УДК 622.625.28-592.112

А.Н. Коптовец

РАЗРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОРМОЗНОГО МЕХАНИЗМА С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНОСТИ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА

Разработана динамическая модель тормоза использует колебательную систему с двумя степенями свободы. Колесо вращается со скоростью по заданному закону, влияние тормозного усилия на скорость колеса не учитывается. Возможности аналитических методов исследования ограничены системами с одной степенью свободы, поэтому актуальной является разработка вычислительных алгоритмов для компьютерного моделирования и анализ колебательных процессов с трением методом вычислительного эксперимента.

РОЗРОБКА ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ГАЛЬМІВНОГО МЕХАНІЗМУ З УРАХУВАННЯМ ДИСКРЕТНОСТІ ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ

Розроблена динамічна модель гальма використовує коливальну систему з двома ступенями свободи. Колесо обертається зі швидкістю за заданим законом, вплив гальмівного зусилля на швидкість колеса не враховується. Можливості аналітичних методів дослідження обмежені системами з одним ступенем свободи, тому актуальною є розробка обчислювальних алгоритмів для комп'ютерного моделювання та аналіз коливальних процесів з тертям методом обчислювального експерименту.

DEVELOPMENT OF DYNAMIC MODEL OF BRAKING GEAR INVOLVING FRICTIONAL CONTACT INCREMENT

Dynamic brake model uses vibratory system with two degrees of freedom is developed. A wheel turns round with preset speed, and effect of brake power on the wheel speed is not involved. Systems with one degree of freedom set a limit to analytical research; that's why it is vital to develop computational algorithm for computer simulation as well as analysis of oscillating processes with friction using computational experiment.

ВВЕДЕНИЕ

Имеется ряд теорий, объясняющих причину наблюдаемой разницы между статическим и кинетическим трением, вместе с тем единое мнение относительно механизма, лежащего в основе этого явления, отсутствует [1].

В ранних работах [2, 3], посвященных исследованию фрикционных автоколебаний, в качестве основных причин такой разности рассматривались падение силы трения скольжения при увеличении относительной скорости скольжения и рост сил трения покоя в зависимости от продолжительности неподвижного контакта при совместном движении соприкасающихся поверхностей. Позднее были проведены многочисленные экспериментальные исследования [4, 5], подтверждающие гипотезу, что основной причиной разницы между статическим и кинетическим трением несмазанных поверхностей являются колебания тел в плоскости, перпендикулярной к плоскости скольжения, и предложен ряд математических моделей, описывающих возникновение и взаимодействие нормальных и тангенциальных автоколебаний.

В работе [6] возникновение нормальных колебаний объясняется столкновением микронеровностей контактирующих поверхностей при взаимных тангенциальных смещениях. В [7] на основе модели, в которой предполагалось наличие феноменологической нелинейной вязко-упругой зависимости между сближением тел и силой контакта, рассмотрена классическая система: ползун, скользящий с трением по движущейся ленте транспортера, растягивает горизонтальную пружину. Рассмотренная система допускала перемещения ползуна в двух направлениях (вертикальном и горизонтальном). В результате численного моделирования установлено, что возможно наблюдать автоколебания ползуна и при отсутствии локального максимума, соответствующего трению покоя. В работе [8] в явном виде вводятся в рассмотрение функции, описывающие шероховатость контактирующих поверхностей, и на основе результатов вычислительного эксперимента сделан вывод, что учет шероховатостей поверхностей и вертикальных колебаний ползуна позволил установить возможность реализации фрикционных автоколебаний в чисто упругой системе, в которой не вводится искусственная разница между статическим и динамическим коэффициентами трения. В [9] предложена математическая модель фрикционных колебаний, обусловленных деформированием шероховатостей контактирующих поверхностей, трение между которыми описывается законом Амонтона, и разработан вычислительный алгоритм для исследования взаимодействия нормальных и тангенциальных колебаний методом установления. Взаимодействие нормальных и тангенциальных фрикционных колебаний колодки колесного тормоза подвижного состава рельсового транспорта шахт при наличии конструктивных связей исследовано в работе [10].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В качестве расчетной схемы тормоза рассмотрим простейшую колебательную систему с двумя степенями свободы (рис. 1), состоящую из колодки массой m, скользящей по колесу радиуса R, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω, и упругодемпфирующего элемента Фойхта, жесткость и коэффициент вязкости которого обозначим c и b соответственно. Кривизной поверхностей колодки и колеса будем пренебрегать. К колодке приложено внешнее постоянное усилие Q, прижимающее ее к колесу. Номинальная площадка контакта колодки и колеса имеет форму прямоугольника со сторонами $2a$ и e. Область фактического контактного взаимодействия дискретна и состоит из совокупности пятен контакта. Причиной возникновения дискретности контакта является шероховатость контактирующих поверхностей.

