УДК 519.633+533.517.4

С. В. Ершов, д-р. техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E-mail: yershov@ipmach.kharkov.ua)

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ГРАНИЦАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Предложена численная реализация граничных условий на проницаемых границах для уравнений газовой динамики, главной особенностью которой является запись основных и дополнительных соотношений на границах не в интегральной форме, а в приращениях. Такой подход, с одной стороны, повышает надежность численного моделирования, а с другой – облегчает постановку граничных условий для течений газа со сложными уравнениями состояния.

Запропоновано чисельну реалізацію граничних умов на проникних границях для рівнянь газової динаміки, головною особливістю якої є запис основних та додаткових співвідношень на границях не в інтегральній формі, а в прирощеннях. Такий підхід, з однієї сторони, підвищує надійність чисельного моделювання, а з іншої – полегшує постановку граничних умов для течій газу зі складними рівняннями стану.

Введение

Постановка граничных условий на проницаемых границах при моделировании течений вязкого газа как часть общей постановки задачи играет значительную роль для сходимости и точности получаемых решений, а также для их адекватности реальным потокам. В то же время, хотя и есть ряд теоретических публикаций на эту тему [1, 2], практические аспекты вопроса обычно не обсуждаются в научно-технических публикациях.

Согласно основополагающим работам ЦИАМ [3] и ИПМаш НАН Украины [4] постановка граничных условий на входных границах расчетной области при дозвуковой осевой скорости трехмерного течения подразумевает задание полной температуры T_0 и полного давления p_0, или же, что эквивалентно, полной энтальпии i_0 и энтропийной функции, которая для совершенного газа имеет вид $s = \dfrac{p_0}{\rho_0^\gamma}$, где ρ_0 – заторможенная плотность, γ – показатель адиабаты. Кроме того, необходимо определить направление потока, например двумя углами $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{w}$ и $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{v}{w}$, где u, v и w – декартовы компоненты скорости. Для замыкания системы уравнений на входе обычно используют характеристическое соотношение – инвариант Римана, связывающее параметры на границе с параметрами в ближайшей к границе ячейке.

Тогда система уравнений, с помощью которой можно найти параметры течения совершенного газа на входной границе расчетной области, имеет следующий вид:

$$i_0 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2};$$

$$s = \frac{p}{\rho^\gamma}; \qquad (1)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{u}{w};$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v}{w};$$

$$w - \frac{2a}{\gamma - 1} = \overline{w} - \frac{2\overline{a}}{\gamma - 1},$$

где p – давление; ρ – плотность; $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ – скорость звука; знак надчерка обозначает параметры в центре ближайшей к границе ячейке. Подразумевается, что скорость w направлена по нормали к границе. Для определения p, ρ, u, v, w – неизвестных параметров течения на входе – система уравнений (1) приводится к квадратному уравнению относительно скорости звука a на входной границе. Правильный выбор корня этого уравнения достаточно тривиален.

Рассмотренный выше алгоритм, который можно считать классическим, используется для течений как невязкого, так и вязкого газа, однако в ряде случаев его применение недопустимо. Во-первых, входная граница расчетной области, в которой течет вязкий газ, может пересекать твердые поверхности. Тогда, при сильном измельчении сетки в ближайших к стенке ячейках на границе входа может возникать обратное течение, т.е. поток будет не втекать в расчетную область, а вытекать из нее. Во-вторых, в случае достаточно сложного уравнения состояния систему уравнений на входной границе расчетной области нельзя решить аналитически.

Автором данной статьи в конце 90-х годов прошлого века для CFD решателя FlowER [5] был предложен другой работоспособный алгоритм, который по ряду причин так и не был опубликован. Этот алгоритм не приводит к возникновению обратного течения на входе при измельчении сетки и оказался полезным при адаптации решателя к уравнениям состояния несовершенного газа [6].

В настоящей статье подробно изложена процедура постановки граничных условий на границах входа, используемая в решателе FlowER. При необходимости данная процедура может применяться и на других границах.

Численные соотношения на границе входа в приращениях

Так же, как и в классической постановке граничных условий на входной границе расчетной области [3, 4], будем задавать полную энтальпию i_0, энтропийную функцию s и два угла α и β, определяющие направление потока. Для разных уравнений состояния газа вид термодинамических величин будет различным. Кроме того, будем считать, что представление углов через декартовы компоненты скорости достаточно произвольно. Тогда соотношения на границе входа для задаваемых на ней величин и уравнение состояния можно записать в функциональном виде

$$\begin{gathered} i_0 = f_i(p, \rho, T, u, v, w); \\ s = f_s(\rho, T); \\ \alpha = f_\alpha(u, v, w); \\ \beta = f_\beta(u, v, w); \\ T = f_T(p, \rho). \end{gathered} \tag{2}$$

Введем конечные приращения газодинамических параметров на границе входа в направлении центра близлежащей ячейки

$$\begin{aligned} &\Delta i_0 = \overline{i}_0 - i_0; \quad \Delta s = \overline{s} - s; \quad \Delta\alpha = \overline{\alpha} - \alpha; \quad \Delta\beta = \overline{\beta} - \beta; \quad \Delta p = \overline{p} - p; \\ &\Delta\rho = \overline{\rho} - \rho; \quad \Delta T = \overline{T} - T; \quad \Delta u = \overline{u} - u; \quad \Delta v = \overline{v} - v; \quad \Delta w = \overline{w} - w. \end{aligned} \tag{3}$$

Параметры с надчерком могут быть отнесены к центру ближайшей к границе ячейки либо получены в результате экстраполяции из центра ячейки на границу, и в любом случае их можно считать известными, так как они могут быть найденными до решения системы уравнений на входе. Параметры без надчерка относятся к границе и являются неизвестными, которые необходимо найти, за исключением величин i_0, s, α и β, задаваемых в качестве граничного условия.

