

О РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПО МОДУЛЮ ЕГО ФУРЬЕ-ОБРАЗА

Ю. В. Корниенко, С. И. Скуратовский

*Институт радиопизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: kornienko@ire.kharkov.ua*

Путём машинного эксперимента исследована сходимость итерационного процесса, предложенного ранее для реконструкции изображения объекта конечных размеров по квадрату модуля его фурье-образа. Подтверждена хорошая сходимость процесса к правильному результату из некоторой его окрестности в пространстве изображений и возможность сходимости к неправильному результату (так называемой ловушке) при произвольном выборе начального приближения. Установлен дискретный характер множества таких ловушек. Исследована зависимость предела, к которому сходится итерационный процесс, от начального приближения и установлен фракталоподобный характер этой зависимости. Исследована вероятность правильного восстановления изображения при случайном выборе начального приближения. Полученные результаты проиллюстрированы графиками, полутоновыми изображениями и цветными картами. Ил. 4. Библиогр.: 18 назв.

Ключевые слова: видение сквозь турбулентную атмосферу, спекл-интерферометрия, фазовая проблема, восстановление изображения по спектру.

При наблюдении объекта сквозь среду со случайными неоднородностями показателя преломления возникают искажения фазового фронта проходящей от объекта волны, которые вызывают искажения фурье-компонент изображения, причём преимущественно их фаз. Это приводит к замытию изображения, т. е. к снижению его чёткости. Такой эффект можно видеть, например, в длинноволновой радиоастрономии (из-за неоднородностей в ионосфере), в оптической астрономии (из-за неоднородностей в нижней тропосфере) или при наблюдении подводного объекта с помощью ультразвука (из-за неоднородностей температуры воды). Усреднение получаемого изображения по большой серии реализаций случайного поля неоднородностей может позволить записать связь между зарегистрированным и истинным изображениями в виде уравнения Фредгольма [1], что позволяет сформулировать и решить задачу оптимальной статистической оценки истинного изображения [2-4]. В простейшем случае это приводит к широко известному винеровскому фильтру [5]. Однако при реальных значениях отношения сигнал - шум такая процедура приводит к подавлению высших пространственных частот, в результате чего чёткость восстановленного изображения часто оказывается намного ниже наибольшей возможной при данных размерах апертуры приёмного устройства. В частности, при наблюдении астрономического объекта в видимой области спектра с помощью крупного телескопа его разрешающая способность под влиянием атмосферы снижается в десятки раз по сравнению с дифракционным пределом.

Это обстоятельство побудило исследователей заняться поиском других, более эффективных способов накопления сигнала. Среди них наиболее естественным, с одной стороны, и продуктив-

ным, с другой, оказался метод Лабейри [6] (спекл-интерферометрия). В этом случае изображения, полученные при разных реализациях поля неоднородностей, не суммируются, а подвергаются преобразованию Фурье, после чего суммируются квадраты модулей их фурье-образов. Конечным результатом применения этого метода оказывается энергетический спектр истинного изображения объекта, полученный с дифракционным разрешением телескопа. По этому спектру можно построить автосвёртку изображения объекта с полным разрешением, доступным телескопу, что в случае простых объектов позволяет определить их параметры (угловой диаметр звезды, угловые расстояния между компонентами кратной звезды и т. д.). Однако в общем случае изображение объекта этим способом получить нельзя, так как информация о фазах фурье-компонент оказывается полностью потерянной. Возникает вопрос: при каких дополнительных условиях по энергетическому спектру можно было бы восстановить изображение объекта?

Один из вариантов ответа был получен в работе [7] – восстановить изображение можно, если в состав объекта входит точечный источник достаточной интенсивности. Там же описана и процедура такого восстановления. Однако вопрос не был исчерпан, так как оставалось неясным, является ли это условие необходимым. В работе [8] было показано, что восстановление изображения по спектру возможно при значительно более слабом условии: достаточно, чтобы яркость объекта была отлична от нуля только в ограниченной области на плоскости. Это утверждение аналогично соотношениям Крамерса-Кронига в электродинамике, вытекающим из принципа причинности. Однако условие конечности объекта является более сильным, чем принцип причинности, поскольку объект ограничен со всех сторон, а

ядро, описывающее отклик системы на воздействие, ограничено только с одной стороны – со стороны прошлого.

В той же работе [8] был предложен итерационный алгоритм реконструкции изображения по спектру. Предлагалось на каждом шаге итерационного процесса выполнять коррекцию реконструируемого изображения в два этапа: сначала спектральную, а затем пространственную. При спектральной коррекции модули фурье-компонент приравниваются заданным значениям при сохранении их фаз. При пространственной коррекции значение яркости за пределами объекта приравнивается нулю. Там же были приведены соображения в пользу того, что при достаточно малом отклонении нулевого приближения от истинного изображения процесс должен сходиться (приблизительно по закону геометрической прогрессии).

Практическая проверка алгоритма на модельных изображениях [9] полностью подтвердила выводы работы [8]. Позже они были подтверждены в работе [10]. Однако ряд существенных вопросов, связанных с реконструкцией изображения по его спектру, оставался невыясненным. Первым из них был такой: является ли предел, к которому сходится результат итерационного процесса, единственным? Дело в том, что положение работы [8] о сходимости процесса относится лишь к случаю, когда отличие изображения в нулевом приближении от истинного (искомого) изображения достаточно мало. Этот факт сходимости имеет большое принципиальное значение. Однако для практики важен вопрос о судьбе итерационного процесса при разных начальных приближениях, не обязательно близких к искомому изображению. Предварительные исследования этого вопроса, выполненные разными авторами [11, 12], дают на него неблагоприятный ответ. Это ставит под сомнение практическую ценность идеи о реконструкции изображения объекта по результатам спекл-интерферометрии.

С тех пор прошло много времени. Появился ряд новых идей, как преодолеть мешающее влияние атмосферных неоднородностей, от адаптивной оптики [13-16] до интерферометрического формирования изображений [17]. Однако вопрос об оптимальной обработке последовательности мгновенных изображений, частичным решением которого является спекл-интерферометрия, в целом до сих пор так и не решён. Он требует дальнейших исследований. В частности, требует к себе внимания вопрос об эффективности процедуры восстановления изображения по спектру, её реальных возможностях и путях её дальнейшего усовершенствования. Эти исследования были начаты в ИРЭ АН УССР ещё в 1978 г. при участии Д. Г. Станкевича [9]. Однако вычислитель-

ный потенциал, доступный в то время, не позволял развернуть их в должной мере. Современная вычислительная техника открывает более широкие возможности для таких исследований, что позволяет надеяться на дальнейшее продвижение вперёд в этой области.

