

ОПИСАНИЕ ГРАНИЦ В ЗАДАЧАХ РАССЕЙЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДРОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Э. И. Велиев¹, М. В. Ивахниченко¹, Т. М. Ахмедов²¹ *Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: veliev@kharkov.ua² *Институт математики НАН Азербайджана*
9, ул. Ф. Агаева, Баку, 1141, Азербайджан

Анализируется возможность применения дробных операторов в задачах отражения электромагнитных волн от плоских границ. Рассматриваются дробная производная и дробный ротор, получаемые как результат фрактализации обычных операторов производной и ротора. Дробный ротор может применяться для описания эффекта изменения поляризации волны, отраженной от бинизотропного слоя или границы, описываемой анизотропными импедансными граничными условиями. Порядок дробного ротора определяется через материальные параметры рассматриваемой задачи. Граничные условия с дробной производной обобщают условия для идеальных электрически- и магнитно-проводящих границ. Рассматриваются применения дробных граничных условий (ДГУ) для моделирования отражения от плоских границ. На примере задачи дифракции на ленте конечной ширины сравниваются рассеивающие свойства ленты с ДГУ и импедансной ленты. Получены выражения, связывающие дробный порядок и импеданс. Показано, что в широком диапазоне изменения параметров ДГУ могут применяться для моделирования отражения от импедансных границ, а также от диэлектрического слоя. ДГУ соответствуют импедансным границам с чисто мнимым значением импеданса. Также отмечены особенности рассеивающих характеристик ленты с ДГУ, связанные с ее «сверхволновыми» свойствами. Ил. 6. Библиогр.: 26 назв.

Ключевые слова: дробная производная, дробный ротор, граничные условия, дифракция.

В последнее время дробным операторам находят широкое применение в различных задачах электродинамики. Дробные операторы определяются как фрактализованные от известных операторов. Например, дробные производные и интегралы являются обобщением обычной производной и интеграла. Также находят применение оператору дробного ротора, который определяется как фрактализованный оператор от обычного оператора ротора [1].

Оператор ротор играет важную роль в уравнениях электродинамики. Оператор дробного ротора rot^α позволяет строить новые решения. Применение rot^α , где α – дробный порядок, к некоторому решению уравнений Максвелла (\vec{E}^0, \vec{H}^0) (\vec{E}^0, \vec{H}^0 – напряженности электрического и магнитного поля соответственно) в виде

$$(\vec{E}^\alpha, \vec{H}^\alpha) \equiv (ik_0)^{-\alpha} \text{rot}^\alpha (\vec{E}^0, \vec{H}^0) \quad (1)$$

приводит к тому, что дробное поле $(\vec{E}^\alpha, \vec{H}^\alpha)$ снова является решением уравнений Максвелла в той же среде, что и исходное поле (\vec{E}^0, \vec{H}^0) [1]. Применение rot^α приводит к изменению поляризации поля [2, 3]. Дробное поле $(\vec{E}^\alpha, \vec{H}^\alpha)$ выступает в роли промежуточного решения между исходным (\vec{E}^0, \vec{H}^0) и дуальным $(\vec{E}^1, \vec{H}^1) = (\eta_0 \vec{H}^0, -1/\eta_0 \vec{E}^0)$ решениями [4], которые соответствуют значениям дробного порядка $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Используя оператор rot^α , на примере задачи отражения нормально падающей плоской волны на границу раздела *N. Engheta* [1] получил импедансную границу со значением импеданса $\eta_\alpha = itg(\pi\alpha/2)$, которая описывает промежуточное состояние между идеально электрически- (ИЭП) и магнитно-проводящей (ИМП) границами при изменении α от 0 до 1.

В данной работе рассматриваются двумерные задачи отражения электромагнитных волн от границы раздела. При этом решение представляется как результат применения дробного ротора к известному решению задачи на импедансной границе. Новое дробное решение (1) соответствует новой границе, параметры которой зависят от исходной границы и порядка дробного ротора. Решая обратную задачу, можно по известному дробному полю определить свойства границы, получив уравнение, связывающее α и материальные параметры. Таким образом, данный подход позволяет получить решение задачи отражения, не решая самой задачи отражения от сложной поверхности, а применить rot^α с заданным α к известному решению задачи отражения от простой границы (обычно ИЭП либо импедансной).

Получение простых граничных условий (ГУ) для описания отражающих свойств сложных материалов является актуальной задачей. Известны два аспекта при рассмотрении граничных условий. Первый связан с нахождением граничных условий для описания рассеивающих свойств

заданной физической структуры. Вторым аспектом – это нахождение физической структуры, которая реализует заданные граничные условия. Последняя задача является актуальной в теории антенн, в частности, для получения антенн с заданными излучающими свойствами.

С другой стороны, введение новых ГУ позволяет строить модели границ с новыми свойствами. Реализация границ с произвольным значением параметров, определяющих ГУ, представляется непростой задачей.

ГУ должны позволять построить эффективный численный алгоритм получения точного решения с заданной точностью. Построение простых и адекватных математических моделей для описания рассеивающих свойств поверхностей является одной из общих задач в теории дифракции.

