

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТНЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТЕРЖНЕЙ И РАМ

С помощью автоматных методов получены аналитические решения для изгибно-продольных колебаний протяженной рамной конструкции с произвольными граничными условиями. Проведена декомпозиция автоматов на компоненты по видам колебаний, составлены таблицы переходов состояний подсистем, выполнен численный анализ спектра частот регулярной стержневой системы, построен график-номограмма собственных значений в зависимости от числа пролетов, номера формы колебаний и отношения жесткостей стоек и ригеля рамы.

За допомогою автоматних методів отримані аналітичні рішення для згинально-поздовжніх коливань протяжної рамної конструкції з довільними граничними умовами. Проведено декомпозицію автоматів на компоненти по видах коливань, складені таблиці переходів станів підсистем, виконаний чисельний аналіз спектра частот регулярної стержневої системи, побудований графік-номограма власних значень залежно від числа прольотів, номера форми коливань і відношення жорсткостей стійок і ригеля рами.

By automaton methods analytical solutions are got for the flexurally-longitudinal vibrations of extensive frame construction with arbitrary boundary conditions. The decomposition of automata into components by the types of vibrations is conducted, the tables of jumps of the states of subsystems are made, the numerical analysis of spectrum of frequencies of the regular cored system is executed, and the nomographic chart of eigenvalues is built depending on the number of bays, mode shape number and frame leg / frame girder stiffness ratio.

Рассматривается один из возможных вариантов совместных колебаний в плоскости протяженной рамной конструкции, состоящей из прямых стержней с жесткими узловыми соединениями. В таких системах простые виды колебаний являются зависимыми друг от друга и могут быть разложены на два направления: поперечное и продольное, причем величины тех и других перемещений вполне сопоставимы. Решение задачи о совместных колебаниях в точной постановке представляет значительные трудности, что приводит либо к использованию приближенных методов и расчетных схем, либо к изучению каждого из видов колебаний в отдельности. Как правило, при составлении частотных уравнений учитывают только поперечные колебания, предполагая, что стойки и ригели рамы не изменяют своей длины. Применение автоматных методов допускает точное математическое описание совместных колебаний в рамных системах, практически не меняя основные алгоритмы расчета, принятые для одномерных конструкций [1].

Разделим рамную систему на характерные блоки (подсистемы) и их отдельные элементы-стержни (рис. 1).

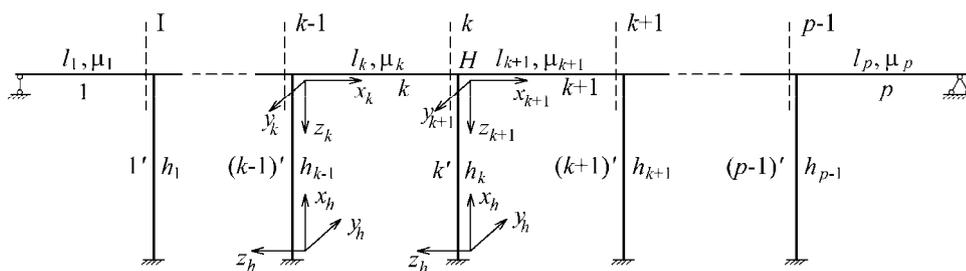


Рис. 1

Представим также топологическую модель рамы в виде конечного не-тривиального автомата AL и последовательно связанных подавтоматов A_1 ,

A_2, \dots, A_p , моделирующих отдельные блоки системы при изгибно-продольных колебаниях стержневой рамы.

Совокупность значений всех выходов f_z автомата A определяется выходами подавтоматов A_1, A_2, \dots, A_p , представленными ассоциированными матрицами $V_1, Y_2, \dots, Y_{p-1}, \tilde{V}_p$ каждого из p участков системы. В этом случае уравнение частот можно выразить в форме (1), в которой ассоциированные матрицы относятся не к отдельным стержням, а к выделенным на рис. 1 блокам рамной системы.

$$V_1 \prod_{k=2}^{p-1} Y_k \tilde{V}_p = 0, \quad (1)$$

где V_1 и \tilde{V}_p – матрица-строка и матрица-столбец 1-го и p -го участков.