Начинать этот новый этап исследований следует с более детального изучения особенностей поведения этой итерационной процедуры в отсутствие шума регистрации при разных начальных приближениях. Этому вопросу и посвящена данная статья.

1. Формулировка задачи восстановления изображения по его пространственному спектру. Пусть $J_0(x, y)$ - функция, описывающая зависимость яркости объекта от координат x, y на плоскости, определённая на всей плоскости и отличная от нуля только внутри некоторого квадрата C со стороной l . Наблюдение объекта производится с помощью телескопа с конечной апертурной, и поэтому поставляет информацию о фурье-образе $\tilde{J}_0(k_x, k_y)$ функции $J_0(x, y)$

только в пределах некоторого квадрата K со стороной $2\pi a$ в частотной плоскости с координатами k_x, k_y . Функцию яркости, в фурье-образе которой присутствуют только эти частоты, обозначим через $J(x, y)$. Это так называемое дифракционно ограниченное изображение объекта, реализующее дифракционный предел разрешения данного телескопа. В силу теоремы Найквиста-Котельникова это приводит к тому, что функция $J(x, y)$ полностью определяется своими значениями в узлах решётки с шагом $1/2a$. Поэтому функцию $J(x, y)$ можно без потери информации представить массивом J из $N = n \times n$ её значений в узлах решётки, где n не должно быть меньше, чем $2a$. С другой стороны, исходя из тех же соображений применительно к функции $\tilde{J}(k_x, k_y)$, её можно представить аналогичным массивом того же размера \tilde{J} . Эти массивы преобразуются друг в друга с помощью процедуры дискретного преобразования Фурье. Таким образом, при практических расчётах изображение будет представлено N вещественными числами. Его фурье-образ будет представлен N комплексными числами, т. е. $2N$ вещественными числами. Однако эти два представления изображения объекта оказываются эквивалентными по числу независимых компонент, если учесть соотношение симметрии, которому удовлетворяет фурье-образ вещественного изображения

$$\tilde{J}(k_x, k_y) = \tilde{J}^*(k_x, -k_y), \quad (1)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение.

При наблюдении объекта сквозь турбулентную среду фазы фурье-компонент подвергаются сильному возмущению и становятся недостоверными. Метод Лабейри исключает их из результатов наблюдения, оставляя только модули фурье-компонент. В результате массив полученных данных содержит только $N/2$ независимых компонент, которых недостаточно для восстановления изображения, состоящего из N независимых элементов. В этом случае изображение можно восстановить, только привлекая на помощь априорную информацию об объекте (см. [3, 4]). В рамках данной задачи такой информацией является знание факта конечности размеров объекта, т. е. равенства нулю его яркости $I(x, y)$ за пределами кадра. Если из условия задачи известно, что яркость объекта фактически отлична от нуля только в пределах массива размером $n/2 \times n/2$ компонент, а остальные компоненты массива I равны нулю, изображение объекта описывается набором из $N/4$ независимых компонент, т. е. меньшим количеством, чем число компонент N в исходных данных. Тогда задача становится переопределённой, что порождает надежду на её успешное решение, но создаёт опасность её некорректности при наличии шума регистрации. В рамках данной работы мы будем считать, что шум регистрации отсутствует, что осуществимо при численном моделировании с достаточно высокой точностью.

Таким образом, задача реконструкции изображения конечного объекта по квадрату модуля его фурье-образа в рамках данной работы поставлена так: задан энергетический спектр объекта $\tilde{I}^* \tilde{I}$ в виде массива M вещественных чисел размером $2n \times 2n$ компонент, не содержащих погрешностей измерения; известно, что искомая яркость объекта, описываемая массивом вещественных чисел того же размера, отлична от нуля только в пределах подмассива размером $n \times n$ элементов; требуется найти массив I , описывающий яркость объекта.

2. Алгоритм реконструкции. Алгоритм, предложенный в работе [8], состоит в следующем. Левый верхний квадрант массива I заполняется нулевым приближением I_0 , остальные его элементы устанавливаются в ноль. Затем выполняется итерационный процесс, i -й шаг которого состоит из двух этапов. На первом этапе выполняется частотная коррекция изображения с помощью оператора \mathcal{A} . Для этого вычисляется фурье-образ \tilde{I}_i изображения I_i , после чего значения модулей фурье-компонент заменяются на значения компонент массива M , заданные условием задачи, при сохранении значений фаз, после

чего выполняется обратное преобразование Фурье. На втором этапе изображение подвергается действию оператора \mathcal{B} , состоящему в подавлении (обращении в нуль) значений яркости во всех узлах решётки за пределами верхнего левого квадранта, в результате чего получается новое приближение I_{i+1} . Одновременно вычисляется норма разности

$$v_i = |I_i - I_{i-1}| \quad (2)$$

и модуль её изменения

$$\delta_i = |v_i - v_{i-1}|. \quad (3)$$

Процесс завершается, когда δ_i становится меньше заданной величины.

При дальнейшем усовершенствовании этого алгоритма в него была добавлена ещё одна коррекция с помощью оператора \mathcal{C} , состоящая в подавлении отрицательных значений яркости. Это несколько ускоряет сходимость процесса (поскольку норма вектора $\mathcal{B}\mathcal{C}\vec{p}$ может быть меньше нормы вектора $\mathcal{B}\vec{p}$), но мало что меняет в принципиальном отношении. В наших исследованиях, описанных в этой статье, он применялся именно в таком виде.

3. Вопрос о сходимости процесса. Этот вопрос является центральным при исследовании практических возможностей алгоритма, описанного в работе [8] и в предыдущем параграфе данной статьи. В той же работе были кратко изложены соображения, приводящие к выводу, что при достаточно малом отличии I_0 от J следует ожидать сходимости процесса. Изложим их здесь более подробно. Рассмотрим N -мерное ($N=4n^2$) евклидово пространство P всех изображений, заданных на квадрате $2n \times 2n$ элементов (т. е. пространство всех массивов I), с нормой, равной корню из суммы квадратов компонент массива I и скалярным произведением, определяемым как сумма попарных произведений компонент. Пространство всех массивов, отличных от нуля только в левом верхнем квадранте, образует линейное подпространство Q пространства P . Оператор \mathcal{B} является проектором, отображающим любой вектор \vec{p} пространства P в его ортогональную проекцию \vec{q} на подпространство Q .

