http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.05.013

УДК 517.95

А. М. Гомилко, член-корреспондент НАН Украины **А. Н. Трофимчук**

Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства
НАН Украины, Киев

E-mail: alex@gomilko.com, itelua@kv.ukrtel.net

Классическая задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом

Доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле в классической постановке для однородного бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, задача Дирихле, полуполоса.

Пусть вещественная функция $l(y) \in C^2[-1,1]$, с условиями $l(\pm 1) = 0$ и $l'(\pm 1) = 0$. В полуполосе

$$\Pi = \{(x,y)\colon x > l(y), |y| < 1\}$$

с криволинейным торцом $\Gamma = \{x = l(y), |y| < 1\}$ рассматривается в классической постановке [1, с. 357] граничная задача Дирихле для однородного бигармонического уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta^2 u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Pi, \qquad u \in C^4(\Pi) \bigcap C^1(\overline{\Pi}),\\ &u(x,\pm 1) = u'_y(x,\pm 1) = 0, \qquad x > 0,\\ &u|_\Gamma \equiv u(l(y),y) = f(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma \equiv \frac{u'_x(l(y),y) - l'(y)u'_y(l(y),y)}{(1 + l'^2(y))^{1/2}} = g(y), \qquad |y| \leqslant 1,\\ &\lim_{x\to\infty} \max_{|y|\leqslant 1}\{|u(x,y)| + |u'_x(x,y)|\} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

На функции f, g накладываются естественные условия

$$f \in C^1 = C^1[-1,1], \qquad g \in C = C[-1,1], \qquad f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, искомое решение u, в отличие от обобщенной постановки задачи Дирихле (см., например, [2]), предполагается четырежды непрерывно дифференцируемым в Π и непрерывно дифференцируемым в замыкании $\overline{\Pi}$ полуполосы. Введем норму $C^1(\overline{\Pi})$:

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Pi})} = \sup_{(x,y)\in\overline{\Pi}} \{|u(x,y)| + |\nabla u(x,y)|\} < \infty.$$

В работе доказывается однозначная разрешимость граничной задачи (1). В частности, для функций u, удовлетворяющих (1), установлена справедливость принципа максимума Миранды–Агмона [3, 4]

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Pi})} \leqslant c\{\|f\|_{C^1[-1,1]} + \|g\|_{C[-1,1]}\}. \tag{3}$$

Принцип максимума Миранды–Агмона и его обобщения для решений бигармонического уравнения в ограниченных областях с кусочно-гладкой границей рассмотрены в [5].

Используемый здесь метод сведения проблемы (1) к системе интегральных уравнений на отрезке (или на кривой Γ) был использован в статье [6] и возник на основе анализа метода Шермана–Лауричеллы [7, гл. 4], используемого при исследовании плоских задач теории упругости в ограниченных областях. С другой стороны, для избавления от необходимости удовлетворения граничным условиям из (1) на боковых сторонах и на бесконечности, следуя [8], мы используем функцию Грина для бигармонического уравнения в полосе $|y| < 1$ с однородными граничными условиями при $y = \pm 1$.

Введем в рассмотрение пучок обыкновенных дифференциальных операторов

$$\mathcal{L}(\lambda)z(y) = z^{(4)}(y) - 2\lambda^2 z^{(2)}(y) + \lambda^4 z(y), \qquad |y| \leqslant 1, \qquad z(\pm 1) = z'(\pm 1) = 0,$$

где $\lambda \in \mathrm{C}$. Пусть функция

$$\Delta(\lambda) = \sinh^2\lambda\cosh^2\lambda - \lambda^2.$$

Для функции Грина $G(y,t;\lambda)$, $-1 \leqslant y,\, t \leqslant 1$ обыкновенного дифференциального оператора $\mathcal{L}(\lambda)$, согласно [9, § 3], имеем выражение

$$\begin{aligned}4\lambda^3 G(y,t;\lambda) &= \lambda|y-t|\cosh\lambda(y-t) - \sinh\lambda|y-t| + \\ &+ [\cosh\lambda y((\sinh^2\lambda - \lambda^2)\cosh\lambda t - \lambda t\sinh^2\lambda\sinh\lambda t) - \\ &\quad - \lambda y\sinh\lambda y(\sinh^2\lambda\cosh\lambda t + \lambda t\sinh\lambda t)]/\Delta_1(\lambda) + \\ &+ [\sinh\lambda y(-(\cosh^2\lambda + \lambda^2)\sinh\lambda t + \lambda t\cosh^2\lambda\cosh\lambda t) + \\ &\quad + \lambda y\cosh\lambda y(\cosh^2\lambda\sinh\lambda t - \lambda t\cosh\lambda t)]/\Delta_2(\lambda).\end{aligned} \tag{4}$$