Предположим, что ригель рамы совершает только изгибные колебания в плоскости xz ($EF_k \rightarrow \infty; \lambda_{xk} \rightarrow 0$), а стойки – продольные колебания вдоль оси x_h ($EI'_{yk} \rightarrow \infty; \lambda'_{zk} \rightarrow 0$). Такой моделью может быть представлен, например, мост с неразрезными пролетными строениями, опирающимися через шарниры на опоры, расположенные на неподвижном основании.

Разделение графа G_{zk} участка системы на подсистемы возможно путем рассечения связей между граничными параметрами ригеля u_k, q_k и стойки u'_k, q'_k (рис. 2, а). Далее, с учетом соотношений [2] для связанных вершин графа G_{zk} можно выполнить анализ состояний I, II подграфов ${}^1G_{zk}$ и ${}^2G_{zk}$ (рис. 2, б, в) и с помощью таблицы переходов автомата A_1 (табл. 1) определить коды характеристических функций f_z .

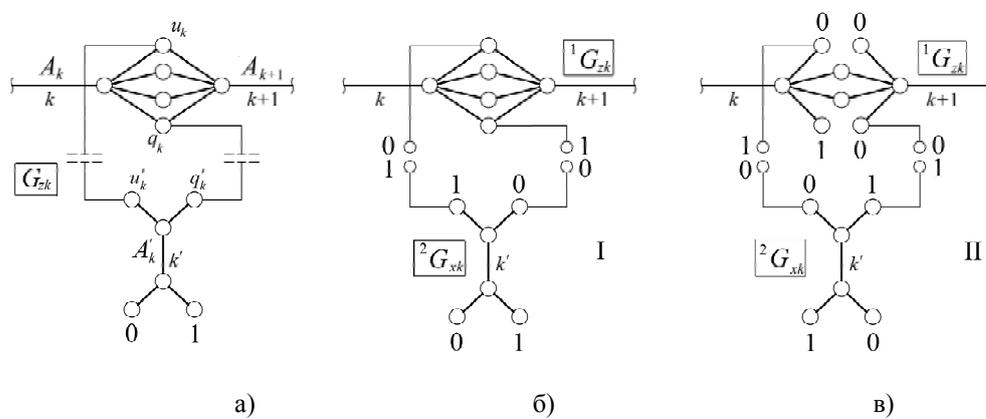


Рис. 2

Так как рассматривается только часть системы, то выражение для ассоциированной матрицы участка Y_k , учитывающей наличие стойки на левом конце, можно представить в виде

$$Y_k = V({}^1G_{zk})\tilde{V}({}^2G_{zk}). \quad (2)$$

Таблица 1

s_v x_v		I			II		
		k	$k+1$	k'	k	$k+1$	k'
НП	К	–	a b	1	–	0 b	0
	С	–	c d	0	–	c 1	1
КП	К	a b	–	0	0 b	–	0
	С	c d	–	1	c 1	–	1

В первом состоянии подграфа ${}^1G_{zk}$ возможные сочетания кодов НП и КП k - го или $(k+1)$ - го стержней формируют матрицу M_z обычного участка балки [2], а во втором – лишь две ее строки, соответствующие кодам 0101 и 0011. Поэтому для матрицы $V({}^1G_{zk})$ можно записать

$$V({}^1G_{zk}) = \left\| \begin{array}{c|c} M_z & M_z^c \\ \hline & \end{array} \right\|. \quad (3)$$

Для стержня-стойки k' первое состояние ${}^2G_{xk}$ характеризуется кодом 10/01, второе – 01/01. Используя кодированную матрицу [1], определяем элементы матрицы-столбца $\tilde{V}({}^2G_{xk})$

$$\tilde{V}({}^2G_{xk}) = \left\{ \cos \lambda'_{kx} \quad \frac{1}{\alpha'_k \lambda'_{xk}} \sin \lambda'_{xk} \right\}. \quad (4)$$

После подстановки (3), (4) в (2) получим:

$$Y_k = M_z \cos \lambda'_{xk} + M_z^c \frac{\sin \lambda'_{xk}}{\alpha'_k \lambda'_{xk}}. \quad (5)$$

Вектор V_1 в выражении (1) определяется строкой матрицы M_z с кодом 0101, соответствующим условию шарнирного опирания начала 1-го стержня (рис.1), а вектор \tilde{V}_p – столбцом матрицы Y_k (код 0101) в зависимости от условий закрепления конца p - го стержня рамы.