Достаточно хорошо изученная граница, которая может служить промежуточным состоянием между ИЭП и ИМП границами, – это импедансная граница [5, 6]:

$$\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = \eta \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r})), \quad \vec{r} \in S, \quad (2)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности S . Значение импеданса меняется от 0 для ИЭП до $i\infty$ для ИМП.

Задачам дифракции на импедансных границах посвящено большое количество работ. Импедансные граничные условия (ИГУ) успешно использовались для моделирования отражающих свойств хороших проводников, а также решеток и др. В каждом случае существуют формулы для получения значения импеданса как функции проводимости металла, параметров решетки и др. ИГУ являются приближенными ГУ, имеют ограничения для их применения и не могут описать отражающих свойств всего многообразия поверхностей.

Дальнейшее уточнение ИГУ может быть выполнено с использованием производных более высокого (целого) порядка или обобщенных ГУ [5, 7, 8]. Общая методология получения точных импедансных ГУ высокого порядка в спектральной области представлена в монографии *D. J. Hoppe* и *Y. Rahmat-Samii* [7], где были рассмотрены плоские покрытия (а также поверхности с кривизной), состоящие из однородных материалов с произвольными (линейными, бианизотропными) материальными уравнениями. Как было показано [7], в спектральной области можно получить точные ИГУ, часто в аналитической форме. Однако не всегда удается получить ИГУ в пространственной области в явном виде, поэтому необходимо аппроксимировать ИГУ в спектральной области, чтобы можно было применить обратное преобразование Фурье. В основном для аппроксимации используются рациональные функции. Этот метод позволил вывести ИГУ вы-

сокого порядка для различных покрытий: многослойных [9–11], неоднородных диэлектрических слоев [12], многослойных покрытий на криволинейных проводящих телах [13], неоднородных диэлектрических слоев [14], однородных бианизотропных слоев [14], а также для сложных геометрий [15]. Заметим, что производные применяются к тангенциальным компонентам поля вдоль поверхности.

Другое, не менее простое с математической точки зрения, чем импедансное, граничное условие, обобщающее идеальные границы, было предложено в 2005 г. *I. V. Lindell* и *A. H. Sihvola* [16, 17] – идеально электрически-магнитно проводящая (ИЭМП) граница:

$$\vec{H} + M\vec{E} = 0. \quad (3)$$

При $M = 0$ ИЭМП переходит в ИЭП границу, а при $M = \infty$ в ИМП.

Несмотря на то что подобные границы имеют простое математическое описание, их физическая реализация представляет собой сложную задачу. Физическая модель для реализации ИЭМП границы была предложена в 2006 г. в работе [17], где *I. V. Lindell* показал, что для нормального падения ИЭМП может моделировать отражение от анизотропного слоя. Также были предложены другие физические модели. При этом задача дифракции на подобной границе не рассматривалась.

Дальнейшее обобщение ИЭМП – обобщенная *GSHS*-поверхность (*soft-and-hard surface*), рассмотренная в работе [18] в виде ГУ:

$$\vec{a} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{H} = 0,$$

где \vec{a}, \vec{b} – комплексные векторы, удовлетворяющие условию $\vec{n} \cdot \vec{a} = \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

GSHS-поверхность может трансформировать любую заданную поляризацию плоской падающей волны в любую другую поляризацию отраженной волны при соответствующем выборе векторов \vec{a}, \vec{b} [18].

Использование дробных производных приводит к дробным ГУ (ДГУ), обобщающим идеальные границы:

$$D_n^\alpha U(\vec{r})|_S = 0, \quad (4)$$

где дробная производная берется по нормали к поверхности. Функция U описывает тангенциальную компоненту электрического или магнитного поля. Дробная производная определяется через интеграл Римана-Лиувилля на полубесконечном интервале [19].

Рассматриваются значения дробного порядка α между 0 и 1. Крайние значения дробного порядка $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ приводят к ИЭП и ИМП границам, соответственно. ДГУ обобщают идеальные границы, такие как ИЭП и ИМП.

ДГУ рассматривались в задачах отражения в работах Э. И. Велиева, *N. Engheta* [3, 20, 21] в 2003 г., где были приведены коэффициенты отражения от границ, описываемых ДГУ. Показано, что граница имеет коэффициент отражения, равный по модулю 1, т. е. соответствует идеально отражающей границе. При этом фаза коэффициента отражения определяется дробным порядком.

ДГУ могут применяться для моделирования отражения электромагнитных волн от определенного класса поверхностей. При этом один из главных вопросов, связанных с введением ДГУ, – это определения значения дробного порядка через исходные параметры задачи. В данной работе ДГУ сопоставляются с известными импедансными ГУ.

ДГУ являются примером нелокальных ГУ. Это означает, что значение функции на границе зависит от значений поля в точках на конечном расстоянии от границы, в отличие от классических ГУ (ИЭП, ИМП, ИГУ), когда значение на границе определяется только значениями поля в точках, бесконечно близких к границе. Это связано с применением производных нецелого порядка вместо обычных производных.