При фиксированных y, t функция $G(y,t;\lambda)$ является четной мероморфной по $\lambda \in \mathrm{C}$ функцией с простыми полюсами $\pm\lambda_k$, где λ_k — корни $\Delta(\lambda)$ с $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$. Другие элементарные аналитические свойства и оценки функции $G(y,t;\lambda)$ и ее производных приведены в [6]. Отметим, что функция

$$F(x-x',y;y') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(y,y';s)e^{i(x-x')}ds, \qquad (x,y) \neq (x',y'),$$

является функцией Грина для бигармонического уравнения в полосе $|y| < 1$ с однородными граничными условиями Дирихле.

По функции Грина G определим при $y \neq t$ функции

$$\begin{aligned}H_1(y,t;\lambda) &= 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2\right)G(y,t;\lambda), \\ H_2(y,t;\lambda) &= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2\right)G(y,t;\lambda), \\ H_3(y,t;\lambda) &= 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3\lambda^2\right)G(y,t;\lambda).\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим равенства $H_j(y,t;0) = y(3-y^2)/2 - \operatorname{sign}(y-t)$, $j = 1, 3$.

Пусть функции

$$Q_1(x,y;t) = \frac{\operatorname{sign}(y-t)}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty H_1(y,t;s)\frac{\sin s(x-l(t))}{s}ds +$$

$$+ \frac{l'(t)}{\pi}\int\limits_0^\infty H_2(y,t;s)\cos s(x-l(t))\,ds,$$

$$Q_2(x,y;t) = l'(t)\frac{\operatorname{sign}(y-t)}{2} + \frac{l'(t)}{\pi}\int\limits_0^\infty H_3(y,t;s)\frac{\sin s(x-l(t))}{s}ds + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty H_2(y,t;s)\cos s(x-l(t))\,ds,$$

где $(x,y)\in\Pi$. Отметим, что для любого $t\in(-1,1)$ функции $Q_k(x,y;t)$ являются бигармоническими в Π, причем

$$Q_k(x,\pm1;t) = \frac{\partial Q_k}{\partial y}(x,\pm1;t) = 0, \qquad x>0, \qquad k=1,2. \tag{7}$$

Решение граничной задачи (1) ищем в виде

$$u = \Phi[q](x,y) := \int\limits_{-1}^1 Q_1(x,y;t)q_1(t)dt + \int\limits_{-1}^1 Q_2(x,y;t)q_2(t)dt, \qquad q=\{q_1,q_2\}\in\mathcal{B}, \tag{8}$$

где банахово пространство

$$\mathcal{B} = \left\{(q_1,q_2)\in C_0\oplus C_0\colon \int\limits_{-1}^1 (q_1(t)+l'(t)q_2(t))dt = 0\right\},$$

$$C_0 = C_0[-1,1] = \{p\in C\colon p(\pm1)=0\}.$$

Можно доказать, что для любой вектор-функции $q=\{q_1,q_2\}\in\mathcal{B}$ функция $\Phi[q]$ бесконечно дифференцируема при $x>l(y)$, $|y|\leqslant 1$, является бигармонической в Π, удовлетворяет однородным граничным условиям из (1) на боковых сторонах полуполосы и на бесконечности, причем справедлива оценка

$$\sup_{(x,y)\in\Pi}\{|\Phi[q](x,y)| + |\nabla\Phi[q](x,y)|\} \leqslant c\|q\|_{\mathcal{B}}, \tag{9}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от $q\in\mathcal{B}$.