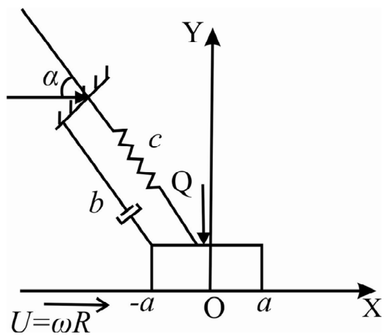

Рис. 1. Расчетная схема динамической модели тормозного механизма

Упругодемпфирующий элемент моделирует конструктивную связь тормозного механизма, действующую в направлении под углом $\alpha \le 90^{\circ}$ к плоскости трения. Отметим, что именно наличие в рассматриваемой модели такой связи приводит к координатной взаимосвязи нормальных и тангенциальных колебаний колодки.

Введем абсолютную систему координат OXY таким образом, что направление оси OX совпадает с направлением тангенциальных колебаний колодки, а направление оси OY – с направлением ее нормальных колебаний. Положение колодки определяется ее координатами $\{x(t), y(t)\}$. Введем также две локальные системы координат $O_s\xi_s\eta_s$, $s = 1, 2$ для колодки и колеса соответственно.

Считается, что колодка и колесо абсолютно жесткие, однако каждая контактирующая поверхность покрыта деформируемым шероховатым слоем, состоящим из линейно-упругих пружин одинаковой жесткости k различной высоты. В локальных системах координат $O_s\xi_s\eta_s$, $s = 1, 2$ шероховатые поверхности колодки и колеса описываются соответственно функциями:

$$f_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^{N_1} g_i^{(1)} sin\left(\omega_i^{(1)}\xi_1\right);$$

$$f_2(\xi_2) = \sum_{i=1}^{N_1} g_i^{(2)} sin\left(\omega_i^{(2)}\xi_2\right),$$

где $g_i^{(1)}$, $\omega_i^{(1)}$, $i = \overline{1, N_1}$ – коэффициенты, описывающие шероховатую поверхность колодки; $g_i^{(2)}$, $\omega_i^{(2)}$, $i = \overline{1, N_2}$ – коэффициенты, описывающие шероховатую поверхность колеса.

В процессе относительного движения колодки и колеса происходит смятие микронеровностей. В первом приближении нормальную компоненту локальных сил взаимодействия микронеровностей будем считать пропорциональной величине их взаимного перекрытия. Тогда нормальная компонента F_y усилия контактного взаимодействия колодки и колеса определяется следующим образом:

$$F_y(x,y) = \int_{-a}^{a} ke\left(f_2(\xi + x - Ut) - f_1(\xi) - y\right) \times$$

$$\times H\left(f_2(\xi + x - Ut) - f_1(\xi) - y\right) d\xi\,, \quad (1)$$

где $H(s)$ – функция Хевисайда [11], определяемая как

$$H(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s > 0; \\ 0, & \text{если } s \le 0. \end{cases}$$

Трение между контактирующими поверхностями описывается одночленным законом Амонтона, который запишем в следующей форме:

$$|F_x| \le \varphi F_y\,; \quad (2)$$

$$|F_x| < \varphi F_y \Rightarrow \dot{x} = U\,; \quad (3)$$

$$|F_x| = \varphi F_y \Rightarrow \frac{F_x}{|F_x|} = -\frac{\dot{x} - U}{|\dot{x} - U|}\,, \quad (4)$$

где F_x – сила трения; φ – коэффициент трения; $U = \omega R$ – скорость движения поверхности колеса.

Отметим, что соотношение (3) выполняется при сцеплении колодки и колеса, а соотношение (4) – при их взаимном скольжении.