В задачах рассеяния нелокальные ГУ широко применяются в численных алгоритмах, основанных на методе конечных элементов или методе конечных разностей [22, 23]. Процедура основана на рассмотрении конечной области, ограничивающей рассеивающий объект для усечения рассчитываемого региона, при этом на границе новой области требуется выполнение новых ГУ, которые обычно имеют нелокальный характер. Нелокальные ГУ находят применение для волнового уравнения в параболическом приближении [23]. Нелокальные ГУ являются эффективной альтернативой традиционному использованию поглощающих слоев [23].

Определим основные задачи, связанные с рассмотрением ДГУ в задачах дифракции:

- разработка численно-аналитического метода решения, который позволил бы с нужной точностью получать численные результаты для исследования характеристик дробного решения;
- качественное изучение физических свойств дробной границы;
- связь дробной границы с другими известными границами;
- физическая реализация дробной границы.

Задачи дифракции на границах с ДГУ требуют построения математического аппарата для их решения. Двумерная задача дифракции на ленте, описываемой ДГУ, и метод ее решения, основанный на применении дробной функции Грина и ортогональных полиномов, были рассмотрены в работах [24, 25].

Ввиду развитости математического аппарата дробных производных, ДГУ являют простым

обобщением идеальных границ (ИЭП и ИМП). ДГУ позволят получить новые математические модели для описания отражательных свойств материалов. Благодаря специфическим свойствам границ, описываемых ДГУ, представляется актуальным описать и реализовать подобные структуры. ДГУ требуют детального изучения с физической и математической точек зрения.

1. Получение решения задачи отражения с помощью дробного ротора. Рассмотрим классическую двумерную задачу отражения наклонно падающей (под углом φ) плоской волны на границу раздела, которая расположена в плоскости $y = 0$ и задается ГУ с импедансом η

$$\vec{n} \times \vec{E} = \frac{\eta}{\eta_0} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}), \quad y \rightarrow +0. \quad (5)$$

Предполагая, что нам известно решение (\vec{E}^0, \vec{H}^0) задачи для импедансной границы (5), рассмотрим два способа построения дробного поля $(\vec{E}^\alpha, \vec{H}^\alpha)$:

- применение rot^α к полному полю:
 $(\vec{E}^\alpha, \vec{H}^\alpha) \equiv (ik_0)^{-\alpha} \text{rot}^\alpha (\vec{E}^0, \vec{H}^0); \quad (6)$

- применение rot^α к отраженному полю:
 $(\vec{E}^{\alpha,r}, \vec{H}^{\alpha,r}) \equiv (ik_0)^{-\alpha} \text{rot}^\alpha (\vec{E}^{0,r}, \vec{H}^{0,r}), \quad (7)$
 $(\vec{E}^{\alpha,i}, \vec{H}^{\alpha,i}) \equiv (\vec{E}^{0,i}, \vec{H}^{0,i}).$

Для случая (6) дробная граница описывает промежуточное состояние между импедансной границей со значением η ($\alpha = 0$) и дуальной границей с импедансом η^{-1} ($\alpha = 1$). Дробную границу можно описать с помощью анизотропных ИГУ:

$$\vec{n} \times \vec{E}^\alpha = \bar{\eta}_\alpha \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}^\alpha),$$

где импеданс $\bar{\eta}_\alpha = \begin{pmatrix} \eta_{11}^\alpha & \eta_{12}^\alpha \\ \eta_{21}^\alpha & \eta_{22}^\alpha \end{pmatrix}$ является тензором.

В частных случаях тензора $\bar{\eta}_\alpha$ получены выражения, которые определяют $\bar{\eta}_\alpha$ через η и α .

Если принять $\eta_{21}^\alpha = \eta_{12}^\alpha = 0$, то имеем выражения для элементов тензора дробного импеданса $\bar{\eta}^\alpha$:

$$\eta_{11}^\alpha / \eta_0 = - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{e^{i\pi\alpha} (B - A) + BR_E + AR_H}{e^{i\pi\alpha} (B - A) - (BR_E + AR_H)};$$

$$\eta_{22}^\alpha / \eta_0 = - \sin \varphi \frac{e^{i\pi\alpha} (A + B) + AR_E - BR_H}{e^{i\pi\alpha} (A + B) - (AR_E - BR_H)},$$

где $A = \sin(\pi\alpha / 2)$, $B = \cos(\pi\alpha / 2)$ и

$R_E = - \frac{1 - \eta / \eta_0 \sin \varphi}{1 + \eta / \eta_0 \sin \varphi}$, $R_H = - \frac{1 - (\eta / \eta_0)^{-1} \sin \varphi}{1 + (\eta / \eta_0)^{-1} \sin \varphi}$ – коэффициенты отражения.

Если исходный импеданс $\eta = 0$, то

$$\eta_{11}^\alpha / \eta_0 = \frac{i}{\sin \varphi} \operatorname{tg}(\pi\alpha / 2); \quad (8)$$

$$\eta_{22}^\alpha / \eta_0 = i \sin \varphi \operatorname{tg}(\pi\alpha / 2). \quad (9)$$

Выражения (8), (9) обобщают выражение для дробного импеданса, полученного в работе [1] для случая наклонного падения.