Таким образом, для определения неизвестной вектор-функции $q\in\mathcal{B}$ из (8) требуется выполнить для $\Phi[q]$ граничные условия из (1) на торце полуполосы. При этом граничные условия на торце удобно записать в виде

$$u'_y(l(y),y) = h_1(y), \qquad u'_x(l(y),y) = h_2(y),$$

где функции

$$h_1(y) = [f'(y) - l'(y)(1 + l'^2(y))^{1/2} g(y)](1 + l'^2(y))^{-1},$$
$$h_2(y) = [l'(s) f'(y) + (1 + l'^2(y))^{1/2} g(y)](1 + l'^2(y))^{-1}. \tag{10}$$

На этом пути, используя известные свойства потенциала двойного слоя (см. [10, с. 452]), можно показать, что функция $u = \Phi[q]$, $q \in \mathcal{B}$, является решением граничной задачи (1) в том и только том случае, когда вектор-функция $q = \{q_1, q_2\}$ является решением системы линейных интегральных уравнений

$$q + Aq = h, \tag{11}$$

где $A = \{A_{nk}\}_{n,k=1}^2$, причем

$$(A_{11}q_1)(s) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial Q_1}{\partial y}(l(s), s; t) q_1(t)\, dt, \qquad (A_{12}q_2)(s) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial Q_2}{\partial y}(l(s), s; t) q_2(t)\, dt,$$

$$(A_{21}q_1)(s) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial Q_1}{\partial x}(l(s), s; t) q_1(t)\, dt, \qquad (A_{22}q_2)(s) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial Q_2}{\partial x}(l(s), s; t) q_2(t)\, dt,$$

а правая часть $h = \{h_1, h_2\} \in \mathcal{B}$ определяется согласно выражениям (10). При этом линейный оператор A непрерывно действует в пространстве $\mathcal{B}$.

Можно доказать, что оператор A имеет вид $A = T + K$, где линейный интегральный оператор K непрерывно действует из пространства $C \oplus C$ в пространство $C^1 \oplus C^1$ и, в частности, является вполне непрерывным оператором в $C \oplus C$, а оператор $T = \{T_{nk}\}_{n,k=1}^1$, причем $T_{11} = T_{22} = 0$ и

$$(T_{12}p)(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1-s)(1-t)(2-s-t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2)^2} dt - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1+s)(1+t)(2+s+t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2+s+t)^2)^2} dt,$$

$$(T_{21}p)(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1-s)^2(2-s-t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2)^2} dt - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1+s)^2(2+s+t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2+s+t)^2)^2} dt.$$

Операторы T_{12}, T_{21} непрерывно действуют в пространстве C, и, используя результаты Радона [11, п. 90] об операторах в пространстве непрерывных функций, показываем, что оператор A является фредгольмовым оператором с нулевым индексом в пространстве $\mathcal{B}$. Здесь важное значение имеет априорная информация о дифференциальных свойствах решений этого уравнения при $s \to \pm 1$. Для получения такой информации используется техника интегрального преобразования Меллина (см. аналогичные рассмотрения в [6, п. 4]). Таким образом, уравнение (11) является однозначно разрешимым в $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение не имеет нетривиальных решений в пространстве $\mathcal{B}$. На этом пути устанавливается, что уравнение (11) является однозначно разрешимым в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ и для его решений верна оценка

$$\|q\|_{\mathcal{B}} \leqslant c \|h\|_{\mathcal{B}}, \tag{12}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от вектора $h \in \mathcal{B}$.

Устанавливая однозначность решения граничной задачи (1) и используя (9), (12), получаем следующий основной результат работы.

Теорема. *Для любых функций f, g, удовлетворяющих условиям* (2)*, существует и является единственным решение $u \in C^4(\Pi) \bigcap C^1(\overline{\Pi})$ граничной задачи* (1)*. Это решение имеет вид $u = \Phi[q]$ с вектор-функцией $q \in \mathcal{B}$, однозначно определяемой из уравнения* (11) *с правой частью $h = \{h_1, h_2\}$, заданной* (10)*. Существует такая постоянная $c > 0$, что для решений граничной задачи* (1) *выполняется оценка* (3).

Используя теорему и соответствующие рассуждения из работы [6], можно показать, что для решений граничной задачи (1) выполняется оценка

$$\begin{aligned} &|u(x,y)| + |\nabla u(x,y)| \leqslant c\{\|f\|_{C^1} + \|g\|_C\} \exp(-\delta x), \\ &x \geqslant 0, \qquad |y| \leqslant 1, \qquad \delta = \min_{k=1,2,\dots} \operatorname{Im} \lambda_k, \end{aligned} \tag{13}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от граничных данных f, g, удовлетворяющих условиям (2). Оценка (13) уточняет принцип максимума (3), с учетом наличия в области Π бесконечно удаленной точки.