Теперь рассмотрим множество R точек I пространства P , у которых квадраты модулей фурье-компонент (энергетический спектр) совпадают с заданным M . Оно образует замкнутую гиперповерхность в пространстве P , имеющую размерность $N/4$. Искомое изображение J лежит на пересечении подпространства Q и гиперповерхности R . Результатом действия оператора \mathcal{A}

на любой вектор \vec{r} из P является точка r этой гиперповерхности, ближайшая к \vec{r} . При достаточно малом отличии I от J это проектирование \vec{r} на R мало отличается от ортогонального проектирования \mathcal{B} точки \vec{r} на $N/4$ -мерную гиперплоскость S , касательную к R в точке J .

Тогда m шагов описанного выше итерационного процесса оказываются приближённо эквивалентными воздействию на погрешность нулевого приближения $I_0 - J$ линейного оператора $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^m$. При естественных предположениях норма погрешности m -го приближения будет приближённо равна $\mu^m |I_0 - J|$, где μ - константа меньшая единицы. Таким образом, процесс будет сходиться к истинному изображению J , а норма погрешности будет убывать приблизительно по закону геометрической прогрессии.

Главным предположением в этих рассуждениях является малость разности $I_0 - J$. Однако искомое изображение до обработки результатов наблюдения далеко не всегда бывает известно с хорошей точностью. Поэтому большой интерес представляет вопрос о том, как будет зависеть результат выполнения описанного алгоритма от начального приближения. На сегодняшний день выполнить такое исследование представляется возможным только с помощью компьютерного эксперимента, который и является главным инструментом в выполненном нами исследовании.

4. Организация вычислений. Поскольку речь идёт об объектах с малым угловым размером (иначе проявится неизопланатичность атмосферы, и метод спекл-интерферометрии станет неэффективным), для эксперимента были выбраны изображения низкой чёткости: 4×4 , 8×8 и 16×16 элементов. Соответственно размеры массива I составляли 8×8 , 16×16 и 32×32 элементов. Чтобы лучше имитировать случай "отсутствия шума", яркости были представлены с двойной точностью (восьмибайтовыми числами с плавающей точкой). В результате, отношение шум-сигнал при вычислениях составляло величину 10^{-34} . Такая точность намного превышала практические потребности.

В качестве тест-объекта использовалось двухуровневое изображение (со значениями яркости 0 и 1) заглавной латинской буквы F , выполненное для каждого формата отдельно. Для выполнения дискретного фурье-преобразования массивов использовался общеизвестный алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) [18].

Начальное приближение I_0 выбиралось по-разному в зависимости от целей эксперимента. Обычно это был случайный вектор пространства

Q с изотропным гауссовым распределением и средним значением равным нулю, J или какой-либо другой интересующей нас точке пространства Q . В других случаях оно выбиралось планомерно в некотором заранее выбранном подмножестве пространства Q .

Для реконструкции изображения выполнялось некоторое количество циклов описанного выше итерационного процесса, достаточное для достижения желаемой точности. Полученный результат анализировался путём сравнения с оригиналом J или с другими результатами реконструкции.

Исследование было направлено на выяснение следующих вопросов:

- действительно ли при достаточно малом отличии I_0 от J процесс сходится к J и при том довольно быстро;
- при каких отклонениях I_0 от J такая сходимость ещё имеет место;
- каковы другие варианты итога итерационного процесса;
- если правильная сходимость имеет место не всегда, то какова её вероятность при случайном выборе начального приближения;
- как зависит вероятность правильного результата от дисперсии случайного вектора, используемого при формировании начального приближения;
- как изменяется результат в малой окрестности некоторой точки q пространства Q и как эта картина зависит от выбора точки q .

Ниже излагаются ответы на эти вопросы, полученные в ходе исследования.

5. Сходимость итерационного процесса. Для выяснения первого вопроса исследовалась статистика результатов реконструкции в разных приближениях при случайном выборе начального приближения. В качестве начального приближения использовалось изображение

$$I_0 = J + \alpha r, \quad (4)$$

где r - стандартный случайный вектор пространства Q , компоненты которого распределены независимо и нормально с дисперсией 1; α - параметр, значение которого выбиралось в зависимости от поставленной задачи. В данном случае значение α изменялось от 0,05 до 10^6 . Было установлено, что при $\alpha < 0,1$ для $n = 4$, $\alpha < 0,05$ для $n = 8$ и $\alpha < 0,01$ для $n = 16$ процесс во всех случаях сходился к правильному результату J . Степень близости реконструируемого изображения в i -ом приближении I_i к истинному изображению J описывалась эвклидовым расстоянием

$$\delta_i = \sqrt{\sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (I_{i\mu\nu} - J_{\mu\nu})^2}, \quad (5)$$

где $I_{i\mu\nu}$, $J_{\mu\nu}$ - элементы изображений I_i и J ; μ и n - номера соответственно строки в изображении и элемента в строке.

Типичные примеры зависимости δ_i от i (для разных начальных приближений) приведены на рис. 1. Видно, что логарифм расстояния δ_i убывает с ростом i приблизительно линейно, что

совпадает с предсказанием теории (п. 3). Для достижения точности реконструкции изображения 10^{-8} (среднеквадратичная разность яркости на восстановленном и исходном изображениях) в типичном случае требуется 150 - 200 итераций (на графиках каждая точка соответствует прохождению 10 итераций).

