УДК 537.876.45.001:621.372.8.049.75

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ОСНОВНИХ КВАЗІ-*T*-ХВИЛЬ У ПЕРЕДФРАКТАЛЬНІЙ СИСТЕМІ МІКРОСТРІЧКОВИХ ЛІНІЙ

А. Г. Кошовий, Г. І. Кошовий

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського,
17, вул. Чкалова, Харків, 61070, Україна
E-mail: k405@d4.khai.edu

Проводиться дослідження майже поперечних електромагнітних хвиль у передфрактальній системі мікрострічкових ліній. Задача поставлена у вигляді системи інтегральних рівнянь першого роду з електростатичними ядрами. Застосовуючи вузькострічковий підхід, задача була приведена до розв'язання узагальненої проблеми власних значень пари симетричних матриць. В деталях розглядаються найпростіші системи, що відповідають утворювачам самоподібних фракталів зі змінною розмірністю. Розроблено ефективний алгоритм для обчислення основних електромагнітних характеристик передфрактальних систем та приведені чисельні розрахунки. Іл. 5. Бібліогр.: 11 найм.

Ключові слова: фрактали, електромагнетизм, чисельні методи, моделювання.

Останнім часом у періодичних наукових виданнях з’явилося багато результатів поєднання теорії фракталів з практично важливими і добре теоретично розробленими областями радіофізики. Навіть є ряд монографій, присвячених узагальненню робіт з використання теорії фракталів у радіофізиці [1-4].

У статті досліджуються основні майже поперечні електромагнітні хвилі, що можуть розповсюджуватись у передфрактальній системі відкритих мікрострічкових ліній (МСЛ). У якості фізичної моделі береться класична система МСЛ із загальною діелектричною підкладкою, яка знизу має заземлений металічний екран [5]. При цьому стрічки розташовуються так, щоб їх поперечний перетин у вигляді відрізків був деякою стадією творення множини Кантора з фрактальною розмірністю, що може змінюватись в інтервалі (0,1) [6].

Оскільки у процесі побудови множини Кантора відрізки весь час зменшуються, при визначенні основних типів електромагнітних хвиль стає ефективним асимптотичний підхід вузьких стрічок [7]. Тобто діє квазістатична математична модель електродинамічної задачі у вигляді систем інтегральних рівнянь, що мають явний аналітичний розв’язок. В результаті чого розрахунок характеристик наявних у передфрактальній системі МСЛ квазі-T-хвиль приводить до розв’язку скінчених алгебраїчних рівнянь.

1. Загальна постановка задачі. Розглядається система відкритих МСЛ, що являє собою N абсолютно тонких, ідеально провідних однакових стрічок, розташованих на спільній діелектричній підкладці, яка знаходиться на ідеально провідній заземленій площині (екрані). Система однорідна вздовж стрічок, її поперечний перетин у випадку першої та другої стадії множини Кантора з п’ятинним принципом творення зображено на рис. 1.

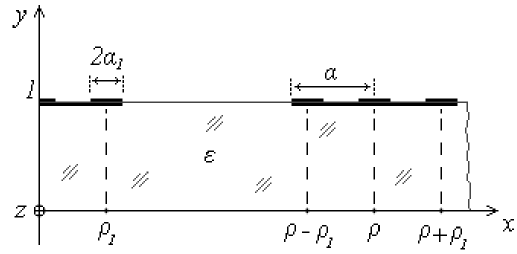

Рис. 1. Половина поперечного перетину системи МСЛ, що відповідає першій та другій стадії творення самоподібного фракталу з розмірністю Хаусдорфа $d_f = \ln 3/\ln 5$

Кількість стрічок N залежить від принципу творення фракталу та від стадії творення. Якщо взяти класичний третинний принцип, то $N = 2^n$, де n − стадія творення [6]. У випадку п’ятинного принципу творення $N = 3^n$, при цьому з переходом від певної стадії до наступної відрізки зменшуються у κ разів, де $\kappa > 3$. Фрактальна розмірність множини Кантора визначається виразом $d_f = \ln 3/\ln\kappa$, число κ - коефіцієнт подібності визначається початковим розміром всього утворювача $2\rho + 2\alpha$ та розміром його відрізків 2α, тобто $\kappa = \dfrac{2\rho + 2\alpha}{2\alpha} = 1 + \dfrac{\rho}{\alpha}$. Досліджуються електромагнітні поля хвиль, які розповсюджуються вздовж цієї системи з залежністю від продовжної координати z та часу t у вигляді $\exp[i(hz - \omega t)]$.