Для случая $\eta_{11}^\alpha = \eta_{22}^\alpha = 0$ можно показать, что имеет место соотношение для поверхностных токов:

$$j_{ex}^\alpha = -\eta_{12}^\alpha j_{mx}^\alpha, \quad j_{ez}^\alpha = -\eta_{21}^\alpha j_{mz}^\alpha.$$

Поверхностные токи являются параллельными друг другу, в отличие от изотропной импедансной границы, когда токи являются перпендикулярными. Подобные границы были рассмотрены в работах I. V. Lindell и A. H. Sihvola для описания ИЭМП границы (3).

Чтобы построить модель границы для случая (7), рассмотрим биизотропный слой ($0 < y < L$) над ИЭП границей ($y = 0$) (рис. 1). Биизотропная среда описывается материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_2 \vec{E} + \xi_2 \vec{H}, \quad \vec{B} = \zeta_2 \vec{E} + \mu_2 \vec{H},$$

где ε_2, μ_2 – диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно. Коэффициенты ξ_2, ζ_2 имеют вид

$$\xi_2 = (\chi_2 - i\kappa_2) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad \zeta_2 = (\chi_2 + i\kappa_2) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0},$$

где χ_2 – параметр Теллегена, κ_2 – киральность.

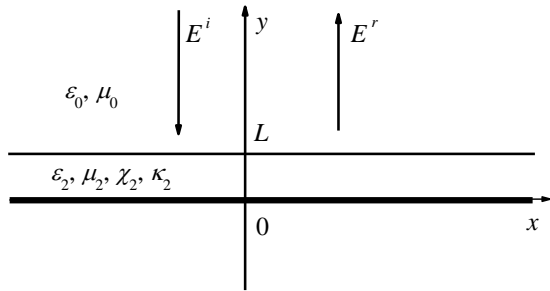


Рис. 1. Геометрия задачи отражения плоской волны от биизотропного слоя

Для дробной границы коэффициент отражения \bar{R}^α можно выразить через исходные коэффициенты R_E, R_H :

$$\bar{E}^{\alpha,r} = \bar{R}^\alpha \bar{E}^{\alpha,i}, \quad \bar{R}^\alpha = \begin{pmatrix} -BR_H & AR_E \\ AR_H & BR_E \end{pmatrix}.$$

Применение дробного ротора приводит к изменению поляризации поля [3]. Также изменение поляризации наблюдается при отражении или прохождении через биизотропный слой. Дробная

граница может моделировать биизотропный слой [3], если α выбрать так, чтобы коэффициенты кополяризации R_{co} и кросс-поляризации R_{cr} были связаны соотношениями

$$R_{co} = -\cos(\pi\alpha / 2), \quad R_{cr} = \sin(\pi\alpha / 2).$$

Уравнение для нахождения α принимает вид

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = -\frac{R_{cr}}{R_{co}} = -\frac{2\eta_0\eta_2 \sin \vartheta_2 \sin^2(k_2 L \cos \vartheta_2)}{(\eta_0^2 - \eta_2^2) \sin^2(k_2 L \cos \vartheta_2) - \eta_0^2 \cos^2 \vartheta_2},$$

где $\eta_2 = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2}$, $\chi_2 = \sin \vartheta_2$, $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$.

На рис. 2, 3 приведены зависимости дробного порядка и коэффициентов отражения от параметров слоя. Значения α , близкие к 1, соответствуют $R_{co} \rightarrow 0$, $R_{cr} \rightarrow 1$, что описывает эффект изменения поляризации, когда падающая плоская волна преобразуется в отраженную плоскую волну с поляризацией, повернутой на 90° относительно падающей волны.

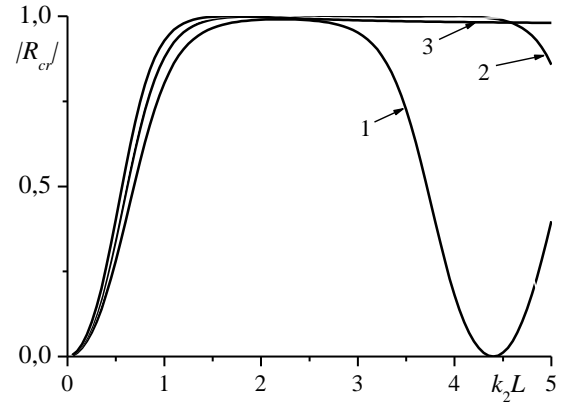


Рис. 2. Дробный порядок α как функция толщины слоя $k_2 L$ для $\eta_2 / \eta_0 = 0,8$: 1 – $\chi_2 = 0,7$; 2 – $\chi_2 = 0,85$; 3 – $\chi_2 = 1$