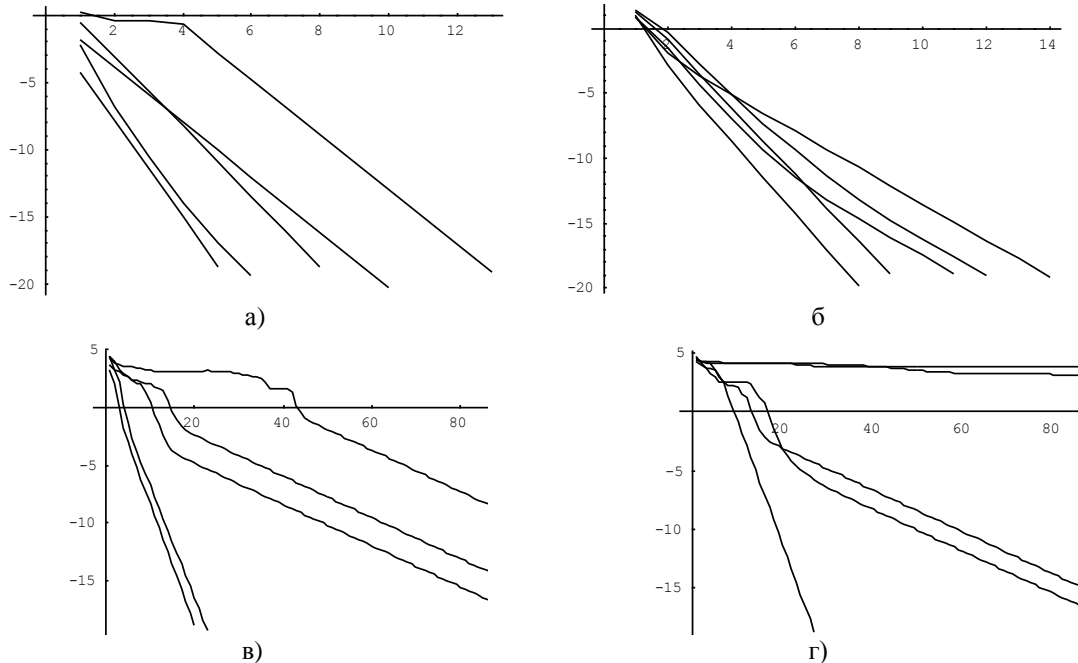


Рис. 1. Зависимость расстояния δ от номера итерации i для: а) $n = 4$ и $\alpha = 0,5$; б) $n = 8$ и $\alpha = 5$; в) $n = 16$ и $\alpha = 20$; г) $n = 16$ и $\alpha = 10000$

При увеличении α свыше 0,1 начинают появляться случаи неправильной сходимости процесса: он попадает в так называемые ловушки и стремится к предельному циклу с отличной от нуля разностью $I_\infty - J$. На рис. 1,г этим случаям соответствуют кривые, которые загибаются и идут почти параллельно оси i , стремясь при $i \rightarrow \infty$ к расстоянию этой ловушки I_∞ от J .

На рис. 2 приведены примеры изображений при правильной сходимости (оно не отличается по виду от J) и при захвате процесса ловушкой.

Условной границей области приемлемой сходимости $\alpha_{1/2}$ можно считать такое значение α , при котором вероятность правильного результата равна 1/2. Эта граница для $n=4$ оказывается равной 2,0.

6. Статистика ловушек. Когда с увеличением α начинают проявлять себя ловушки, это происходит, начиная с ловушек, которым соответствуют меньшие значения δ_∞ , т. е. ближайших к J . В ходе экспериментов была собрана статистика значений δ_∞ , к которым приводит итерационный процесс в случаях неправильной сходимости. Ре-

зультат такой статистики был представлен в виде гистограмм. процесса с точностью порядка 10^{-8} значения δ_{50} . Эти гистограммы показали, что увеличение α приводит к уменьшению вероятности захвата процесса ближайшими ловушками и увеличению вероятности более удалённых ловушек, однако множество значений δ остаётся одним и тем же. Дискретный характер этого множества позволяет сделать естественное предположение о том, что множество ловушек также является дискретным.

Чтобы проверить это предположение, был поставлен такой эксперимент. Была выбрана некоторая ловушка L , и через неё в пространстве Q случайным образом проводилась двумерная плоскость, ортогональная L . В этой плоскости выбирался квадрат K со стороной a и центром в ловушке L . В этом квадрате строилась дискретная двумерная квадратная решётка с достаточно малым шагом h . Затем последовательно для каждого узла этой решётки выполнялась процедура реконструкции со значением вектора \vec{p} в этом узле в качестве начального приближения I_0 . Значения δ_∞ , приближённо вычисленные по результату

реконструкции изображения, отображались на карте в точках, соответствующих использованному начальному приближению. В результате, получалась карта, представляющая δ_∞ как функцию точки в пределах квадрата K . Пример такой карты для $n = 4$ приведен на рис. 3, л. Здесь точками показано расположение выбранных ловушек, а цвет области характеризует удалённость данной ловушки от истинного объекта (на этой карте масштаб цветовой шкалы отличается от показанного на рис. 3, м).

Анализ таких карт для разных ловушек показал, что во всех случаях ловушка была окружена областью, в которой $\delta_\infty = 0$. Эта область образует как бы "бассейн" этой ловушки (точнее, его двумерное сечение выбранной плоскостью), из любой точки которого процесс сходится к этой ловушке, которая таким образом оказывается изолированной от других ловушек. Аналогичная окрестность существует и вокруг правильного решения J , что, впрочем, было ясно из соображений, изложенных в п. 3.