Очевидно, что при $l'_k \rightarrow 0$ приходим к ассоциированной матрице Y_k для участка балки, в k - м сечении которого размещена упругая опора относительно вертикальных перемещений в плоскости xz жесткостью c_k

$$Y_k = M_z + c_k M_z^c. \quad (6)$$

Если положить $l_k \rightarrow 0$, то матрица Y_k преобразуется в ассоциированную матрицу опоры I_{ck} , упругой относительно поперечных перемещений [3], которую представим в блочной форме

$$I_{ck} = \begin{bmatrix} E & I_{12} \\ [0] & E \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где E – единичная матрица третьего порядка, $I_{12} = \begin{bmatrix} 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & c_k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Тогда выражение (6) можно представить в более простом виде

$$Y_k = I_{ck} M_z. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим задачу расчета изгибных колебаний ригеля и стоек p -пролетной рамы с несмещающимися узлами, т.е. без учета продольных колебаний. В этом случае связанными граничными параметрами в узлах рамы будут значения углов поворота φ_k , φ'_k , и изгибающих моментов m_k , m'_k . Состояния подграфов ${}^1G_{zk}$ и ${}^2G_{zk}$ представлены на рис. 3.

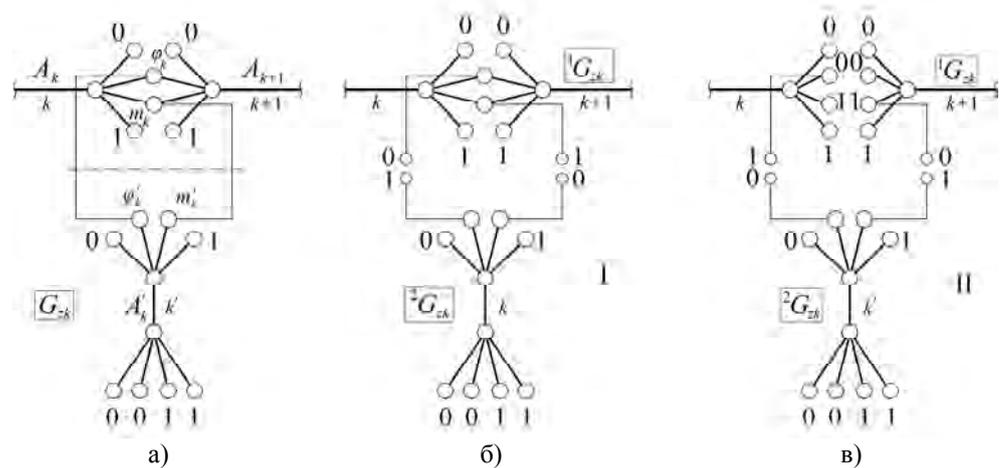


Рис. 3

Таблица переходов автомата A_2 (табл. 2) будет содержать некоторые особенности только для сечения, в котором стыкуются стержни ригеля k , $k+1$ и стойки k' . Как обычно, в табл. 2 сопрягаемые параметры обозначены одинаковыми буквенными символами.

Таблица 2

		s_v		I			II		
				k	$k+1$	k'	k	$k+1$	k'
НП	К	–	0 b	0 1	–	0 0	0 0		
	С	–	c 1	0 1	–	1 1	1 1		
КП	К	0 b	–	0 0	0 0	–	0 0		
	С	c 1	–	1 1	1 1	–	1 1		

Для матриц $V({}^1G_{zk})$ и $V({}^2G_{zk})$, входящих в выражение, аналогичное (2), можно записать

$$V({}^1G_{zk}) = \|v_I \quad v_{II}\|; \quad \tilde{V}({}^2G_{zk}) = \left\| \begin{matrix} v'_I \\ v'_{II} \end{matrix} \right\|. \quad (9)$$

Пользуясь соотношениями кодов табл. 2 несложно составить выражения для элементов v_I, v_{II} при состояниях I, II подграфа ${}^1G_{zk}$ и элементов v'_I, v'_{II} при тех же состояниях подграфа ${}^2G_{zk}$ (символом ' помечены параметры стойки).