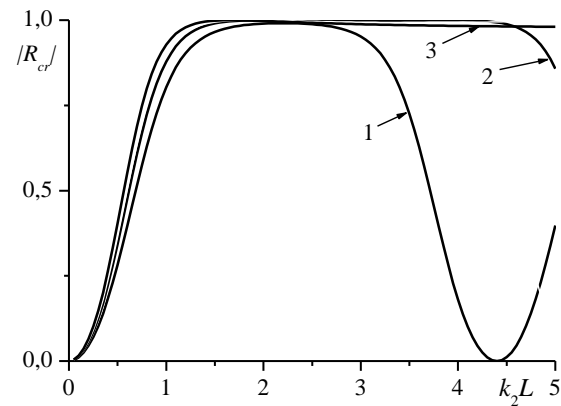


Рис. 3. Кросс-поляризованный коэффициент отражения R_{cr} для $\eta_2 / \eta_0 = 0,8$ для тех же параметров, что и на рис. 2

2. Дробные граничные условия в задачах отражения от границ раздела. Для задачи отражения плоской волны от бесконечного полупространства ($y < 0$), с ДГУ в виде

$$D_{ky}^{\alpha} E_z(x, y) = 0, \quad y \rightarrow +0, \quad (10)$$

имеем коэффициент отражения

$$R_{\alpha} = -(-1)^{\alpha} = -e^{-i\pi\alpha}. \quad (11)$$

Для импедансной границы коэффициент отражения имеет вид

$$R_{imp} = -\frac{1 - \eta / \eta_0 \sin \varphi}{1 + \eta / \eta_0 \sin \varphi}, \quad (12)$$

где φ – угол падения.

Сравнение коэффициентов отражения (11) и (12) для ДГУ и ИГУ позволяет вывести соотношение между дробным порядком и импедансом. Таким образом, ДГУ могут моделировать ИГУ, если выбрать дробный порядок из соотношения [24]:

$$\alpha = \frac{1}{i\pi} \ln \frac{1 + \eta / \eta_0 \sin \varphi}{1 - \eta / \eta_0 \sin \varphi}. \quad (13)$$

Это соотношение также было приведено в работе [21].

Дробный порядок $\alpha = 0$ соответствует ИЭП ($\eta = 0$) границе. Значение $\alpha = 1$ соответствует импедансу $\eta = i\infty$, который описывает ИМП границу.

Рассмотрим задачу отражения наклонно падающей волны от диэлектрического слоя (рис. 4). Диэлектрический слой можно заменить ДГУ вида (10) (при $y = L + 0$), если дробный порядок α выбран из соотношения

$$\alpha = \alpha(\varepsilon, \mu, L) = \frac{1}{i\pi} \ln \frac{R_{12} + R_{23} e^{-2ik_2 L}}{1 + R_{12} R_{23} e^{-2ik_2 L}}, \quad (14)$$

где $R_{ij} = (\eta_j - \eta_i) / (\eta_j + \eta_i)$, $\eta_j = \sqrt{\mu_j / \varepsilon_j}$, $i, j = 1, 2, 3$.

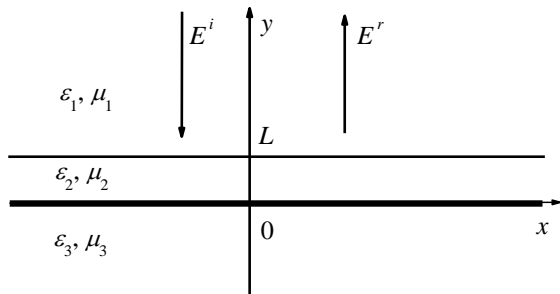


Рис. 4. Геометрия задачи отражения плоской волны от диэлектрического слоя

Если $|R_{12}| \rightarrow 0$, $|R_{23}| \rightarrow 0$, то из (14) получаем выражение

$$\alpha = \frac{1}{i\pi} \ln(R_{12} + R_{23} e^{-2ik_2 L}).$$

Если же среда 3 – ИЭП, т. е. $\varepsilon_3 = \infty$, то $R_{23} = -1$ и имеем выражение для коэффициента отражения:

$$R = \frac{\eta'_2 + i \operatorname{ctg}(k_2 L)}{\eta'_2 - i \operatorname{ctg}(k_2 L)}.$$

При этом дробный порядок

$$\alpha = \frac{1}{i\pi} \ln \frac{\eta'_2 + i \operatorname{ctg}(k_2 L)}{\eta'_2 - i \operatorname{ctg}(k_2 L)},$$

где $\eta'_2 = \eta_2 / \eta_1$ – нормализованный импеданс среды 2.

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(k_2 L) &= \eta'_2 \operatorname{ctg}(\pi\alpha / 2), \\ k_2 L &= \operatorname{arccotg}(\eta'_2 \operatorname{ctg}(\pi\alpha / 2)). \end{aligned}$$

Значение $\alpha = 0$ соответствует случаю, когда $\operatorname{ctg}(k_2 L) = \infty$, $R = -1$. Это выполняется при очевидном случае, когда толщина слоя $L = 0$, а также при толщине слоя $k_2 L = \pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. При $\alpha = 1$ имеем условие $\operatorname{ctg}(k_2 L) = 0$ ($k_2 L = \pi / 2 + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) и $R = 1$.