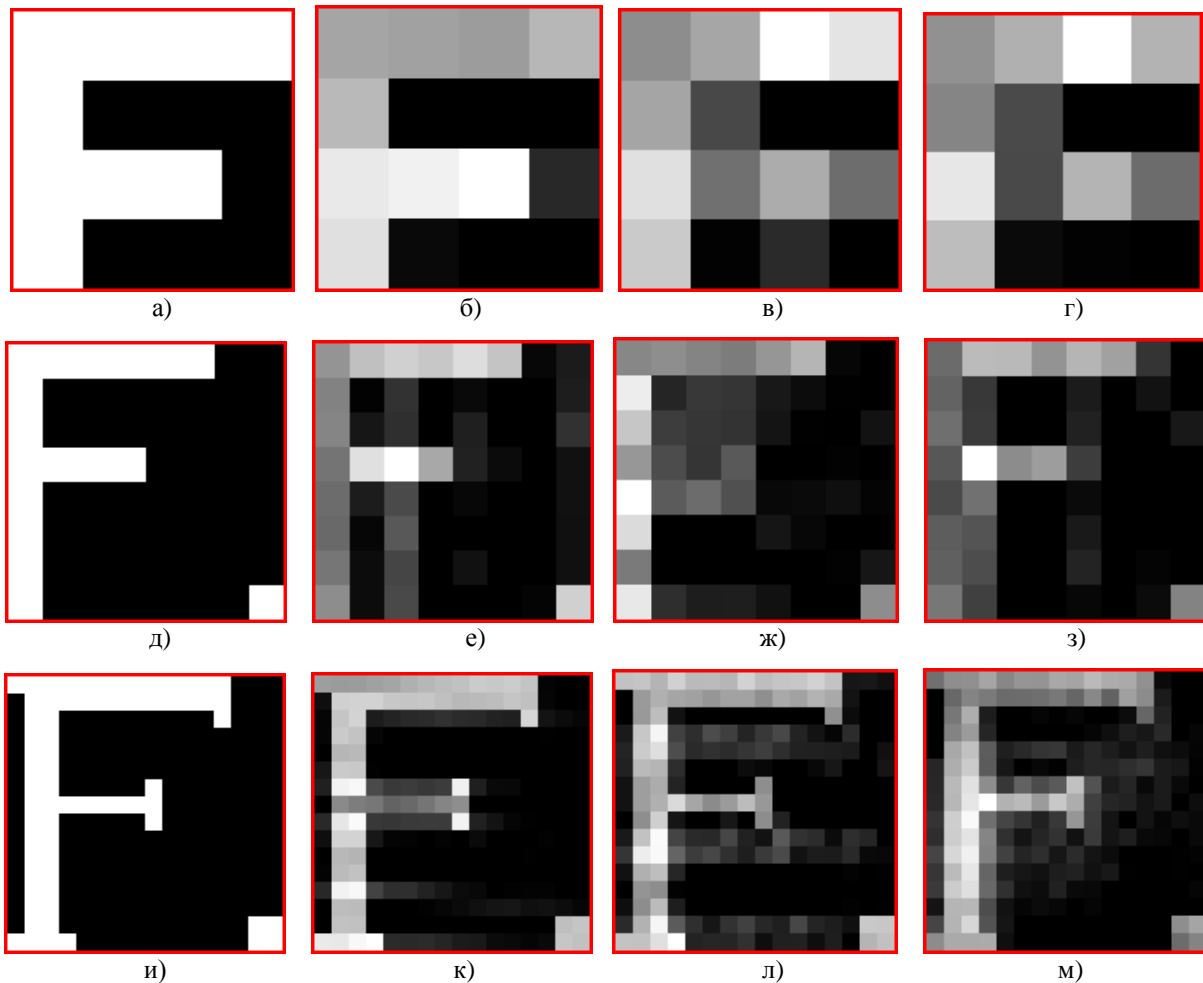


Рис. 2. Реконструированные изображения объекта при правильной сходимости и в трёх ловушках для $n = 4$ (а, б, в, г); $n = 8$ (д, е, ж, з); $n = 16$ (и, к, л, м); а, д, и - правильно реконструированные изображения

Правильно восстановленное изображение и первые три ловушки, ближайšie к истинному изображению J для $n = 4, 8$ и 16 показаны на рис. 2. Для надёжного отождествления ловушек вычисления велись с высокой точностью порядка 10^{-8} . Поэтому правильно восстановленное изображение неотличимо от оригинала (и потому истинное изображение J здесь не приводится). Ловушки

же, даже ближайšie к истинному изображению, наоборот, отчётливо отличаются от него.

7. Зависимость вероятности правильной реконструкции от параметра альфа. Как явствует из предыдущего, существует такое d_0 , что для всякого I_0 , удалённого от J меньше, чем на d_0 , имеет место сходимость итерационного процесса к правильному изображению J .

Однако, если начальное приближение I_0 выбирается в соответствии с формулой (4), при любом α существует отличная от нуля вероятность неправильной сходимости процесса к некоторой ловушке. При $\alpha \ll d_0$ она пренебрежимо мала, при увеличении α она возрастает и приближается к вероятности попадания в ловушку при случайном выборе I_0 с равной вероятностью всех I_0 . При большой размерности пространства Q эта величина близка к единице, и шансов на правильную реконструкцию изображения остаётся мало. Поэтому представляет интерес исследование вероятности правильного восстановления в зависимости от значения α .

С этой целью для каждого намеченного значения α выбиралось начальное приближение по формуле (4) и производилась реконструкция изображения. Число таких проб при данном α выбиралось с таким расчетом, чтобы флуктуация числа полученных благоприятных исходов была порядка одного процента от числа проб. Полученные результаты представлены в виде графиков на рис. 4. Из этих графиков видно, что вероятность правильной реконструкции плавно убывает от единицы (при $\alpha = 0$), приближаясь к некоторому предельному значению.

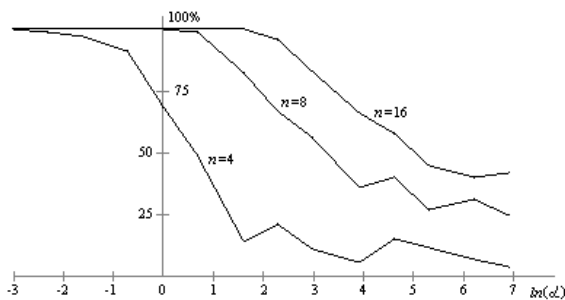


Рис. 4. Вероятность сходимости процесса к истинному изображению как функция α при разных n

8. Зависимость результата от начального приближения. Как уже было сказано в п. 5, результат I_i , получаемый на i -ом шаге итерационного процесса, при $i \rightarrow \infty$ стремится к пределу I_∞ , который может совпадать или не совпадать с истинным изображением J . Было бы интересно исследовать зависимость I_∞ от I_0 в надежде найти на этом пути какие-то правила целенаправленного выбора начального приближения, обеспечивающего правильную сходимость процесса. Сложность этой задачи, связанная с большой размерностью пространства, к которому принадлежит I_0 , побудила нас ограничиться в рамках данной рабо-

ты более простой задачей - исследованием функции F , выражающей зависимость δ_∞ от I_0

$$\delta_\infty = F(I_0) \quad (6)$$

на отдельных, специально выбранных подмножествах пространства Q .

Исследование производилось следующим образом. В пространстве Q выбиралась некоторая двумерная плоскость S , в этой плоскости выбирался квадрат K , а в нём строилась квадратная решётка с шагом h . Выбор S , K и h определялся характером задачи. Затем для каждого узла решётки выполнялся описанный в п. 2 итерационный процесс до достижения заданной точности результата (обычно 10^{-8}). По полученному изображению вычислялось значение Дельта, которое считалось приближённым значением предела δ_∞ и отображалось на карте непрерывным цветовым кодом (без грубой дискретизации).

Первым вопросом, подлежавшим изучению, было поведение функции F в окрестности точки J . Для этого в пространстве Q проводился радиус-вектор из нуля в точку J . Затем через точку J случайным образом проводилась двумерная плоскость, ортогональная этому радиус-вектору. В этой плоскости выбирался случайно ориентированный квадрат со стороной a и центром в точке J . В нём строилась квадратная решётка форматом 251×251 узлов. В этой решётке строилась карта, отражающая поведение функции F .

Такие карты строились для $n = 4, 8, 16$. При этом значения яркости в некоторых деталях изображения J несколько варьировались, чтобы проверить чувствительность получаемой картины к сюжету изображения. Результаты исследования показали, что точка J всегда лежит внутри области, в которой функция F равна нулю, карты для n равного 4, 8 и 16 весьма похожи друг на друга и мало изменяются при небольших вариациях изображения J .

9. Особенности поведения функции F . Существенной чертой функции F , неизменно проявлявшейся во всех экспериментах, оказалось то, что множество значений, которые она принимает, является дискретным. Это порождает на картах одноцветные области, разделённые чёткими границами (рис. 3). В пределах области значение функции является константой, величину которой можно оценить, используя цветовую шкалу, приведенную на рис. 3, м.

На рис. 3, ж, з показаны карты значений функции F в окрестности правильного изображения. (Оно находится вблизи правого нижнего и левого нижнего узла соответственно.) Белым представлена область, где $\delta = 0$.

