов  $\vec{k}_{nm}$  (направления распространения однородных гармоник вторичного поля) зависят от их номеров  $nm$  и от значений  $k$  и  $\vec{k}_{pq}^i: k_x^i = \alpha_p, k_y^i = \beta_q, k_z^i = -\Gamma_{pq}$  – направляющего вектора возбуждающей волны. Согласно (20) и (32) величины

$$\begin{aligned} (WR)_{pq}^{nm} &= \\ &= \left( |R_{pq(E)}^{nm(E)}|^2 + \eta_0^2 |R_{pq(E)}^{nm(H)}|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm} \lambda_{pq}^2}{\lambda_{nm}^2 \Gamma_{pq}} = \\ &= (WR)_{pq(E)}^{nm(E)} + (WR)_{pq(E)}^{nm(H)}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} (WT)_{pq}^{np} &= \\ &= \left( |T_{pq(E)}^{nm(E)}|^2 + \eta_0^2 |T_{pq(E)}^{nm(H)}|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm} \lambda_{pq}^2}{\lambda_{nm}^2 \Gamma_{pq}} = \\ &= (WT)_{pq(E)}^{np(E)} + (WT)_{pq(E)}^{np(H)} \end{aligned}$$

(в случае возбуждения  $TM$ -волной) и

$$\begin{aligned} (WR)_{pq}^{nm} &= \\ &= \left( |R_{pq(H)}^{nm(H)}|^2 + \frac{1}{\eta_0^2} |R_{pq(H)}^{nm(E)}|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm} \lambda_{pq}^2}{\lambda_{nm}^2 \Gamma_{pq}} = \\ &= (WR)_{pq(H)}^{nm(H)} + (WR)_{pq(H)}^{nm(E)}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} (WT)_{pq}^{np} &= \\ &= \left( |T_{pq(H)}^{nm(H)}|^2 + \frac{1}{\eta_0^2} |T_{pq(H)}^{nm(E)}|^2 \right) \frac{\text{Re} \Gamma_{nm} \lambda_{pq}^2}{\lambda_{nm}^2 \Gamma_{pq}} = \\ &= (WT)_{pq(H)}^{nm(H)} + (WT)_{pq(H)}^{nm(E)} \end{aligned}$$

(в случае возбуждения  $TE$ -волной) определяют энергетическое наполнение гармоник, т. е. относительную часть энергии, которая направляется структурой в соответствующий пространственный канал излучения. Канал, соответствующий  $nm$ -й гармонике, будем называть открытым, если  $\text{Im}\Gamma_{nm} = 0$ . Режим, при котором открыт только один канал для распространения пространственных гармоник ( $nm = pq$ ), будем называть одно-модовым.

Поскольку  $|\vec{k}_{pq}^i| = |\vec{k}_{nm}| = k$ , то направить  $nm$ -ю гармонику вторичного поля в зоне отражения решетки навстречу падающей волне можно только в том случае, когда  $\alpha_n = -\alpha_p$  и  $\beta_m = -\beta_q$ . Или, что то же самое, в случае, когда

$$n = -2\Phi_x - p \quad \text{и} \quad m = -2\Phi_y - q. \quad (38)$$

Появление такого режима незеркального отражения называется автоколлимацией.

Не все амплитуды  $R_{pq(E \text{ или } H)}^{nm(E)}$ ,  $R_{pq(E \text{ или } H)}^{nm(H)}$  и так далее одинаково важны для физического анализа – в дальней зоне вторичное поле формируется только распространяющимися гармониками с номерами  $nm$  такими, что  $\text{Re}\Gamma_{nm} \geq 0$ . Однако анализ поля излучения в непосредственной близости от решетки требует учета вкладов и затухающих волн ( $nm: \text{Im}\Gamma_{nm} > 0$ ). Более того, в ряде ситуаций (например, в режиме резонанса) этот вклад доминирует [5, 6].

*Простейшие следствия соотношений взаимности и закона сохранения энергии.* Остановимся на некоторых следствиях, вытекающих из соотношений (20), (28), (29) и (32)–(34). Их использование позволяет контролировать результаты численных экспериментов и облегчает их физическую интерпретацию. В некоторых случаях использование этих следствий может существенно сократить объем вычислений или же свести исходную задачу к некоторой другой задаче, решение которой либо известно, либо может быть весьма легко получено. Ниже мы формулируем некоторые из них исходя из результатов, полученных в [3] для двухмерного случая, и полагая, что  $\varepsilon(g, k) \geq 0$ ,  $\mu(g, k) \geq 0$  и  $\sigma(g, k) \geq 0$ .