$$v_I = \left\| \begin{matrix} \frac{l_k^3 A_z}{EI_y \lambda_z^3} & \frac{l_k^3 B_z}{\lambda_z^2} \\ \frac{l_k^4 G_z}{(EI_y)^2 \lambda_z^4} & \frac{l_k^3 A_z}{EI_y \lambda_z^3} \end{matrix} \right\|; \quad v_{II} = \left\| \begin{matrix} \frac{l_k^4 G_z}{(EI_y)^2 \lambda_z^4} & \frac{l_k^3 A_z}{EI_y \lambda_z^2} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Для элементов v'_I и v'_{II} матрицы-столбца $\tilde{V}({}^2G_{zk})$ можно записать

$$v'_I = \frac{(l'_k)^3 A'_z}{EI'_y (\lambda'_z)^3}; \quad v'_{II} = \frac{(l'_k)^4 G'_z}{(EI'_y)^2 (\lambda'_k)^4}.$$

Очевидно, что изменение граничных условий закрепления стержней-стоек рамы приводит только к изменениям функций v'_I и v'_{II} , которые соответствуют двум последним элементам столбцов табл. 2 и кодами НП 0101 и 0011.

Содержание матрицы-строки V_I в выражении (1) зависит от граничных параметров начала 1-го стержня и определяется двумя первыми элементами строк табл. 2 с кодами КП 0011 и 0101. Соответственно, элементы матрицы-столбца \tilde{V}_p зависят от условий закрепления концов p -го стержня ригеля рамы и $(p-1)'$ -го стержня-стойки. Определение этих элементов по табл. 2 не представляет затруднений.

Аналогичным образом описываются продольные колебания ригеля и изгибные стоек рамы. Связи между зависимыми параметрами u_k, u'_k и q_k, q'_k , а также состояния подграфов ${}^1G_{xk}$ и ${}^2G_{zk}$ приведены на рис. 4.

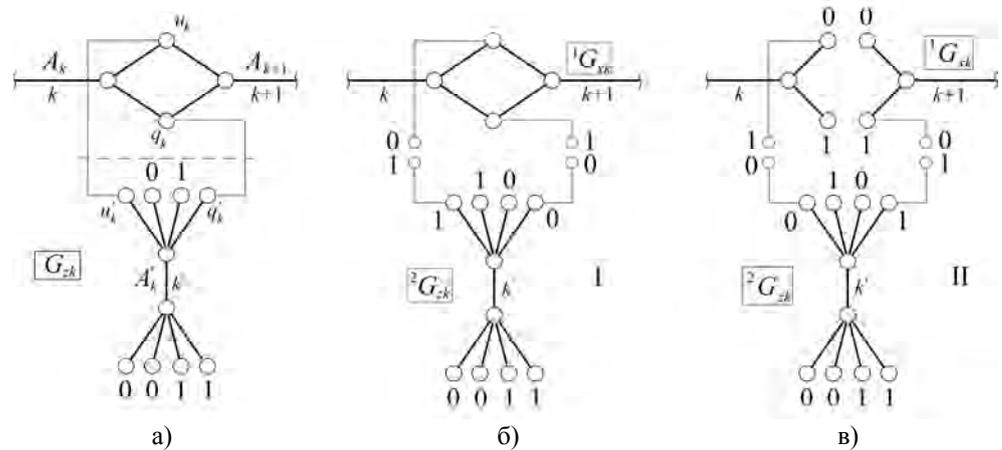


Рис. 4

Состояния k -й подсистемы и сопрягаемые входные параметры стержней представлены в таблице переходов автомата A_3 (табл. 3).

Таблица 3

		s_v	I			II		
			k	$k+1$	k'	k	$k+1$	k'
НП	К	–	a	1	–	0	0	
	С	–	d	0	–	1	0	
КП	К	a	–	0	0	–	0	
	С	d	–	1	1	–	1	

Выражение для ассоциированной матрицы k -го участка Y_k определяется произведением векторов $V({}^1G_{xk})$ и $\tilde{V}({}^2G_{zk})$, для которых в соответствии с кодами табл. 3 можно записать

$$V({}^1G_{zk}) = \left\| \begin{array}{c|c} M_x & M_{01}^{(1)} \\ \hline & \end{array} \right\|, \quad (10)$$

где M_x – ассоциированная матрица для продольных колебаний обычного участка балки [1], $M_{01}^{(1)}$ – матрица, состоящая из первой строки матрицы M_x с функциями кодов 01 и остальными нулевыми элементами.

$$\tilde{V}({}^2G_{zk}) = \left\{ E'_{zk} \frac{(l'_k)^3 A'_{zk}}{EI'_y (\lambda'_{zk})^3} \right\}. \quad (11)$$

После простых преобразований получим

$$Y_k = M_x E'_{zk} + M_{01}^{(1)} \frac{(l'_k)^3 A'_{zk}}{EI'_y (\lambda'_{zk})^3}. \quad (12)$$

Таким образом, применение конечных автоматов позволяет свести расчет пространственных колебаний рамно-неразрезной конструкции к многократно повторяемому циклу логических операций, соответствующих переходу от одного участка системы к другому. Решение получается в точной форме в виде последовательного набора однотипных кодированных ассоциированных матриц, эффективно реализуемых с помощью ЭВМ.