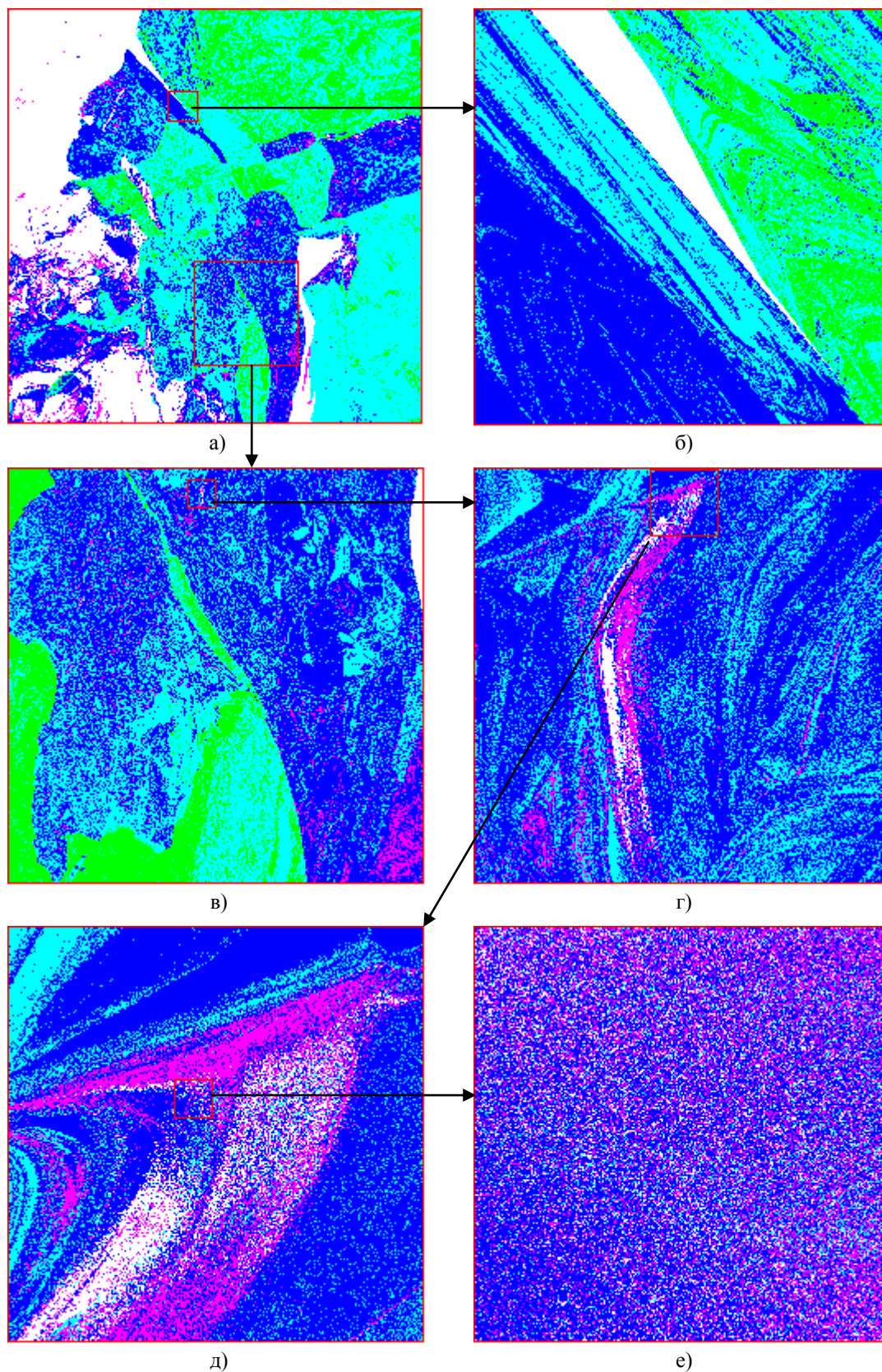
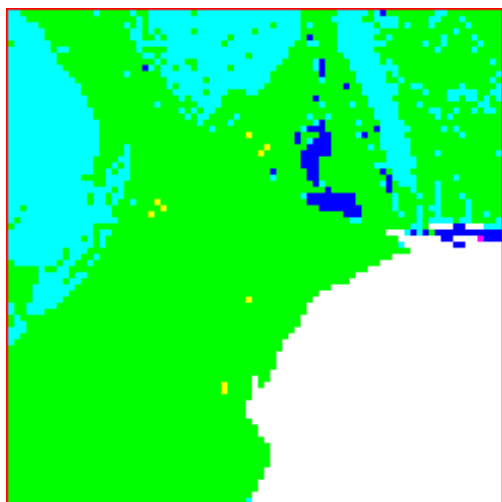
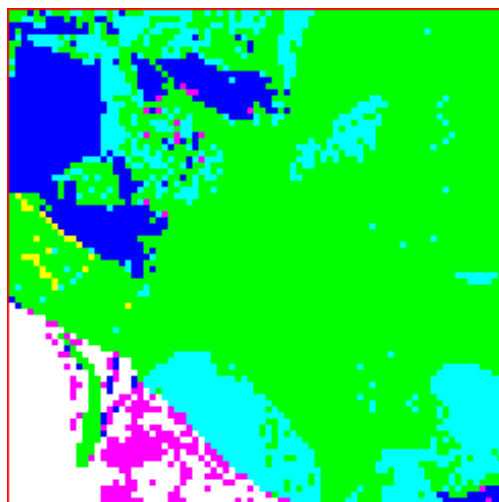


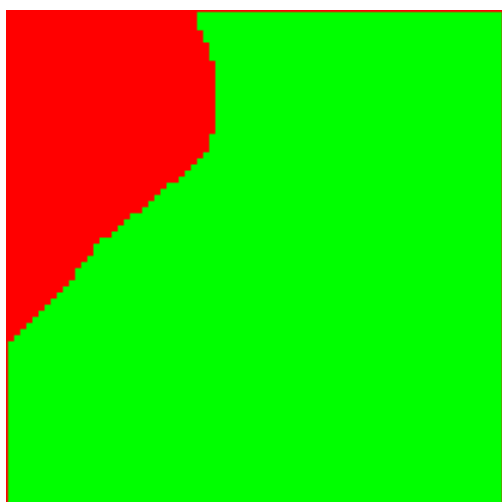
Рис. 3. Карты сходимости процесса в окрестности истинного изображения и ловушек: а-е – объект 16×16 ; ж, з, к – объект 8×8 , и, л – объект 4×4 , а также цветовая шкала (м); плоскость проводится через три случайных приближения (а-и), а также через правильный объект, зеркальный объект и случайное приближение (к); для случая (л) все три приближения лежат в отображаемой плоскости и отмечены синими точками в соответствующих областях; числами показано их отклонение от правильного восстановления