3. Дифракция на ленте с ДГУ. Рассмотрим двумерную задачу дифракции на ленте с ДГУ в виде

$$D_{ky}^{\alpha} E_z(x, y) = 0, \quad y \rightarrow \pm 0. \quad (15)$$

Подробно метод решения этой задачи для случай E -поляризации был рассмотрен в работе [24], где были представлены численные результаты для рассеивающих характеристик ленты: диаграмма направленности, поперечник обратного рассеяния, плотность распределения поверхностных токов.

Дробная граница может поддерживать как электрический, так и магнитный токи. Подобное распределение поверхностных токов наблюдается для импедансной поверхности. В работе [25] было проведено как качественное, так и численное сравнение отражающих свойств ленты с ДГУ и импедансной ленты с импедансом, определяемым из соотношения (13), которое является точным в случае бесконечных границ. Полученное соотношение можно использовать при рассмотрении конечных границ таким же образом, как были введены ГУ Леонтовича сначала для бесконечных границ, для которых определяют значение импеданса, а далее применяются для

конечных границ. В этом смысле, так же как и ИГУ, ДГУ являются приближенными.

Для конечных границ точность применения ДГУ вместо ИГУ требует дополнительного анализа и может быть проверена, в частности, численно, решая соответствующие задачи дифракции. В работе [25] были проанализированы рамки применимости ДГУ для моделирования ИГУ на примере задачи дифракции на ленте. Сравнивая в дальней зоне поля для ленты с ДГУ и импедансной ленты в приближении физической оптики, можно вывести аналитическое уравнение, связывающее дробный порядок и импеданс [25]. Это уравнение в точности совпадает с выражением (13), полученным для бесконечных границ.

Для задачи дифракции на ленте ДГУ являются схожими с ИГУ [25] при достаточно малых значениях длины волны, когда краевые эффекты играют меньшую роль (рис. 5).

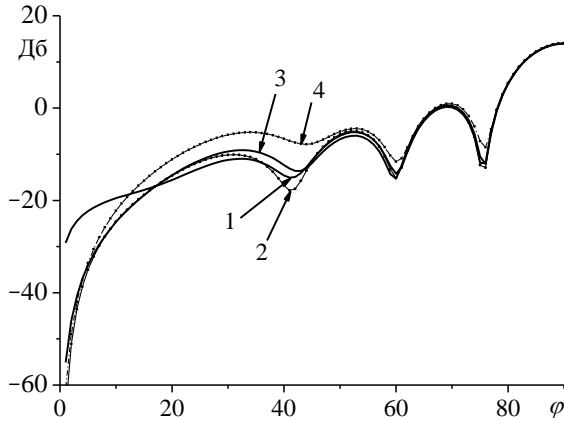


Рис. 5. Поперечник обратного рассеяния для $ka = 2\pi$: 1 – дробная лента при $\alpha = 0,25$; 2 – импедансная лента при $\eta = \eta(0,25)$; 3 – дробная лента при $\alpha = 0,75$; 4 – импедансная лента при $\eta = \eta(0,75)$

При больших же значениях длины волны ДГУ приводят к некоторым особенностям. Как отмечено в работе [24], лента ДГУ имеет резонанс по углу падения для поперечника обратного рассеяния при значении дробного порядка $\alpha = 1/2$ при больших значениях длины волны по сравнению с поперечными размерами ленты (рис. 6). Подобный резонанс не наблюдается для импедансной ленты той же ширины. Этот резонанс не связан с геометрией ленты, а связан со свойствами самой поверхности. Лента с ДГУ порядка $\alpha = 1/2$, имеет «сверхволновые» свойства. Отметим, что подобные «сверхволновые» свойства известны для поверхностей с фрактальной геометрией. Возможность применения ДГУ для анализа шероховатых поверхностей была отмечена в работе А. А. Потапова [26].

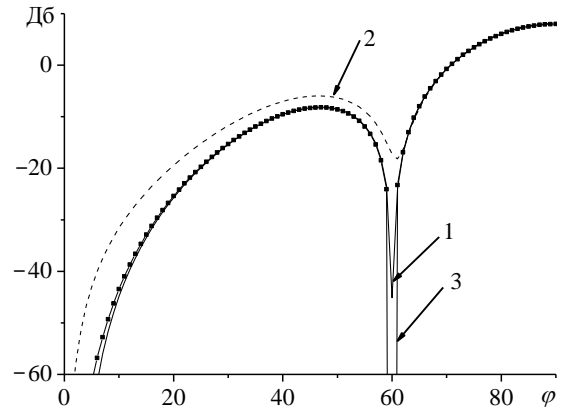


Рис. 6. Поперечник обратного рассеяния: 1 – для дробной ленты $\alpha = 1/2$, полученный численно; 2 – для импедансной ленты с $\eta = -i/\sin\varphi$; 3 – для дробной ленты $\alpha = 1/2$, полученный аналитически

4. Физическая реализация ДГУ. Обратимся к соотношению (5). Как видно, ДГУ при $0 \leq \alpha \leq 1$ соответствуют чисто мнимому импедансу $\eta = ia$ ($0 \leq a < \infty$).