Отметим, что постановка условия на бесконечности из (1) допускает и другие, менее ограничительные, варианты (см. [12]). В идейном плане основной момент проведенных рассмотрений при сведении граничной задачи (1) к системе интегральных уравнений состоит в построении функций $Q_j(x, y; t)$, $j = 1, 2$, а именно в перенесении конструкции Шермана–Лауричеллы на случай полуполосы. (Относительно других способов сведения граничных задач для бигармонического уравнения в областях с конечной границей к граничным интегральным уравнениям см. [13, § 2].)

Проведенные рассмотрения могут быть обобщены на случай функции $l(y)$ с более общими условиями, чем $l \in C^2$, $l(\pm 1) = l'(\pm 1) = 0$. Для этого следует привлечь результаты Радона и их обобщения, связанные с теорией логарифмического потенциала [14, 15, гл. 4].

Цитированная литература

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, вып. 3. – С. 3–76.
3. *Agmon S.* Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1957. – **66**, No 2. – P. 77–88.
4. *Miranda C.* Theorema del massimo modulo e theorema di esistenza ediunicata per il problema Dirichlet relative alle equazioni ellitiche in due variabili // Ann. Math. Pure Appl. – 1958. – **46**. – P. 265–311.
5. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. – 1978. – **81**. – S. 25–82.
6. *Гомилко А. М.* Классическая задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**. – С. 228–237.
7. *Партон В. З., Перлин В. И.* Интегральные уравнения теории упругости. – Москва: Наука, 1977. – 312 с.
8. *Gregory R. D.* The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite “strip”, existence of solution, and completeness of the Papkovich–Fadle eigenfunctions // J. Elasticity. – 1980. – **10**, No 3. – P. 295–327.
9. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
11. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир, 1979. – 592 с.

12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 5. – С. 1154–1165.
13. *Мазья В. Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 27. – Москва: ВИНИТИ, 1988. – С. 131–228.
14. *Радон И.* О краевых задачах для логарифмического потенциала // Успехи мат. наук. – 1946. – **1**, вып. 3–4. – С. 96–124.
15. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи. – Москва: Наука, 1975. – 295 с.

References

1. *Fridman A.* Partial Differential Equations of Parabolic Type, Moscow: Mir, 1968 (in Russian).
2. *Kondrat'ev V. A., Oleinik O. A.* Uspehi Mat. Nauk, 1983, **38**, No 3: 3–76 (in Russian).
3. *Agmon S.* Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **66**, No 2: 77–88.
4. *Miranda C.* Ann. Math. Pure Appl., 1958, **46**: 265–311.
5. *Maz'ja V. G., Plamenevskii B. A.* Math. Nachr., 1978, **81**: 25–82 (in Russian).
6. *Gomilko A. M.* Differential Equations, 1998, **34**, No 2: 231–241.
7. *Parton V. Z., Perlin P. I.* Integral equations in elasticity theory, Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
8. *Gregory R. D.* J. Elasticity, 1980, **10**, No 3: 295–327.
9. *Naimark M. A.* Linear differential operators, Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).
10. *Vladimirov V. S.* Equations of Mathematical Physics, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
11. *Riesz F., Szökefalvi-Nagy B.* Functional Analysis, Moscow: Mir, 1979 (in Russian).
12. *Oleinik O. A., Iosif'jan G. A.* Sibirskij Mat. Zh., 1978, **19**, No 5: 1154–1165 (in Russian).
13. *Maz'ya V. G.* Boundary integral equations, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., Vol. 27, Moscow: VINITI, 1988: 131–228 (in Russian).
14. *Radon I.* Uspehi Mat. Nauk, 1946, **1**, No 3–4: 96–124 (in Russian).
15. *Danilyuk I. I.* Nonregular boundary value problems in the plane, Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).

Поступило в редакцию 19.10.2015

О. М. Гомілко, член-кореспондент НАН України **О. М. Трофимчук**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ
E-mail: alex@gomilko.com, itelua@kv.ukrtel.net

Класична задача Діріхле для бігармонічного рівняння в півсмузі з криволінійним торцем

Доведена однозначна розв'язність задачі Діріхле в класичній постановці для однорідного бігармонічного рівняння у півсмузі з криволінійним торцем.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, задача Діріхле, півсмуга.

A. M. Gomilko, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. N. Trofimchuk**

Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: alex@gomilko.com, itelua@kv.ukrtel.net

Classical Dirichlet problem for the biharmonic equation in a semistrip with curvilinear end

We prove the unique solvability of the Dirichlet problem in a classical formulation for the homogeneous biharmonic equation in a semistrip with curvilinear end.

Keywords: biharmonic equation, Dirichlet problem, semistrip.