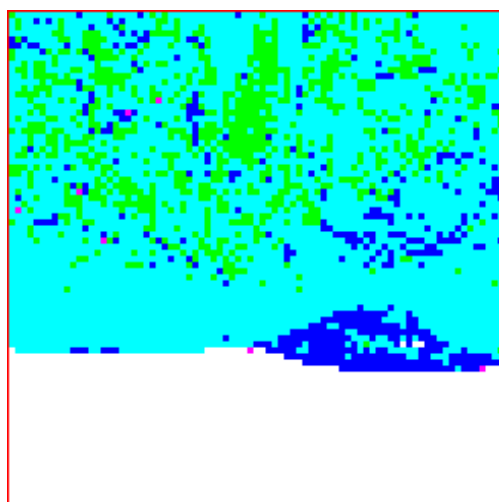
ж)



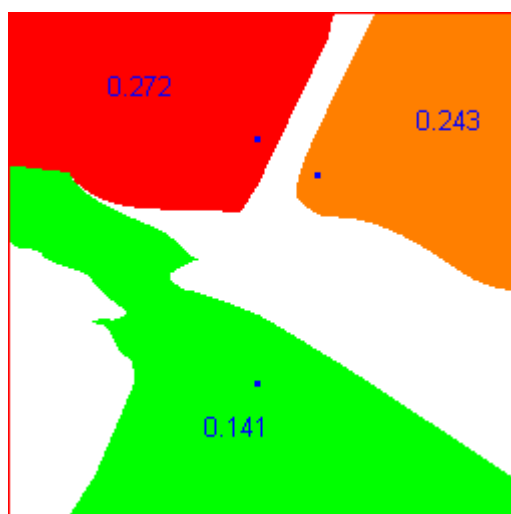
з)



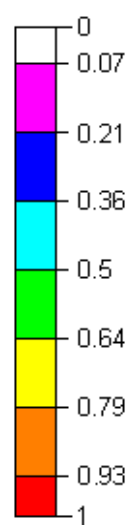
и)



к)



л)



м)

Рис. 3. (продолжение)

На рис. 3,и представлена область, далёкая от истинного изображения. В ней нет ни одной белой точки; из любой её точки процесс попадает в одну из трёх ловушек. На рис. 3,к карта построена в плоскости, проведенной через истинное изображение, его зеркальный образ (в небольшой окрестности которого нет точек правильной сходимости) и случайно выбранную точку. Здесь чётко выражена большая область правильной сходимости (внизу), которая простирается до точки J и захватывает её, и зона неправильной сходимости (вверху), доходящая до зеркального изображения J^* .

10. Структура функции F . Если бы в расположении областей, в пределах которых значение функции F постоянно, была обнаружена какая-нибудь закономерность, это дало бы надежду найти способ, анализируя расположение областей, отыскать путь в область, из которой процесс сходится к J . Поэтому было предпринято обстоятельное исследование структуры этой функции. Однако при исследовании открылась совсем другая картина.

Для исследования в пространстве Q размерности 256 было произвольно выбрано плоское двумерное сечение, а в нём квадратная область с таким лишь условием, чтобы карта значений δ , построенная в ней, была достаточно разнообразной и обязательно содержала область правильной сходимости (к изображению J). Этому условию, по мнению авторов, соответствовала карта, приведенная на рис. 3,а. Здесь видны достаточно большие белые области (области правильной сходимости с $\delta = 0$), включая чисто белые области и белые области с многочисленными островками неправильной сходимости, а также обширные однородные области неправильной сходимости. Сторона квадрата составляла 2,0 (яркость на исходном изображении принимала значения 0 и 1). В этом квадрате выбирались небольшие квадратные участки, вызывавшие интерес, и для них строились полноразмерные карты в решётке 251×251 элементов. Так, на карте а (рис. 3,а) были выбраны участки б (размером 0,0048) и в (размером 0,5). Их полноразмерные карты (251×251) представлены на рис. 3,б и 3,в.

Из рис. 3,б видно, что белый клин слева вверху на рис. 3,а сохраняет свою остроту в масштабе рис. 3,б, и, по-видимому, в более мелком масштабе. Из рис. 3,в видно, что участок в на рис. 3,а имеет сложную мелкую структуру, не видимую на рис. 3,а, но хорошо различимую на рис. 3,в. Подобным же образом участок г (размером 0,04) на рис. 3,в при дальнейшем повышении разрешения (в пространстве Q) обнаруживает весьма сложную структуру; то же относится и к участку д на рис. 3,г.

На рис. 3,д был выбран участок е размером 0,00768, который кажется, в основном, однородным, однако и он проявляет на рис. 3,е сложную структуру.

Выводы. Проблема видения сквозь среду со случайными неоднородностями показателя преломления занимает важное место в радиофизике, наблюдательной астрономии и в прикладных областях науки. Существует много идей, как преодолеть мешающее влияние среды распространения (метод замыкания фаз в радиоастрономии, метод спекл-интерферометрии в оптической астрономии, метод интерферометрического формирования изображений, применение адаптивной оптики и много других). Все эти методы по тем или иным причинам не являются полным решением проблемы. Это делает необходимым поиск новых методов и усовершенствование старых.

Фазовые искажения волны, вызываемые неоднородностями среды, приводят к искажению формируемого изображения объекта, причём преимущественно фаз фурье-компонент изображения, информация о которых часто полностью теряется. Это обстоятельство приводит к задаче реконструкции изображения по его энергетическому спектру (квадрату модуля его фурье-образа). Такая задача в общем виде не может быть решена однозначно. Однако она может быть однозначно решена при довольно слабом дополнительном условии: объект должен иметь конечные размеры (его яркость должна быть отличной от нуля только в конечной области плоскости).

Давно предложен алгоритм такой реконструкции, а также различные его усовершенствования. Он представляет собой итерационный процесс, безупречно сходящийся при начальном приближении, достаточно близком к искомому изображению. Однако его поведение при произвольном выборе начального приближения не всегда приемлемо: он может давать сходимость к неправильному результату.

С тех пор предложен ряд новых идей преодоления мешающего влияния среды. Однако проблема по-прежнему радикально не решена, и предстоит дальнейший поиск новых путей. При этом интерес к реконструкции изображения по спектру может ещё не раз вспыхнуть с новой силой, поскольку эта процедура может стать составной частью новых, более совершенных методов. Главным на сегодняшний день представляется вопрос о сходимости процесса и влиянии на результат выбора начального приближения.

