УДК 519.6

О. М. Литвин[*], д-р. фіз.-мат. наук
Л. С. Лобанова[*], канд. фіз.-мат. наук
Ю. І. Першина[**], канд. фіз.-мат. наук
О. В. Ткаченко[***]
О. О. Черняк[*]

[*] Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, E-mail: academ@kharkov.ua)
[**] Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»
(м. Харків, E-mail: yulia_pershina@mail.ru)
[***] ДП «Запорізьке машинобудівне конструкторське бюро
«Прогрес» імені академіка А. І. Івченка»

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ ПОВЕРХНІ 3D ТІЛА

Пропонується новий метод опису поверхонь тривимірних тіл, які не можна описати в циліндричній системі координат. Метод застосовується до математичного моделювання поверхні пера лопатки авіадвигуна за відомими дискретними даними.

Предлагается новый метод описания поверхностей трехмерных тел, которые нельзя описать в цилиндрической системе координат. Метод применяется к математическому моделированию поверхности пера лопатки авиадвигателя по известным дискретным данным.

Вступ

Як відомо, математичною моделлю поверхні тривимірного тіла в параметричній формі називають опис поверхні у вигляді

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D.. \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

Найбільш відомими параметричними рівняннями є рівняння в циліндричній системі координат

$$\begin{cases} x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \\ y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

та в сферичній

$$\begin{cases} x = x(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = y(r,\varphi,\theta) = r\sin\varphi\cos\theta, \quad . \\ z = z(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

На практиці виникають задачі, в яких опис поверхні не може бути виконаний за допомогою вказаних систем координат. У зв'язку з цим використовуються ряд інших систем координат (біполярні, тороїдальні, еліпсоїдальні тощо).

Дана робота присвячена розробці та дослідженню методу опису поверхонь тривимірних тіл, які не можна описати в циліндричній системі координат, але в параметричній формі такий опис можна виконати. В основі розробленого в даній статті методу лежать такі умови:

- інформація про поверхню задається на системі перерізів тіла площинами, паралельними координатним площинам, у вигляді набору точок на лініях перетину;
- істотною є можливість використання як рівномірного, так і нерівномірного розміщення точок на лініях перетину, що у випадку нерівномірного розміщення точок приводить до недоцільності використання базисних сплайнів з рівномірно розміщеними вузлами сплайнів;
- в деяких випадках необхідно задовольняти відповідні технологічні вимоги (поверхня в деяких частинах має бути опуклою або вгнутою, в деяких точках зростати або спадати у відповідному напрямку), тобто математична модель повинна допускати збереження ізогеометрії.

1. Постановка проблеми

Вважаємо відомими набори точок $(X_{i,j}\ Y_{i,j}\ Z_{i,j})$, $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N$ на системі ліній, що отримуються в результаті перетину тіла площинами $z = z_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$ (можливе використання однієї множини перетинів, або двох, або трьох множин у взаємно перпендикулярних площинах). За цими даними треба побудувати математичну модель поверхні тривимірного тіла в параметричному вигляді.

1.1. Аналіз літератури

Іноді поверхня не може бути описана однозначно в явній формі $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, оскільки на ній можна знайти декілька множин точок, які проектуються в одну і ту ж точку площини Oxy. Але таку поверхню завжди можна розбити на окремі частини, кожну з яких можна описати однозначно в явній формі. Неявне задання такої поверхні у вигляді рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ вимагає інформації про її структуру побудови за допомогою декількох класичних поверхонь (сфера, еліпсоїд, циліндр, конус, параболоїд, гіперболоїд тощо).

В роботі [1] авторами запропоновано для створення математичної моделі поверхні використовувати R-функції [2]. Цей метод є загальним, але потребує інколи додаткових теоретичних або експериментальних досліджень, які дозволяють встановити аналітичний вигляд поверхонь, за допомогою яких можна з необхідною точністю апроксимувати відповідні частини поверхні тривимірного тіла.

В роботі [3] запропоновано і досліджено метод опису поверхонь тривимірних тіл, які однозначно можуть бути описані в циліндричній системі координат. Серед таких поверхонь можна назвати поверхню манекена в швейній промисловості, поверхню деяких частин корпусів літаків, ракет тощо. Але вказаним методом не можна описати поверхню пера деяких лопаток, що використовуються в авіадвигунах.