Особенностью закона трения (2) – (4) является его «пороговый» характер: взаимное скольжение начинается не при любом значении F_x, а лишь при достижении силой трения определенного порога, равного φF_y. Отмеченная особенность значительно усложняет построение решений рассматриваемого класса задач. Поэтому в работах [8, 11] вводились дополнительные упрощения, в частности, снятие порога (3) по началу скольжения приводило к закону «жидкого» трения, по существу, – к гидродинамической модели, в которой всегда

$$|F_x| = \varphi F_y\,.$$

Таким образом, динамическое поведение рассматриваемой системы описывается следующей системой уравнений:

$$m\ddot{x}+(b\dot{x}+cx)\beta_{cc}-(b\dot{y}+cy)\times$$

$$\times\beta_{cs}-F_x=0\,; \qquad (5)$$

$$m\ddot{y}+(b\dot{y}+cy)\beta_{ss}-(b\dot{x}+cx)\times$$

$$\times\beta_{cs}-F_y+Q=0\,, \qquad (6)$$

где $\beta_{cc}=cos^2\alpha$; $\beta_{ss}=sin^2\alpha$;

$\beta_{cs}=cos\,\alpha\,sin\,\alpha$.

Учитывая, что для моделирования фрикционных колебаний используется метод установления, начальные условия примем следующими

$$x(0)=0\,,\ \dot{x}(0)=0\,;$$

$$y(0)=0\,,\ \dot{y}(0)=0\,.$$

Задача состоит в определении закона движения колодки $\{x(t),\,y(t)\}$ с учетом связанности тангенциальных и нормальных колебаний.

Для разработки вычислительного алгоритма решения сформулированной выше динамической задачи с трением используется вариационный подход [12 – 14]. Пусть $\{u,v\}$ – возможные перемещения колодки; $\{\delta x,\delta y\}=\{u-x,v-y\}$ – вариации компонент перемещений колодки; $\{\delta\dot{x},\delta\dot{y}\}=\{\dot{u}-\dot{x},\dot{v}-\dot{y}\}$ – вариации компонент скорости колодки. Сложив уравнения (5) и (6), умноженные на соответствующие вариации компонент скорости, получим

$$\big(m\ddot{x}+(b\dot{x}+cx)\beta_{cc}-(b\dot{y}+cy)\beta_{cs}-F_x\big)(\dot{u}-\dot{x})+$$

$$+\big(m\ddot{y}+(b\dot{y}+cy)\beta_{ss}-(b\dot{x}+cx)\beta_{cs}-F_y+Q\big)(\dot{v}-\dot{y})=0. \qquad (7)$$

Соотношение (7) выражает принцип возможных мощностей для рассматриваемой системы.

Представим последнее из равенств (4) в виде

$$F_x|\dot{x}-U|+|F_x|(\dot{x}-U)=0. \qquad (8)$$

Соотношение (8) выполняется и при сцеплении колодки с колесом, поскольку в этом случае $\dot{x}=U$. Временно предположим, что скорость $\dot{u}$ также удовлетворяет условию (8). Вычитанием находим, что

$$F_x\big(|\dot{u}-U|-|\dot{x}-U|\big)+|F_x|(\dot{u}-\dot{x})=0\,.$$

Следовательно,

$$F_x(\dot{u}-\dot{x})=-|F_x|\big(|\dot{u}-U|-|\dot{x}-U|\big). \qquad (9)$$

Правая часть полученного равенства оценивается снизу величиной

$$-\varphi F_y\big(|\dot{u}-U|-|\dot{x}-U|\big).$$

В самом деле, если даже $|F_x|=\varphi F_y$, то имеет место равенство; если же $|F_x|<\varphi F_y$, то $\dot{x}=U$ и правая часть формулы (9) положительна, следовательно

$$F_x(\dot{u}-\dot{x})\ge-\varphi F_y\big(|\dot{u}-U|-|\dot{x}-U|\big). \qquad (10)$$

Докажем теперь, что оценка (10) имеет место для произвольной возможной скорости $\dot{u}$. С этой целью изучим знак выражения

$$A=F_x(\dot{u}-\dot{x})+\varphi F_y\big(|\dot{u}-U|-|\dot{x}-U|\big).$$

Заметим, прежде всего, что при $|F_x|<\varphi F_y$ выполняется $\dot{x}=U$; следовательно, в этом случае

$$A=F_x(\dot{u}-U)+\varphi F_y|\dot{u}-U|\ge$$

$$\ge F_x(\dot{u}-U)+|F_x||\dot{u}-U|\ge 0\,,\ \forall\dot{u}\,.$$

Если же $|F_x| = \varphi F_y$, то

$$A = F_x(\dot{u} - U) - F_x(\dot{u} - U) +$$

$$+|F_x||\dot{u} - U| - |F_x||\dot{u} - U|.$$

С учетом (14), получим

$$A = F_x(\dot{u} - U) + |F_x||\dot{u} - U| \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, с учетом оценки (10), решение $\{x, y\}$ системы уравнений (5) – (6) удовлетворяет неравенству

$$(m\ddot{x} + (b\dot{x} + cx)\beta_{cc} - (b\dot{y} + cy)\beta_{cs})(\dot{u} - \dot{x}) + \varphi F_y(x, y)(|\dot{u} - U| - |\dot{x} - U|) +$$

$$+ (m\ddot{y} + (b\dot{y} + cy)\beta_{ss} - (b\dot{x} + cx)\beta_{cs} - F_y(x, y) + Q)(\dot{v} - \dot{y}) \geq 0, \ \forall\{u, v\}. \quad (11)$$