При цьому математична модель процесу розповсюдження основних типів майже поперечних (квазі-T) електромагнітних хвиль у передфрактальній системі МСЛ постає у вигляді системи досить складних інтегральних рівнянь (ІР) першого роду [5, 7]. Вхідними параметрами є ε − діелектрична стала підкладки; n − натуральне число, що вказує стадію творення фрактального об'єкта; d_f − його фрактальна розмірність. Вихідними параметрами моделі є сталі розповсюдження та розподіл поверхневих струмів на стрічках для відповідних типів електромагнітних хвиль. У процесі творення фрактальної системи ширини стрічок досить швидко зменшуються $\alpha_n = \dfrac{\alpha}{\kappa^{n-1}}$, n − стадія творення, тому є можливість застосувати вузькострічкове наближення [7]. У цьому випадку система IP значно спрощується.

2. Вузькострічкова модель. Покажемо, яким чином відбувається спрощення для випадку квазістатичної моделі процесу розповсюдження хвиль у системі з N стрічок, що ґрунтується на системі IP

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-1}^{1} q^k_{n\varepsilon}(t)G_\varepsilon(\rho_{mk}+\alpha_n(x-t))dt = A^m_n, \quad |x|\le 1,\ m=1,\dots,N. \tag{1}$$

Тут ядерна функція

$$G_\varepsilon(u) = \frac{2}{\varepsilon+1}\sum_{l=0}^{\infty} q^l \ln\frac{4(l+1)^2+u^2}{4l^2+u^2},$$

$q = \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$; ρ_{mk} – нормована на товщину підкладки відстань між центрами m-ї та k-ї стрічок (чи те ж саме відрізків).

Користуючись степеневими рядами для ядра

$$G_\varepsilon(\rho_{mk}+\alpha_n(x-t)) = \frac{4}{\varepsilon+1}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_n^{2l}(x-t)^l\sigma_l(\varepsilon,\rho_{mk})$$

при $m \ne k$, та при $m = k$

$$G_\varepsilon(\alpha_n(x-t)) = \frac{4}{\varepsilon+1}\left[\ln\frac{2}{\alpha_n} - \ln|x-t| + \sigma_0(\varepsilon) + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_n^l(x-t)^l\sigma_l(\varepsilon,\rho_{mk})\right],$$

а також відповідними рядами для шуканих величин, перейдемо до системи IP з логарифмічним ядром:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} q^m_{n\varepsilon l}(t)\ln|x-t|dt =\ & q^m_{n\varepsilon l}(x)\left[\ln\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)+\sigma_0(\varepsilon)\right]+ \\ &+\sum_{k\ne m}^{N} q^k_{n\varepsilon l}\sigma_0(\varepsilon,\rho_{mk}) - \frac{\varepsilon+1}{4}A^m_{nl} + \\ &+\sum_{j=0}^{l-1}\left\{\sigma_{i-j}(\varepsilon)\frac{1+(-1)^{i-j}}{2}\int_{-1}^{1} q^m_{n\varepsilon j}(t)(x-t)^{l-t}dt + \right.\\ &\left.+\sum_{i\ne m}^{N}\sigma_{i-j}(\varepsilon,\rho_{mi})\int_{-1}^{1} q^m_{n\varepsilon j}(t)(x-t)^{l-t}dt\right\},\end{aligned}$$

тут $|l|\ge 1,\ m=1,\dots,N$.

Власне, для цієї системи вже можна побудувати явний розв'язок, користуючись формулою Карлемана [8]. Та при цьому слід бути уважним до правої частини, де є ще функціонал від невідомих функцій. Покажемо, як треба правильно діяти на прикладі найпростішого і найважливішого випадку, що визначає головне наближення до розв'язку задачі.

При $l = 0$ сума по індексу j є відсутньою, тому в нульовому наближенні маємо

$$\begin{aligned} q^k_{n\varepsilon m}(x) =\ & \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}\times \\ &\times\frac{-\pi}{\ln 2}\left\{q^m_{n\varepsilon 0}\left[\ln\frac{2}{\alpha_n}+\sigma_0(\varepsilon)\right]+\right. \\ &\left.+\sum_{k\ne m}^{N} q^k_{n\varepsilon 0}\sigma_0(\varepsilon,\rho_{mk}) - \frac{\varepsilon+1}{4}\cdot A^m_{n0}\right\},\end{aligned} \tag{2}$$

тут $q^k_{n\varepsilon 0} = \int_{-1}^{1} q^k_{n\varepsilon 0}(t)dt$, а m змінюється від 1 до N.