В роботі [4] запропоновано загальний метод побудови базисних поліноміальних сплайнів степеня n, заданих явними виразами на нерегулярній сітці вузлів. Дякуючи тому, що ці сплайни виражаються простими формулами (поліномами) на кожному інтервалі їх задання, вони мають ряд переваг порівняно із аналогічними сплайнами, описаними в монографії К. Де Бора, оскільки вимагають меншої кількості арифметичних операцій для обчислення. Ці сплайни використовуються також у даній роботі.

1.2. Мета дослідження

Метою роботи є побудова і дослідження методу опису поверхні тривимірного тіла, які не можна описати в циліндричній системі координат, та його застосування до опису в параметричній формі поверхні пера лопатки авіадвигуна.

2. Деякі допоміжні твердження

Базисний сплайн 2-го степеня дефекту 1 на довільній сітці вузлів $-\infty < X_0 < X_1 < X_2 < X_3 < \infty$ має вигляд $(y = (y_1, y_2))$

$$S_2(x,X) = SS_2(x,X,y)\left(\int_{X_0}^{X_3} SS_2(x,X,y)dx\right)^{-1}$$

$$SS_2(x,X,y) = \begin{cases} 0, & x \le X_0,\ x \ge X_3, \\ \dfrac{(x-X_0)^2}{2(X_1-X_0)} y_1, & X_0 < x \le X_1, \\ \dfrac{(X_2-X_0)}{2} y_1 + \dfrac{(x-X_2)^2}{2(X_1-X_2)} y_1 + \dfrac{(x-X_1)^2}{2(X_2-X_1)} y_2, & X_1 < x \le X_2, \\ \dfrac{(X_2-X_0)}{2} y_1 + \dfrac{(X_3-X_1)}{2} y_2 + \dfrac{(x-X_3)^2}{2(X_2-X_3)} y_2, & X_2 < x \le X_3 \end{cases} \qquad (1)$$

$$(X_2 - X_0)y_1 + (X_3 - X_1)y_3 = 0, \qquad y_1 = 1.$$

Аналітичний вираз параметричної кривої, заданої точками (X_k, Y_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, шукається у вигляді сплайнів

$$SSX(x,X,CX) = \sum_{k=0}^{n+1} SS_2(x,X,k)\cdot CX_k, \qquad SSY(y,Y,CY) = \sum_{k=0}^{n+1} SS_2(y,Y,k)\cdot CY_k.$$

де невідомі CX_k, CY_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ знаходяться з умов найкращого (в сенсі методу найменших квадратів) задовільнення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} SSX(X_p, X, CX) = X_p \\ SSY(Y_p, Y, CY) = Y_p, \qquad p = 0,1,\ldots n+1. \end{cases}$$

3. Основні твердження статті

В даній роботі для апроксимації пропонується використовувати B-сплайни [5] другого степеня з нерівномірним розподілом вузлів сплайна, які визначаються рівностями (1).

Тоді дану функцію $f(x, y)$ можна наблизити біквадратичним сплайном (квадратичним за кожною змінною)

$$SpX_{M,N}(t,z,CX) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} CX_{k,j} S_2(t,(t_k,t_{k+1},t_{k+2},t_{k+3})) S_2(z,(z_j,z_{j+1},z_{j+2},z_{j+3})),$$

коефіцієнти $CX_{i,j}$ якого знаходимо з умови

$$SpX_{M,N}(t_p, z_q, CX) = X_{p,q}, \qquad p = 1,2,\ldots M, \quad q = 1,2,\ldots N.$$

В результаті для знаходження невідомих $CX_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AX_{p,q,i,j} CX_{i,j} = X_{p,q}, \qquad p = 1,2,\ldots M, \quad q = 1,2,\ldots N, \qquad (2)$$

де $AX_{p,q,i,j} = S_2(t_p,(t_i,t_{i+1},t_{i+2},t_{i+3})) S_2(z_q,(z_j,z_{j+1},z_{j+2},z_{j+3}))$.