При частном значении дробного порядка $\alpha = 1/2$ ДГУ соответствуют импедансу $\eta = -i$. Если принять определение импеданса в виде $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, тогда ДГУ можно моделировать с помощью слоя с параметрами, связанными соотношением

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + \frac{\mu}{\mu_0} \sin^2 \varphi = 0.$$

Случай $\mu/\mu_0 = 1$ соответствует значению диэлектрической проницаемости $\epsilon/\epsilon_0 = -\sin^2 \varphi$.

Если ДГУ применяются для моделирования резистивного слоя [1] со значением резистивности $R_e = -\frac{i}{k_0\tau(\epsilon-1)}$, где τ – толщина слоя,

которая полагается достаточно маленькой ($k_0\tau \rightarrow 0$), тогда можно получить соотношение для определения для дробного порядка в виде

$$-\frac{i}{\sin\varphi} \operatorname{tg}(\pi\alpha/2) = -\frac{i}{k_0\tau(\epsilon-1)}.$$

В частном случае $\alpha = 1/2$ имеем

$$k_0\tau = -\frac{1}{\epsilon/\epsilon_0 - 1},$$

что соответствует значению диэлектрической проницаемости $\epsilon/\epsilon_0 = 1 - \frac{1}{k_0\tau}$, которое обычно меньше 0.

Выводы. Рассмотрены основные возможности применения дробных операторов для описания отражающих свойств различных по-

верхностей. Рассмотрены операторы дробного ротора и дробной производной. Дробное поле, полученное в результате применения дробного ротора, может описывать решение задачи отражения от границы, описываемой анизотропными ИГУ, либо от биизотропного слоя. Выведены соотношения для определения порядка дробного ротора через материальные параметры.

Наряду с ИГУ, ДГУ с дробной производной по нормали являются обобщением идеальных границ (ИЭП и ИМП). Найдены выражения для определения дробного порядка через параметры структур для случая поверхностей, моделируемых ИГУ, а также резистивного слоя. На примере задачи дифракции на ленте найдены условия применимости ДГУ для моделирования импедансных границ. ДГУ могут быть использованы для моделирования рассеивающих свойств границ других поверхностей.

1. *Engheta N.* Fractional curl operator in electromagnetics // *Microwave and Optical Technology Letters.* – 1998. – 17, No. 2. – P. 86–91.
2. *Ивахниченко М. В.* Поляризационные свойства дробных полей // *Радиофизика и электроника.* – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2007. – 12, № 2. – С. 328–334.
3. *Ivakhnychenko M. V., Veliev E., Ahmedov T. M.* Fractional operators approach in electromagnetic wave reflection problems // *Journ. of electromagnetic waves and applications.* – 2007. – 21, No. 13. – P. 1787–1802.
4. *Ванштейн Л. А.* Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
5. *Senior T. B., Volakis J. L.* Approximate boundary conditions in electromagnetics. – London: The institution of electrical engineers, 1995. – 353 p.
6. *Leontovich M. A.* Investigations on radiowave propagation // *Academy of Sciences.* – 1948. – Part 2. – P. 5–12.
7. *Hope D. J., Rahmat-Samii Y.* Impedance boundary conditions in electromagnetics. – Washington, DC: Taylor and Francis, 1995. – 196 p.
8. *Idemen M.* Universal boundary conditions of the electromagnetic fields // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1990. – 59, No. 1. – P. 71–80.
9. *Cicchetti R. A.* Class of exact and higher-order surface boundary conditions for layered structures // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* – 1996. – 44, No. 2. – P. 249–259.
10. *Ricoy M. A., Volakis J. L.* Derivation of generalized transition/boundary conditions for planar multiple-layer structures // *Radio science.* – 1990. – 25, No. 4. – P. 391–405.
11. *Tretyakov S. A.* Generalized impedance boundary conditions for isotropic multilayers // *Microwave and optical technology letters.* – 1998. – 17, No. 4. – P. 262–265.
12. *Galdi V., Pinto I. M.* Higher-order impedance boundary conditions for metal-backed inhomogeneous dielectric layers // *Microwave and optical technology letters.* – 1999. – 22, No. 4. – P. 249–254.
13. *Galdi V., Pinto I. M.* SDR approach for higher-order impedance boundary conditions for complex multilayer coatings on curved conducting bodies // *Journ. of electromagnetic waves and applications.* – 1999. – 13, No. 12. – P. 1629–1630.
14. *Galdi V., Pinto I. M.* Derivation of higher-order impedance boundary conditions for stratified coatings composed of inhomogeneous-dielectric and homogeneous-bianisotropic layers // *Radio science.* – 2000. – 35, No. 2. – P. 287–303.
15. *Cicchetti R., Faraone A.* Exact surface impedance/admittance boundary conditions for complex geometries: theory and applications // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* – 2000. – 48, No. 2. – P. 223.
16. *Lindell I. V., Sihvola A. H.* Transformation method for Problems Involving Perfect Electromagnetic Conductor (PEMC) Structures // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* – 2005. – 53, No. 9. – P. 3005–3011.
17. *Lindell I. V., Sihvola A. H.* Realization of the PEMC boundary // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* – 2005. – 53, No. 9. – P. 3012–3018.
18. *Hanninen Ilari, Lindell I. V., Sihvola A. H.* Realization of generalized soft-and-hard boundary // *Progress in electromagnetics research.* – 2006. – 64. – P. 317–333.
19. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
20. *Veliev E., Engheta N.* Fractional curl operator in reflection problems // *Mathematical methods in electromagnetic theory: 10th international conference: conf. proc.* – Dnieperpetrovsk, 2004. – P. 228–230.
21. *Engheta N.* Fractionalization methods and their applications to radiation and scattering problems // *Mathematical methods in electromagnetic theory: conf. proc.* – Kharkiv, 2000. – P. 34–40.
22. *Marin S. P.* Computing scattering amplitudes for arbitrary cylinders under incident plane waves // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* – 1982. – 30, No. 6. – P. 1045–1049.
23. *Hyaric Z. L.* Wide-angle nonlocal boundary conditions for the parabolic wave equation // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* – 2001. – 49, No. 6. – P. 916–922.
24. *Veliev E. I., Ivakhnychenko M. V., Ahmedov T. M.* Fractional boundary conditions in plane waves diffraction on a strip // *Progress in electromagnetics research.* – 2008. – 79. – P. 443–462.
25. *Ivakhnychenko M. V., Veliev E. I., Ahmedov T. M.* Scattering properties of the strip with fractional boundary conditions and comparison with the impedance strip // *Progress in electromagnetics research C.* – 2008. – 2. – P. 189–205.
26. *Поманов А. А.* Фракталы, скейлинг и дробные операторы как основа новых методов обработки информации и конструирования фрактальных радиосистем // *Технологии и конструирование в электронной аппаратуре.* – 2008. – № 5. – С. 3–19.