• Верхние строки в соотношениях (20) и (32) представляют собой закон сохранения энергии для распространяющихся гармоник. В случае когда  $\text{Im}\Gamma_{pq} = 0$  энергия рассеянного поля очевидным образом связана с энергией падающей волны. Энергия волны  $\tilde{U}_{pq(E \text{ или } H)}^i(g, k)$  частич-

но поглощается решеткой (если только  $W_1 \neq 0$ ), а оставшаяся ее часть распределяется между пространственными  $TM$ - и  $TE$ -гармониками, распространяющимися в областях  $A$  и  $B$  (она переизлучается в направлениях  $z = \pm\infty$ ). В случае падения плоской неоднородной волны ( $\text{Im}\Gamma_{pq} > 0$ ) общая энергия (переизлученная и поглощенная) определяется мнимой частью коэффициента отражения  $R_{pq(E \text{ или } H)}^{pq(E \text{ или } H)}$ , который в данном случае не может быть отрицательным.

• Соотношения в нижних строках (20) и (52) ограничивают величины

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} |R_{pq(E)}^{nm(E)}|^2 \lambda_{nm}^{-2} \text{Im}\Gamma_{nm},$$

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} |T_{pq(E)}^{nm(E)}|^2 \lambda_{nm}^{-2} \text{Im}\Gamma_{nm} \quad \text{и т. д.,}$$

а также определяют тем самым класс бесконечных последовательностей

$$\bar{l}_2 = \left\{ a = \{a_{nm}\}_{n,m=-\infty}^{\infty} : \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{|a_{nm}|^2}{\sqrt{n^2 + m^2}} < \infty \right\} \quad (39)$$

или энергетическое пространство, которому должны принадлежать амплитуды гармоник рассеянного поля  $R_{pq(E)}^{nm(E)}$ ,  $T_{pq(E)}^{nm(E)}$  и т. д.

• Из (28), (29), (33) и (34) следует, что для всех полупрозрачных и отражающих решеток справедливы равенства

$$(WR)_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(\Phi_x, \Phi_y) =$$

$$= (WR)_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y); \quad (40)$$

$$(WT)_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(\Phi_x, \Phi_y, A) =$$

$$= (WT)_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B).$$

Первое из этих соотношений доказывает, что эффективность преобразования  $TM$ - или  $TE$ -волны в зеркально отраженную волну той же поляризации не изменится, если решетку развернуть в плоскости  $xOy$  вокруг оси  $z$  на  $180^\circ$ . Не изменится и эффективность преобразования в основную прошедшую волну той же поляризации, если решетку перевернуть, вращая ее вокруг оси, лежащей в плоскости  $xOy$  и перпендикулярной вектору  $\vec{k}_{00}$  (см. рисунок).

• Если  $r = s = p = q = 0$ , то из (28), (29), (33) и (34) также можем получить:

$$\begin{aligned}
 R_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(\Phi_x, \Phi_y) &= \\
 &= R_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y); \\
 T_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(\Phi_x, \Phi_y, A) &= \\
 &= T_{00(E \text{ или } H)}^{00(E \text{ или } H)}(-\Phi_x, -\Phi_y, B).
 \end{aligned} \tag{41}$$

Это означает, что даже если полупрозрачная или отражающая решетка не обладает симметрией относительно какой-либо плоскости, коэффициенты отражения и прохождения, входящие в (41), не будут зависеть от соответствующих изменений угла падения возбуждающей волны.

• Соотношения (20) и (28) позволяют сформулировать следующие закономерности для теории идеальных ( $\sigma(g, k) \equiv 0$ ) асимметричных отражающих решеток. Пусть параметры  $k$ ,  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  таковы, что  $\text{Re}\Gamma_{00}(\Phi_x, \Phi_y) > 0$  и  $\text{Re}\Gamma_{nm}(\Phi_x, \Phi_y) = 0$ ,  $n, m \neq 0$ . Если падающая волна является неоднородной плоской волной  $\tilde{U}_{\pm p, \pm q(E)}^i(g, k, \pm\Phi_x, \pm\Phi_y)$ , то

$$\begin{aligned}
 &\left( \left| R_{\pm p, \pm q(E)}^{00(E)}(\pm\Phi_x, \pm\Phi_y) \right|^2 + \right. \\
 &+ \left. \eta_0^2 \left| R_{\pm p, \pm q(E)}^{00(H)}(\pm\Phi_x, \pm\Phi_y) \right|^2 \right) \times \\
 &\times \frac{\text{Re}\Gamma_{00}(\pm\Phi_x, \pm\Phi_y)}{\lambda_{00}^2(\pm\Phi_x, \pm\Phi_y)} = \\
 &= 2 \text{Im} R_{\pm p, \pm q(E)}^{\pm p, \pm q(E)}(\pm\Phi_x, \pm\Phi_y) \times \\
 &\times \frac{\text{Im}\Gamma_{\pm p, \pm q}(\pm\Phi_x, \pm\Phi_y)}{\lambda_{\pm p, \pm q}^2(\pm\Phi_x, \pm\Phi_y)}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Учитывая, что

$$R_{pq(E)}^{pq(E)}(\Phi_x, \Phi_y) = R_{-p, -q(E)}^{-p, -q(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y),$$

из (42) получим

$$\begin{aligned}
 &\left| R_{p, q(E)}^{00(E)}(\Phi_x, \Phi_y) \right|^2 + \eta_0^2 \left| R_{p, q(E)}^{00(H)}(\Phi_x, \Phi_y) \right|^2 = \\
 &= \left| R_{-p, -q(E)}^{00(E)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \right|^2 + \\
 &+ \eta_0^2 \left| R_{-p, -q(E)}^{00(H)}(-\Phi_x, -\Phi_y) \right|^2.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Легко увидеть физическую суть соотношения (43) и аналогичного равенства для  $TE$ -случая, весьма интересную для дифракционной электроники. Эффективность преобразования в единственную распространяющуюся гармонику пространственного спектра при возбуждении решетки одной из затухающих гармоник не изменится, если структуру развернуть в плоскости  $xOy$  вокруг оси  $z$  на  $180^\circ$ .