Зауваження 1. Враховуючи, що в роботі пропонується використовувати B-сплайни 2-го порядку, задані явними виразами на кожному інтервалі розбиття, для обчислення значень $S_2(t_p,(t_i,t_{i+1},t_{i+2},t_{i+3}))$ та $S_2(z_q,(z_j,z_{j+1},z_{j+2},z_{j+3}))$ достатньо врахувати, що

$$S_2(t_p,\{t_i,t_{i+1},t_{i+2},t_{i+3}\}) = \begin{cases} 0, & p \ne i+1,\ p \ne i+2, \\ 1, & p = i+1, \\ -\dfrac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & p = i+2. \end{cases}$$

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2011, Т. 14, № 1

Зауваження 2. Якщо перетин поверхні площиною $z = z_k$ є замкнутою кривою, то будемо шукати відповідний сплайн у вигляді

$$SX_{M,N}(t,z,CX)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=1}^{N}CX_{i,j}S_2(t,(t_i,t_{i+1},t_{i+2},t_{i+3}))S_2(z,(z_j,z_{j+1},z_{j+2},z_{j+3}))$$

і вибираємо сталі $CX_{i,j}$ з умови $\left.\frac{\partial SX}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\ z=z_j}}=\left.\frac{\partial SX}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_M\\ z=z_j}}$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Аналогічно знаходимо $CY_{i,j}$ у сплайні

$$SY_{M,N}(t,z,CY)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=1}^{N}CY_{i,j}S_2(t,(t_i,t_{i+1},t_{i+2},t_{i+3}))S_2(z,(z_j,z_{j+1},z_{j+2},z_{j+3}))$$

з умов

$$SpY_{M,N}(t_p,z_q,CY)=Y_{p,q},,\quad p = 1, 2, \ldots, M,\quad q = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial SY_{M,N}}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\ z=z_j}}=\left.\frac{\partial SY_{M,N}}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_M\\ z=z_j}},\quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Теорема. Математична модель поверхні тривимірного тіла, яка в параметричній формі подається

$$\begin{cases} x = SX_{M,N}(t,z,CX)\\ y = SY_{M,N}(t,z,CY)\\ z = z\end{cases} \tag{4}$$

де t – параметр, $0 \le t \le 1$, має такі властивості:

1. $SX_{M,N}(t,z,CX), SY_{M,N}(t,z,CY) \in C^1(R^2)$;
2. $SX_{M,N}(x_p,z_q,CX)=X_{p,q}$, $p = 1, 2, \ldots, M$, $q = 1, 2, \ldots, N$;

$SY_{M,N}(y_j,z_q,CY)=Y_{j,q}$, $j = 1, 2, \ldots, M$, $q = 1, 2, \ldots, N$..

Доведення. Перша властивість випливає з того, що при побудові сплайнів $SX_{M,N}$ та $SY_{M,N}$ використовувались лінійні комбінації базисних сплайнів за змінними t і z, які належать до класу $C^1(R)$. Властивості 2 випливають з того, що для знаходження CX та CY потрібно було розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2) і (3).

Теорема доведена.

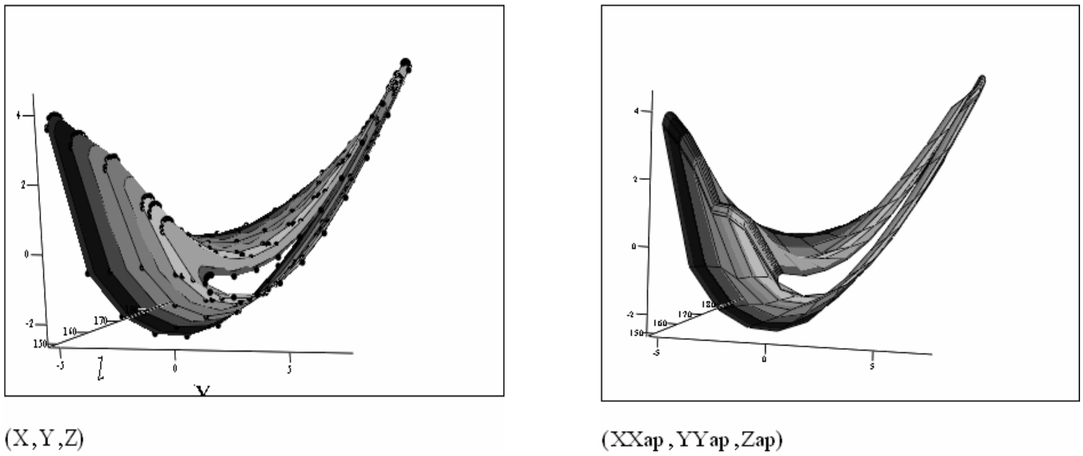
Форма (4) задання поверхні дозволяє дослідити області опуклості (вгнутості), напрями монотонного зростання (спадання) поверхні.