DESCRIPTION OF BOUNDARIES IN SCATTERING PROBLEMS WITH THE HELP OF FRACTIONAL OPERATORS

E.I. Veliev, M.V. Ivakhnychenko, T.M. Ahmedov

Possibility of utilization of fractional operators in reflection of electromagnetic waves from plane boundaries is analyzed. Fractional derivative and fractional curl operator obtained as a result of fractionalization of usual operators of derivative and curl are under consideration. A fractional curl operator can be used to describe effect of changing of polarization of wave reflected from bi-isotropic slab or boundary described by anisotropic impedance boundary conditions. The order of fractional curl operator is defined from material parameters of considered problem. Boundary conditions with a fractional derivative generalize conditions for perfect electric and magnetic conductive boundaries. Usage of fractional boundary conditions (FBC) to simulate reflection from plane boundaries. Scattering properties of a strip with FBC and an impedance strip are compared on example of diffraction problem by a strip of finite width. Equations that are relate a fractional order and an impedance have been evaluated. It is shown that FBC can be used to simulate scattering from impedance boundaries and also from a dielectric slab for a wide range of parameters. FBC correspond impedance boundaries with a pure imaginary value of impedance. Also special scattering features of a strip with FBC related with its superwave properties have been shown.

Key words: fractional derivative, fractional curl operator, boundary conditions, diffraction.

ОПИС МЕЖ В ЗАДАЧАХ РОЗСІЯННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДРОБОВИХ ОПЕРАТОРІВ

Е. І. Велиєв, М. В. Івахніченко, Т. М. Ахмедов

Аналізується можливість застосування дробових операторів в задачах відбивання електромагнітних хвиль від плоских меж. Розглядаються дробова похідна та дробовий ротор, що виникають як результат фракталізації звичайних операторів похідної та ротора. Дробовий ротор може використовуватися для опису ефекту зміни поляризації хвилі, що відбилася від бізотропного шару чи межі, яка описується анізотропними імпедансними граничними умовами. Порядок дробового ротору визначається через матеріальні параметри задачі, що розглядається. Граничні умови з дробовою похідною узагальнюють умови для ідеальних електрично- та маг-

нітно-провідних меж. Розглядаються застосування дробових граничних умов (ДГУ) для моделювання відбивання від плоских меж. На прикладі задачі дифракції на стрічці скінченної ширини порівнюються розсіювальні властивості стрічки з ДГУ та імпедансної стрічки. Отримано вирази, що пов'язують дробовий порядок і імпеданс. Показано, що в широкому діапазоні зміни параметрів ДГУ можуть застосовуватися для моделювання відбивання від імпедансних меж, а також від діелектричного шару. ДГУ відповідають імпедансним межах з чисто уявним значенням імпедансу. Також відмічено особливості розсіювальних характеристик стрічки з ДГУ, пов'язані з «надхвильовими» властивостями.

Ключові слова: дробова похідна, дробовий ротор, граничні умови, дифракція.

Рукопись поступила 28 июня 2009 г.