В результате расчета регулярной рамной конструкции с защемленными концами и характеристиками пролетов $h = 3l/4$; $\mu_k = \mu_{k'}$ на рис. 5 представлен график-номограмма собственных значений λ в зависимости от числа пролетов p , отношения жесткостей стоек и ригеля рамы c_1, c_2, c_3 от 0 до ∞ и номера формы колебаний i .

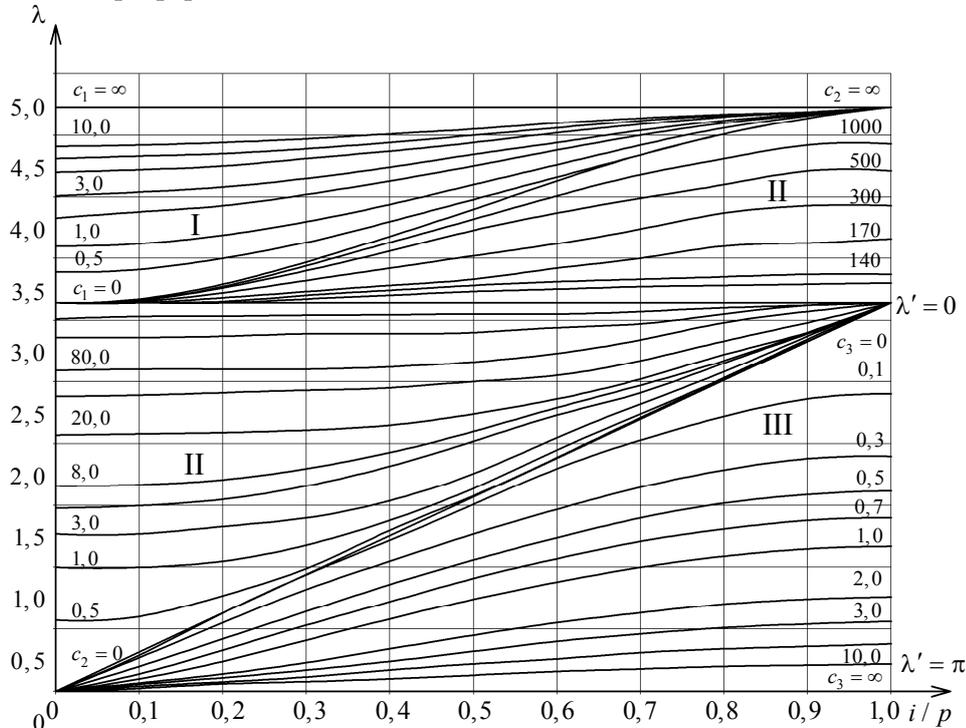


Рис. 5

Как и в случае неразрезных балок с упругими связями, для нахождения величины λ по графикам на рис. 5 необходимо интервал по оси абсцисс между крайними границами спектра частот разделить на количество пролетов рамы. Ординаты точек пересечения прямых линий, параллельных оси ординат, с соответствующей кривой дают значения частотного параметра λ первой зоны сгущения.

Верхняя часть графика (I) соответствует спектру частот изгибных колебаний ригеля и стоек рамы с несмещающимися узлами, средняя часть (II) характеризует изгибные колебания ригеля и продольные стоек, а нижняя (III) – продольные ригеля и изгибные стоек рамы. Отмеченные спектры частот при изгибно-продольных свободных колебаниях регулярной рамы дополняют друг друга с последующим чередованием для второй и выше зон сгущения.

Как и в случае неразрезных балок на упругих опорах [4], для регулярных многопролетных рам можно выделить подспектры или области равных частот. Например, для рассмотренной выше рамной конструкции с количеством пролетов $p = 40$ на рис. 6 приведены графики изменения значений λ при различных соотношениях жесткостей ригеля и стоек рамы.