Коли проінтегруємо цей вираз, то отримаємо

$$q^m_{n\varepsilon 0}\left[\ln\frac{4}{\alpha_n}+\sigma_0(\varepsilon)\right] + \sum_{k\ne m}^{N} q^m_{n\varepsilon 0}\sigma_0(\varepsilon,\rho_{mk}) = \frac{\varepsilon+1}{4}A^m_{n0}.$$

Цю систему відносно $q^m_{n\varepsilon 0}$ можна згорнути, застосовуючи матрично-векторний запис, і подати у наступному вигляді:

$$S_n(\varepsilon)\vec{q}_{n\varepsilon 0} = \frac{\varepsilon+1}{4}\vec{A}^m_{n0}. \tag{3}$$

Тепер виключимо вектор $\vec{A}^m_{n0}$, якщо відняти від цієї системи з $\varepsilon > 1$ систему з $\varepsilon = 1$. В результаті отримаємо

$$S_n(\varepsilon)\vec{q}_{n\varepsilon 0} - \frac{\varepsilon+1}{2}S_n(1)\vec{q}_{n10} = 0.$$

Нарешті скористаємося зв'язком $\vec{q}_{n\varepsilon 0} = \nu_{n0}\vec{q}_{n10}$, де ν_{n0} - стала, що визначає тип квазі-*Т*-хвилі, при цьому вектори $\vec{q}_{n\varepsilon 0}$ та $\vec{q}_{n10}$ визначають розподіл густини струмів на стрічках. Зокрема, стала розповсюдження $h_n \approx k\sqrt{\nu_{n0}}$, а розв'язок системи (1) $\vec{q}_{n\varepsilon}(x) \approx \vec{q}_{n\varepsilon 0}\big/\pi\sqrt{1-x^2}$, що випливає з (2). Таким чином, маємо узагальнену задачу на власні значення та вектори пари симетричних матриць $S_n(\varepsilon)$ та $S_n(1)$:

$$\left[S_n(\varepsilon) - \lambda S_n(1)\right]\vec{q}_{n\varepsilon 0} = 0, \tag{4}$$

де $\lambda = \dfrac{\varepsilon+1}{2\nu_{n0}}$. Цю задачу можна привести до більш простішої проблеми на власні значення та вектори однієї матриці $S_n^{-1}(1)S_n(\varepsilon)$. Матриця $S_n(\varepsilon)$ є симетричною, отже, можна казати про наявність N власних значень, які визначають сталі розповсюдження основних типів квазі-*T*-хвиль, що існують у даній системі МСЛ.

При цьому власні вектори визначають розподіл густини поверхневих зарядів на стрічках з допомогою вектор-функцій $\bar{q}_{n\varepsilon 0}(x) = \dfrac{\bar{q}_{n\varepsilon 0}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

Як і в окремій МСЛ, густина продовжного струму у цьому наближенні є пропорційною вектор-функції $\bar{q}_{n10}(x)$, що визначає густину розподілу зарядів на стрічках у системі без діелектрика, тобто при $\varepsilon = 1$. Це пояснюється тим, що вже квазістатична модель розповсюдження хвиль враховує поперечний струм, тому ведеться мова не про поперечні, а близькі до них електромагнітні поля у даній передфрактальній системі.

3. Породжуючі системи МСЛ. Розглянемо дві найпростіші перед фрактальні системи МСЛ, що відповідають першій стадії творення $(n=1)$ чи утворювачеві певної множини Кантора. Перша з них пов'язана з третинним принципом творення фракталу з розмірністю $d_f = \dfrac{\ln 2}{\ln \kappa}$, де κ - коефіцієнт подібності. Відповідна система складається з двох стрічок, і для неї можна отримати явні вирази власних значень та власних векторів задачі (4), що відповідають парному та непарному типу квазі-*T*-хвилі [9]:

$$\lambda_{\pm} = \frac{a(\varepsilon) \pm b(\varepsilon,\rho)}{a(1) \pm b(1,\rho)}, \tag{5}$$

тут $a(\varepsilon) = \ln\dfrac{4}{\alpha} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} q^m \ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right)$;

$$b(\varepsilon,\rho) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} q^m \ln\frac{4(m+1)^2+\rho^2}{4m^2+\rho^2}.$$

Розрахунок сталих $\nu_{0\pm} = \dfrac{\varepsilon+1}{2\lambda_{\pm}}$ в залежності від ε при $\rho = 4\alpha$ та $\alpha = 0{,}1$ наведений на рис. 2.