**Выводы.** Таким образом, представлены аналитические результаты, описывающие ряд важных свойств импульсных и монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в регулярных частях прямоугольного канала Флоке – в зонах отражения и прохождения двумерно-периодических структур. Это, прежде всего, соотношения закона сохранения энергии, соотношения взаимности и простейшие следствия из них, которым в обязательном порядке удовлетворяют амплитуды монохроматических волн, формируемых решетками.

Определены поля произвольных компактных мгновенных и токовых источников в регулярном прямоугольном канале Флоке. Доказано, что все импульсные поля, возникающие в зоне отражения и прохождения периодической структуры, однозначно определяются своими продольными (направленными вдоль оси  $z$ ) компонентами.

#### Библиографический список

1. Величко Л. Г. Двумерно-периодические решетки: I. Начально-краевые задачи и точные поглощающие условия для прямоугольного канала Флоке / Л. Г. Величко, А. А. Кривчикова, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и элект-рон. – 2012. – 3(17), № 2. – С. xx–xx.
2. Дифракция волн на решетках / В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. – Х.: Изд-во Харьков. ун-та, 1973. – 288 с.
3. Шестопалов В. П. Принцип взаимности и некоторые физические закономерности рассеяния волн на дифракционных решетках / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов // Вестн. АН УССР. – 1975. – № 3. – С. 8–18.
4. Petit R. Electromagnetic theory of gratings / R. Petit (ed.). – Berlin, N. Y.: Springer-Verlag, 1980. – 284 p.
5. Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
6. Шестопалов В. П. Динамическая теория решеток / В. П. Шестопалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с.
7. Sirenko Y. K. Modern theory of gratings. Resonant scattering: analysis techniques and phenomena / Y. K. Sirenko, S. Strom (eds). – N. Y.: Springer, 2010. – 390 p.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
9. Sirenko Y. K. Modeling and analysis of transient processes in open resonant structures. New methods and techniques / Y. K. Sirenko, S. Strom, N. P. Yashina. – N. Y.: Springer, 2007. – 362 p.
10. Сиренко К. Ю. Точные «поглощающие» условия в начально-краевых задачах теории открытых волноводных резонаторов / К. Ю. Сиренко, Ю. К. Сиренко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2005. – 45, № 3. – С. 509–525.
11. Rothwell E. J. Electromagnetics / E. J. Rothwell, M. J. Cloud. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – 540 p.
12. Neviere M. Light Propagation in Periodic Media: Differential Theory and Design / M. Neviere, E. Popov. – N. Y.: Marcel Dekker, 2003. – 410 p.

Рукопись поступила 10.11.2011

L. G. Velychko, A. A. Kryvchikova

TWO-DIMENSIONALLY PERIODIC GRATINGS.  
PART II. SOME REGULARITIES  
IN THE BEHAVIOR OF NONSTATIONARY  
AND STEADY-STATE FIELDS  
IN THE RECTANGULAR FLOQUET CHANNEL

The analytical results describing some important characteristics of the pulsed and monochromatic waves propagating in regular regions of the rectangular Floquet channel (in the reflection and transmission zones of two-dimensionally periodic structures) are presented in the paper.

These results are associated basically with mathematical formulation and physical interpretation of the energy conservation law and the reciprocity relations.

**Key words:** two-dimensionally diffraction grating, Floquet channel, nonstationary and steady-state fields, energy conservation law, reciprocity relations.

Л. Г. Величко, Г. О. Кривчикова

ДВОВИМІРНО-ПЕРІОДИЧНІ ГРАТКИ.  
ЧАСТИНА ІІ. ПЕВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ  
У ПОВЕДІНЦІ НЕСТАЦІОНАРНИХ  
І УСТАЛЕНИХ ПОЛІВ  
У ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ ФЛОКЕ

Наведено аналітичні результати, що описують низку важливих властивостей імпульсних і монохроматичних електромагнітних хвиль, які поширюються в регулярних частинах прямокутного каналу Флоке – в зонах відбиття та проходження двовимірно-періодичних структур. Ці результати пов'язані значною мірою з математичним формулюванням і фізичним трактуванням співвідношень закону збереження енергії та співвідношень взаємності.

**Ключові слова:** двовимірно-періодична ґратка, канал Флоке, нестационарні та стаціонарні поля, закон збереження енергії, співвідношення взаємності.