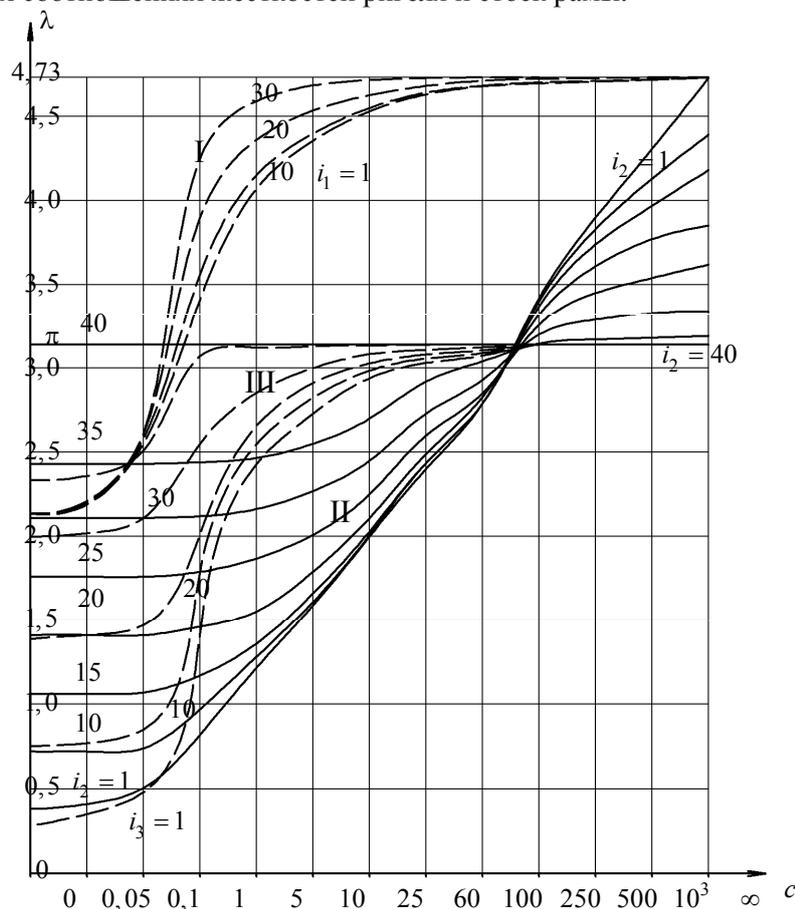


Рис. 6

Полученные графические зависимости позволяют достаточно быстро определить подспектры равных частот, соответствующие различным формам колебаний многопролетной рамы. Наиболее плотный частотный спектр соответствует значению λ , равному π .

Предложенный подход к расчету комбинированных колебаний рамной конструкции позволяет провести декомпозицию автоматов на компоненты путем рассечения связей между зависимыми граничными параметрами по видам колебаний с последующим переходом от анализа состояний простых

систем к составлению матричного уравнения для всей соединенной системы. При этом декомпозиция автоматов, как правило, приводит к достаточно простым подсистемам, не требующим составления таблиц переходов с детальным описанием кодов. Очевидные преимущества этого подхода проявляются при анализе многомерных стержневых систем с учетом нескольких видов колебаний.

1. *Распопов А. С.* Применение конечных автоматов к расчету пространственных колебаний рамных мостов / *А. С. Распопов* // Баштові споруди : матеріали, конструкції, технології. Зб. наук. праць // Вісн. Донбаської нац. акад. будівн. та архітект. – 2007. – Вип. 6 (68). – С. 73 – 79.
2. *Распопов А. С.* Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций / *А. С. Распопов* // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вип. 19. – С. 125 – 133.
3. *Ивович В. А.* Переходные матрицы в динамике упругих систем : Справочник / *В. А. Ивович*. – М. : Машиностроение, 1981. – 183 с.
4. *Распопов А. С.* Применение логических моделей к расчету колебаний неразрезных мостовых конструкций / *А. С. Распопов* // 6th Int. Conf. «Modern Building Materials, Structures and Techniques» : Procs. (Vilnius, Lithuania. 19 – 21 May, 1999). – Vilnius Gediminas Technical University 1999. – Vol. III. – С. 223 – 228.

Днепропетровский национальный
университет железнодорожного
транспорта имени академика В. Лазаряна

Получено 24.07.09,
в окончательном варианте 24.07.09