Органічні діелектрики, що використовуються в якості основи для стрічкових схем, мають діелектричну сталу в межах від 2 до 16 [10, 11]. При відсутності підкладки сталі є однаковими, коли ж ε − діелектрична стала підкладки зростає, то росте й відмінність між сталими.

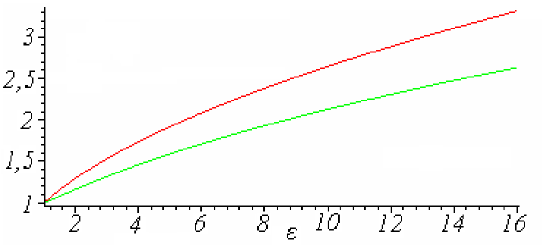

Рис. 2. Графіки залежності сталих $\nu_{0\pm}$ від ε

На рис. 3 приведено розрахунки сталих $\lambda_{\pm}$ в залежності від ε та ρ, при цьому $\alpha = 0{,}1$.

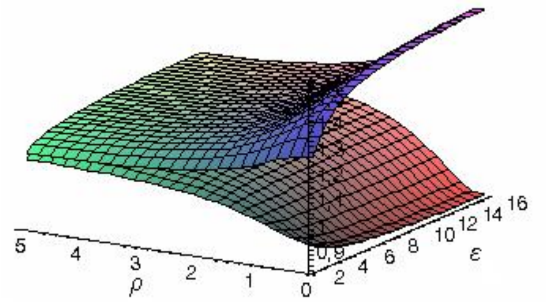

Рис. 3. Графіки залежності сталих $\lambda_{\pm}$ від ε та ρ

Оскільки параметри ρ та α визначають через коефіцієнт подібності розмірність Хаусдорфа $d_f = \dfrac{\ln 2}{\ln \kappa} = \dfrac{\ln 2}{\ln(1+10\rho)}$ самоподібного фракталу, генератором якого є дана пара відрізків, то можна казати про залежність не від ρ при заданому α, а від коефіцієнта подібності чи фрактальної розмірності. Як свідчить графік, відмінність сталих зменшується з ростом відстані між стрічками, чи те ж саме зі зменшенням фрактальної розмірності. Чим більше значення ε − діелектричної сталої підкладки, тим більше різниця між сталими.

Друга система МСЛ пов'язана з генератором множини Кантора, де творення здійснюється за принципом ділення на п'ять і розмірність Хаусдорфа визначається формулою $d_f = \dfrac{\ln 3}{\ln \kappa}$, де κ - коефіцієнт подібності. Характеристичне рівняння системи (4) при $n=1$ є кубічним. З нього досить просто отримати перший корінь λ_1, що співпадає з коренем (5), пов'язаним з непарною квазі-*T*-хвилею, тобто $\lambda_1 = \lambda_-$.

Два інші власні значення є коренями квадратного рівняння

$$(\lambda - \lambda_+)[\lambda a(1) - a(\varepsilon)][a(1) - b(1{,}2\rho)] =$$
$$= 2[\lambda b(1,\rho) - b(\varepsilon,\rho)]^2,$$

тобто їх можна теж виписати в явному вигляді:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^{\,2} - 4a_0c_0}}{2a_0},$$

тут $a_0 = a(1)[a(1) + b(1,2\rho)] - 2b^2(1,\rho);$

$b_0 = 4b(1,\rho)b(\varepsilon,\rho) - 2a(\varepsilon)a(1) -$
$- a(\varepsilon)b(1,2\rho) - a(1)b(\varepsilon,2\rho);$

$c_0 = a(\varepsilon)[a(\varepsilon) + b(\varepsilon,2\rho)] - 2b^2(\varepsilon,\rho).$

Розрахунки власних значень в залежності від ρ при $\varepsilon = 9{,}6$ наведені суцільними лініями на рис. 4. Крапками з тире наведено значення $\lambda_k = \dfrac{a(\varepsilon)}{a(1)}$, до якого прямують λ_κ при зростанні ρ, та крапками наведено графік зміни фрактальної розмірності відповідного самоподібного фрактала.