Уравнения (2) следует продифференцировать, дополнить соотношением на характеристике, приходящей на границу входа изнутри расчетной области, записанным в дифференциальной форме, и заменить дифференциалы конечными приращениями (3). Тогда получим систему из шести линейных уравнений с шестью неизвестными приращениями Δp, $\Delta\rho$, ΔT, Δu, Δv, Δw

$$\begin{gathered}
\overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial p}\right)}\Delta p+\overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho}\right)}\Delta \rho+\overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial T}\right)}\Delta T+\overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)}\Delta u+\overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)}\Delta v+\overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial w}\right)}\Delta w=\Delta i_0;\\
\overline{\left(\frac{\partial f_s}{\partial \rho}\right)}\Delta \rho+\overline{\left(\frac{\partial f_s}{\partial T}\right)}\Delta T=\Delta s;\\
\overline{\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial u}\right)}\Delta u+\overline{\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}\right)}\Delta v+\overline{\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial w}\right)}\Delta w=\Delta\alpha;\\
\overline{\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial u}\right)}\Delta u+\overline{\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial v}\right)}\Delta v+\overline{\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial w}\right)}\Delta w=\Delta\beta;\\
\overline{\left(\frac{\partial f_T}{\partial p}\right)}\Delta p+\overline{\left(\frac{\partial f_T}{\partial \rho}\right)}\Delta \rho=\Delta T;\\
-\Delta p+\bar\rho\bar a\Delta w=0.
\end{gathered}\tag{4}$$

Если главный определитель системы (4) не равен нулю, то нахождение ее решения не вызывает трудностей. Неизвестные параметры на границе затем определяются из уравнений для приращений (3).

Если рассматривается течение совершенного газа с параметрами на границе из системы (1), то система (4) может быть записана как

$$\begin{gathered}
\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{1}{\bar\rho}\Delta p-\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{\bar p}{\bar\rho^2}\Delta\rho+\bar u\Delta u+\bar v\Delta v+\bar w\Delta w=\Delta i_0;\\
\Delta p-\bar a^2\Delta\rho=\bar\rho^{\gamma}\Delta s;\\
\Delta u-\operatorname{tg}\bar\alpha\,\Delta w=\frac{\bar w}{\cos^2\bar\alpha}\Delta\alpha;\\
\Delta v-\operatorname{tg}\bar\beta\,\Delta w=\frac{\bar w}{\cos^2\bar\beta}\Delta\beta;\\
\Delta p-\bar\rho\bar a\Delta w=0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Можно показать, что главный определитель системы (5) не равен нулю.

Заключение

Рассмотрена численная реализация граничных условий на проницаемых границах расчетной области для уравнений газовой динамики. Главной особенностью предлагаемого подхода является запись основных и дополнительных соотношений на границах не в интегральной форме, а в приращениях, что, с одной стороны, повышает надежность численного моделирования, а с другой – облегчает постановку граничных условий для течений газа со сложными уравнениями состояния.

Благодарность

Автор выражает признательность проф. А. А. Приходько за обсуждение вопросов постановки граничных условий на проницаемых границах, которое и стало побудительным толчком к данной публикации.

Литература

1. *Nordstrom J.* The Influence of Open Boundary Conditions on Convergence to Steady State for the Navier–Stokes Equations / J. Nordstrom // J. Comp. Physics. – 1989. – Vol. 85, № 2. – P. 210–244.
2. *Bruneau Ch-H.* Boundary Conditions on Artificial Frontiers for Incompressible And Compressible Navier-Stokes Equations / Ch-H. Bruneau // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 34, № 2. – P. 303–314.
3. *Численное* решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко и др. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
4. *Соколовский Г. А.* Расчет смешанных течений в решетках турбомашин / Г. А. Соколовский, В. И. Гнесин. – Киев: Наук. думка, 1981. – 184 с.
5. *Єршов С. В.* Комплекс програм розрахунку тривимірних течій газу в багатовінцевих турбомашинах “FlowER” / С. В. Єршов, А. В. Русанов: Свідоцтво про державну реєстрацію прав автора на твір, ПА № 77. Державне агентство України з авторських та суміжних прав, 19.02.1996.
6. *Ершов С. В.* Численное моделирование трехмерных вязких течений несовершенного газа в турбомашинах. Ч. 1. Постановка задачи / С. В. Ершов, А. В. Русанов // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 18–25.

Поступила в редакцию
15.02.11