Используя терминологию, введенную в работах Ж.-Л. Лионса и его учеников [15], неравенство (11) можно отнести к типу квазивариационных вследствие того, что нормальное усилие F_y, определяемое по формуле (1), зависит от перемещений колодки $\{x(t), y(t)\}$.

ВЫВОДЫ

Разработана математическая модель фрикционных колебаний в тормозном механизме, обусловленных деформированием шероховатых контактирующих поверхностей, трение между которыми описывается законом Амонтона. Получена вариационная формулировка в виде квазивариационного неравенства динамической задачи для колебательной системы с двумя степенями свободы при наличии вязкого и сухого трения Амонтона и деформировании шероховатых контактирующих поверхностей.

В качестве динамической модели рассмотрена простейшая система с двумя степенями свободы. Установлено, что в рассматриваемой системе возможно возникновение фрикционных автоколебаний при отсутствии разницы между статическим и динамическим коэффициентами трения.

Нормальные вынужденные колебания возбуждаются кинематически от дискретности контакта с равновесной шероховатостью от износа. Тангенциальными колебаниями являются: составляющие нормальных колебаний от конструктивных связей в тормозном механизме, фрикционные от нормальных переменных усилий по закону трения Амонтона-Кулона, фрикционные автоколебания от разницы между статическим, кинетическим и динамическим коэффициентами трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по триботехнике. Т. 3. Теоретические основы / под общ. ред. М. Хебты, А.В. Чичинадзе. – М.: Машиностроение, 1989. – 400 с.

2. Кайдановский Н.Л. Механические релаксационные колебания / Н.Л. Кайдановский, С.Э. Хайкин // ЖТФ. – 1933. – Т. III, вып. 1. – С. 91 – 109.

3. Манько Н.Н. Трение и износ тормозных колодок подвижного состава с учетом режимов торможения / Н.Н. Манько // Изв. вузов. Гор. журн. – 1971. – № 12. – С. 102 – 104.

4. О величине коэффициента трения при малых скоростях скольжения / Новиков Е.Е., Смирнов В.К., Стаховский Е.А. [и др.] // Теория и расчет горных машин. – К., 1982. – С. 39 – 51.

5. Ишлинский А.Ю. О скачках при трении / А.Ю. Ишлинский, И.В. Крагельский // ЖТФ. – 1944. – Т. XIV, Вып. 4 – 5. – С. 276 – 283.

6. Кудинов В.А. Трение и колебания // Трение, изнашивание и смазка: справочник: в 2 т. / В.А. Кудинов, Д.М. Толстой; под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. – С. 11 – 22.

7. Martins J.A.C. A study of static and kinetic friction / J.A.C. Martins, J.T. Oden, F.M.E. Simoes // Int. J. Engng. Sci. – 1990. – Vol. 28, № 1. – P. 29 – 92.

8. Бородич Ф.М. Фрикционные автоколебания, обусловленные деформированием контактирующих поверхностей / Ф.М. Бородич, И.В. Крюкова // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, №. 6. – С. 67 – 73.

9. Бобылёв А.А. Математическая модель фрикционных автоколебаний, обусловленных деформированием шероховатостей контактирующих поверхностей / А.А. Бобылёв, А.Н. Коптовец // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Д.: Наука і освіта, 2006. – Вип. 7. – С. 11 – 21.

10. Коптовец А.Н. Взаимодействие нормальных и тангенциальных фрикционных автоколебаний при наличии конструктивных связей / А.Н. Коптовец, А.А. Бобылёв // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2007. – № 3(48). – С. 97 – 100.

11. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

12. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

13. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения / П. Панагиотопулос. – М.: Мир, 1989. – 492 с.

14. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: МГАПИ, 1997. – 340 с.

15. Lions J.-L. Surface problems: Methods of variational and quasivariational inequalities / J.-L. Lions // Lect. Notes in Math. Syst. – 1975. – № 461. – P. 129 – 148.

ОБ АВТОРАХ

Коптовец Александр Николаевич – д.т.н., профессор кафедры транспортных систем и технологий Национального горного университета.