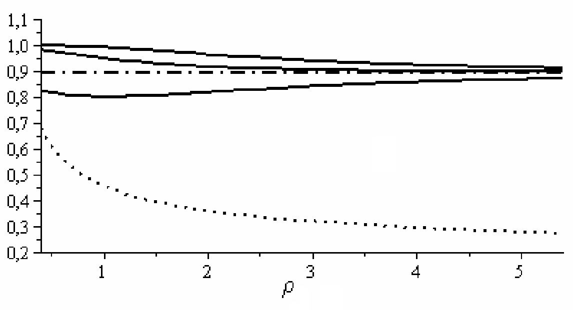

Рис. 4. Графіки залежності λ_κ та d_f від ρ

Отримані три власні значення визначають величини $\nu_{0\kappa} = \dfrac{\varepsilon+1}{2\lambda_\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3$, залежність яких від ρ наведено на рис. 5.

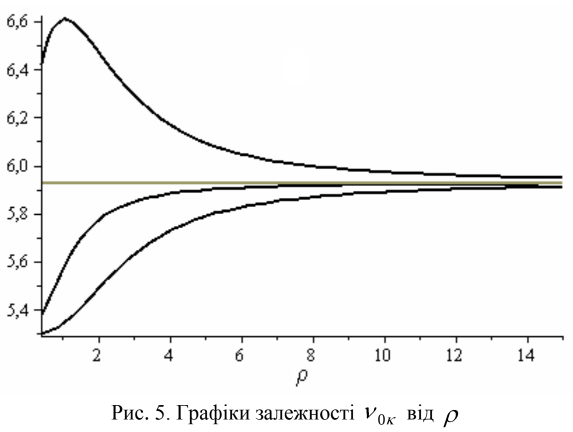

Рис. 5. Графіки залежності $\nu_{0\kappa}$ від ρ

Слід зауважити, що явні формули для найпростіших систем МСЛ використовуються для контролю чисельних розрахунків за більш загальною схемою, наведеною вище. Так, для останнього випадку породжуючої системи МСЛ, що складається з трьох стрічок, спочатку формується симетрична матриця $S_1(\varepsilon)$ розміром 3×3, на діагоналі якої знаходяться вирази $a(\varepsilon)$, решта елементів визначаються сумами $b(\varepsilon,\rho)$ та $b(\varepsilon, 2\rho)$. Потім знаходимо обернену до $S_1(1)$ матрицю та розв'язуємо задачу на власні значення та вектори добутку матриць $S_1^{-1}(1)S_1(\varepsilon)$.

Такий підхід буде застосовуватися для системи МСЛ, що відповідає випадку довільної стадії творення множини Кантора. Матриця $S_n(\varepsilon)$ буде мати чітко виражену блочну структуру подібно тій, що виникає у задачі розсіювання плоскої E-поляризованої електромагнітної хвилі передфрактальною системою циліндричних стрічок [6]. Нагадаємо про структуру $S_2(\varepsilon)$ матриці 9×9, що складається з 9-ти блоків. Діагональні блоки повністю повторюють матрицю $S_1(\varepsilon)$, але з параметрами $\alpha_2 = \dfrac{\alpha}{k}$ та $\rho_2 = \dfrac{\rho}{k}$.

Блоки B_{12}, B_{21}, B_{23} та B_{32} однакові й мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \sigma_0(\rho_1) & \sigma_0(\rho_1+\rho_2) & \sigma_0(\rho_1+2\rho_2) \\ \sigma_0(\rho_1-\rho_2) & \sigma_0(\rho_1) & \sigma_0(\rho_1+\rho_2) \\ \sigma_0(\rho_1-2\rho_2) & \sigma_0(\rho_1-\rho_2) & \sigma_0(\rho_1) \end{pmatrix},$$

відповідно $B_{13} = B_{31}$ та дорівнюють

$$\begin{pmatrix} \sigma_0(2\rho_1) & \sigma_0(2\rho_1+\rho_2) & \sigma_0(2\rho_1+2\rho_2) \\ \sigma_0(2\rho_1-\rho_2) & \sigma_0(2\rho_1) & \sigma_0(2\rho_1+\rho_2) \\ \sigma_0(2\rho_1-2\rho_2) & \sigma_0(2\rho_1-\rho_2) & \sigma_0(2\rho_1) \end{pmatrix}.$$

Матриця є симетричною, й відповідна узагальнена задача на власні значення визначає сталі $h_\kappa \approx k\sqrt{\nu_{0\kappa}}$ 9-ти типів майже поперечних хвиль. Значення $\nu_{0\kappa}$ зі зменшенням фрактальної розмірності все менше різняться між собою. Так, наприклад, для системи МСЛ, половина якої наведена на рис. 1, у випадку коли $d_f = 1/2(\kappa = 9)$ $\nu_{01} \approx 6{,}599$, $\nu_{02} \approx 5{,}495$, $\nu_{03} \approx 5{,}322$, $\nu_{04} \approx 5{,}301$, решта значень з точністю 10^{-6} дорівнює 5,3.