4. Обчислювальний експеримент

Застосуємо розглянуту вище теорію до математичного моделювання поверхні пера лопатки авіадвигуна за відомими дискретними даними.

Як вхідні дані використаємо координати ($x_{k,l}$, $y_{k,l}$), $k = 1, 2, \ldots, 33$, $l = 1, 2, \ldots, 7$ (таблиця) точок на лініях перетинів поверхні пера лопатки авіадвигуна площинами $z = z_l$, $l = 1, 2, \ldots, 7$ ($z_1 = 148$, $z_2 = 155$, $z_3 = 165$, $z_4 = 175$, $z_5 = 177$, $z_6 = 180$, $z_7 = 186$), отримані з Державного підприємства «Запорізьке машинобудівне конструкторське бюро «Прогрес» імені академіка О. Г. Івченка» (ДП ЗМКБ «Прогрес»).

Авторами розроблена програма, що реалізує запропонований метод опису поверхні пера лопатки авіадвигуна, в системі комп'ютерної математики MathCad. Отримані результати розрахунків та їх порівняння з експериментальними даними наведено на рисунку.



а) б)

Поверхня пера лопатки авіадвигуна побудована:
а) – за експериментальними даними; б) – за даними, отриманими запропонованим методом

Експериментальні дані, які використовуються для побудови математичної моделі пера лопатки авіадвигуна (при $z = z_1$)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	–5,14	–3,75	–2,36	–0,98	0,41	1,8	3,19	4,57	5,96	7,35	7,39
Y	3,58	–0,55	–1,76	–2,24	–2,30	–1,96	–1,18	–0,22	0,96	2,36	2,46
№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
X	7,35	7,31	7,28	7,24	7,20	7,17	5,87	4,58	3,29	1,99	0,7
Y	2,56	2,59	2,61	2,61	2,61	2,59	1,93	1,36	0,92	0,66	0,62
№	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
X	–0,59	–1,89	–3,18	–4,47	–4,59	–4,7	–4,81	–4,29	–5,03	–5,14	–5,14
Y	0,82	1,32	2,21	3,82	3,94	3,99	3,4	3,97	3,9	3,64	3,57

Висновки. Таким чином, запропонований метод побудови поверхні в параметричній формі дозволяє подати функції $x = x(t, z)$, $y = y(t, z)$ у вигляді інтерполяційних сплайнів від двох змінних, які інтерполюють значення $X_{i,j}$, $Y_{i,j}$ і зберігають при цьому клас диференційованості $C^1(D)$. Зауважимо, що метод дозволяє цю задачу розв’язувати із збереженням класу диференційовності $C^r(D)$, $r = 2, 3, 4, 5$. При цьому слід використовувати сплайни з нерівномірною сіткою вузлів, явні вирази для яких зручно отримувати методом, запропонованим в роботі [5]. Крім того, якщо експериментальні дані задані з похибкою, метод дозволяє замінити інтрполяційні сплайни апроксимаційними.

Література

1. *Литвин О. М.* Про використання R-функцій для математичного моделювання поверхні манекена у швейній промисловості / О. М. Литвин, В. О. Пасічник // Зб. тез доп. XXXVIII наук.-практ. конф. науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії (ч. 2). – Харків. – 2005. – С. 97–98.
2. *Рвачов В. Л.* Теория R-функций и некоторые её приложения / В. Л. Рвачов. – Киев: Наук. думка, 1982. – 550 с.
3. *Литвин О. Н.* Оптимизация математической модели поверхности трехмерного тела / О. Н. Литвин, В. А. Пасечник // Кибернетика и систем. анализ. – 2006. – № 1. – С. 103–112.
4. *Литвин О. М.* Математичне моделювання процесів інтерполяційними сплайнами на нерегулярній сітці вузлів / О. М. Литвин, О. В. Ткаченко // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 34–39.
5. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи / О. М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2005. – 333 с.

Надійшла до редакції
6.07.10