Исследование этого вопроса должно вестись как теоретически, так и с помощью машинного эксперимента. Однако большая сложность задачи, проистекающая от большой размерности пространства, в котором ищется реконструируемое изображение, приводит к тому, что машин-

ный эксперимент на сегодняшний день оказывается более коротким путём к пониманию ряда вопросов. Именно этот путь был выбран для исследований, описанных в данной статье.

В результате выполненного исследования были подтверждены или установлены заново следующие факты:

- в достаточно малой окрестности искомого изображения предложенный ранее итерационный процесс всегда сходится к искомому изображению со скоростью геометрической прогрессии;

- при произвольном выборе начального приближения процесс всегда сходится, однако может сходиться как к правильному, так и к неправильному результату (т. е. попасть в ловушку);

- ловушки образуют в пространстве изображений дискретное множество. Типичные расстояния между ближайшими друг к другу ловушками 0,1;

- для понимания поведения итерационного процесса при произвольном начальном приближении полезно исследовать функцию F , которая отображает пространство изображений на вещественную прямую, а отдельное изображение I - на расстояние предела итерационного процесса от правильного изображения в случае, когда I использовано в качестве начального приближения;

- характерной отличительной чертой этой функции является то, что она принимает значения из дискретного набора чисел. Поэтому пространство изображений оказывается разделённым на отдельные области с чёткими границами между ними, в пределах каждой из которых значение функции F является константой;

- предварительное исследование этих областей показало, что они имеют сложную фракталоподобную структуру. Поэтому остаётся мало надежды на то, что удастся найти какую-то регулярную закономерность в их расположении, которая могла бы открыть путь к алгоритму регулярного поиска области правильной сходимости, в которой $F = 0$.

1. Коваль И. К. Астрон. циркуляр. - 1965. - №317. - С.1.
2. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. - М.: Мир, 1974. - 491 с.
3. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некоррктных задач // Успехи физ. наук. - 1970. - 202, №3. - С.345-386.
4. Корниенко Ю. В. Статистический подход к фильтрации и информативность изображения // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2005. - 10, спец. вып. - С.652-676.
5. Дудинов В. Н. О возможности учета погрешностей, вызванных замытием изображения планет // Астрономический журн. - 1969. - 46, №5. - С.1064-1073.
6. Labeyrie A. Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by fourier analysing speckle patterns in star images. - Astron. Et astrophys. - 1970. - 6, N1. - P.85-87.

7. Петров В. А. О восстановлении функций по модулю преобразования Фурье // Весн. Харьков. ун-та. - 1981. - 223, № 16. - С.25-33.
8. Корниенко Ю. В. О возможности восстановления изображения слабого объекта, искаженного влиянием земной атмосферы // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1977. - № 10. - С.931-933.
9. Бабичев А. А., Корниенко Ю. В., Парусимов В. Г. и др. Цифровая обработка астрономических изображений // Тр. 14-го Международ. конгресса по высокоскоростной фотографии и фотонике. - М. - 1980. - С.436-439.
10. Fienup J. R. Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform // Opt. Lett.. - 1978. - 3. - P. 27-29.
11. Fienup J. R., Wackerman C. C. Diffraction-limited imaging of space objects III // Final Report, 1 Mar. 1982 - 31 Oct. 1985. Environmental Research Inst. of Michigan. - Ann Arbor. - 1986.
12. Кнох К. Т., Томпсон В. Дж. New methods of processing speckle pattern star images // Astrophysical journal. - 1973. - 182. - P.L133.
13. Бакут П. А., Устинов Н. Д., Троицкий И. М. и др. Методы обработки световых полей при наблюдении через турбулентную среду // Зарубежная радиоэлектроника. - 1977. - №1. - С.3-29.
14. Roggemann M. C., Welsh B. M., and Fugate R. Q. Improving the resolution of ground-based telescopes // Reviews of Modern Physics. - 1997. - N69. - С.437-505.
15. Баранов Ю. В., Новиков С. Б., Овчинников А. А. Улучшение разрешения телескопа с помощью компенсатора наклонов волнового фронта // Методы повышения эффективности оптических телескопов / Под ред. С.А. Гладышева - М.: Изд-во Москов. ун-та. - 1987. - 180 с.
16. Баранов Ю.В., Белкин Н.Д., Горбинский В. Н. и др. Астрономический циркуляр. - 1984. - №1929. - С.2.
17. Корниенко Ю. В. Интероферометрический подход к проблеме видения сквозь турбулентную атмосферу. I // Кинематика и физика небесных тел. - 1994. - 10, №2. - С.98-106.
18. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов / Пер. с англ. под ред. А. М. Трахтмана. - М.: Сов. радио, 1973. - 368 с.

ON THE IMAGE RECONSTRUCTION UNDER ITS FOURIER-TRANSFORM MODULUS

Yu. V. Kornienko, S. I. Skuratovskiy

The iterative reconstruction procedure proposed before for the object of limited size was investigated by means of computer experiment. Good convergence to the correct result from some its neighborhood was confirmed, and the possibility of convergence to a wrong result (called 'trap'), while a random initial approximation was selected, was shown. A discrete nature of such traps set was established. Fractal-like dependence was found of the process convergence limit on the initial approximation. Probability of correct image reconstruction under random initial approximation was estimated. The obtained results are illustrated with graphics, half-tone images and color maps.

Key words: vision through turbulent atmosphere, speckle-interferometry, phase problem, image reconstruction under its spectrum.

ПРО РЕКОНСТРУКЦІЮ ЗОБРАЖЕННЯ ОБ'ЄКТУ ЗА МОДУЛЕМ ЙОГО ФУР'Є-ОБРАЗУ

Ю. В. Корнієнко, С. І. Скуратовський

Шляхом машинного експерименту досліджено збіжність ітераційного процесу, який було запропоновано раніше для реконструкції зображення об'єкту кінцевих розмі-

рів за квадратом модуля його фур'є-образу. Підтверджено добру збіжність процесу до правильного результату із деякого його околу у просторі зображень та можливість збіжності до неправильного результату (так званої пастки) при вільному виборі початкового наближення. Установлено дискретний характер множини таких пасток. Досліджено залежність границі, до якої сходиться ітераційний процес, від початкового наближення та встановлено фракталоподібний характер цієї залежності. Досліджено ймовірність правильного відновлення

зображення при випадковому виборі початкового наближення. Одержані результати проілюстровано графіками, напівтонними зображеннями та кольоровими картами.

Ключові слова: бачення крізь турбулентну атмосферу, спекл-інтерферометрія, фазова проблема, відновлення зображення за спектром

Рукопись поступила 6 декабря 2007 г.