Висновки. В результаті поєднання теорії самоподібних фракталів та методів обчислення електромагнітних характеристик основної квазі-T-хвилі в стрічкових лініях передачі проведено дослідження передфрактальної системи відкритих МСЛ. Показана можливість застосування асимптотичних методів до розрахунку характеристик квазі-T-хвиль у системі МСЛ, що

відповідає довільній стадії творення МК-фракталу. Детально досліджені породжуючі системи МСЛ, де розв'язок задачі існування квазі-T-хвиль має явний вигляд. Приведено чисельні розрахунки сталих розповсюдження можливих квазі-T-хвиль у вигляді графіків залежності від діелектричної сталої підкладки та фрактальної розмірності відповідного самоподібного фракталу.

1. *Jaggard D. L.* Fractal Electrodynamics: wave Interaction with Discretely Self-Similar Structures // Symmetry in Electrdynamics / Ed. by C. Baum, H.N. Kritikos. - L.: Taylor and Francis, 1995. - P.231-281.
2. *Кравченко В. Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. - М.: Радиотехника, 2003. - 512 с.
3. *Потапов А. А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. - М.: Логос, 2002. - 664 с.
4. *Пащенко Р. Э.* Основы теории формирования фрактальных сигналов. - Харьков: ХООО "НЭО ЭкоПерспектива", 2005. - 296 с.
5. *Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* Полосковые линии передачи. - М.: Наука, 1980. - 312 с.
6. *Кошовий Г. І.* Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2007. - 12, № 3. - С.451-455.
7. *Кошевой Г. И., Сологуб В. Г.* Дисперсия квази-T-волн в многополосковой линии. - Харьков, 1986. - 39 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т радиофизики и электрон. №322).
8. *Гахов Ф. Г.* Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
9. *Кошевой Г. И.* Дисперсионные характеристики квази-T-волн в системах открытых микрополосковых линий с узкими полосками // Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых волн: Сб. науч. тр. - Киев: Наук. думка, 1986. - С.22-28.
10. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств / Под ред. В. И. Вольмана. - М.: Радио и связь, 1982. - 328 с.
11. *Болотов В. Н., Ткач Ю. В.* Генерирование сигналов с фрактальными спектрами // Журн. техн. физики. - 2006. - 76, № 4. - С.91-98.

INVESTIGATION OF THE MAIN QUASI-T-WAVES IN PREFRACTAL MICROSTRIP LINES' SYSTEM

A. G. Koshovy, G. I. Koshovy

The main quasi transverse electro magnetic waves are examined for prefractal system of micro strip lines. The problem is formulated in the form of the first kind integral equations` system with electro static kernels. Making use of the narrow strips approach the problem has been transformed to the eigenvalues` problem for two symmetrical matreses. The simplest systems with correspond to self similar fractals` generator with changing dimension are considered in details. Effective numerical algorithm has been developed and used for calculation of the main electro magnetic characteristics. Numerical results are presented as well.

Key words: fractals, electromagnetic, numerical methods, modeling.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КВАЗИ-T-ВОЛН В ПРЕДФРАКТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МИКРОПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ

А. Г. Кошевой, Г. И. Кошевой

Проводится исследование основних почти поперечных электромагнитных волн в предфрактальной системе микрополосковых линий. Задача поставлена в виде системы интегральных уравнений первого рода с электростатическими ядрами. Применяя узкополосковый подход задача приведена к решению обощенной проблемы собственных значений пары симметричных матриц. В деталях рассматриваются простейшие системы, которые соответствуют порождающим самоподобных фракталов с переменной размерностью. Разработан эффективный алгоритм вычисления основных электромагнитных характеристик предфрактальных систем и приведены численные расчёты.

Ключевые слова: фракталы, электромагнетизм, численные методы, моделирование.

Рукопись поступила 8 января 2008 г.