

Численное отыскание дифракционных коэффициентов в задаче рассеяния электромагнитной волны на криволинейной импедансной поверхности с кромкой

А. А. Звягинцев, А. И. Иванов, Д. В. Катков

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
Площадь Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
e-mail: alexei.i.ivanov@univer.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2005 г.

Предложен гибридный метод расчета электромагнитного поля в задаче дифракции лучевой конгруэнции на криволинейной импедансной поверхности с изломом, использующий совместно метод конечных элементов и равномерную асимптотическую теорию с численными дифракционными коэффициентами. Предложенный способ гибридизации позволяет находить несколько старших членов асимптотического разложения краевой волны, коэффициенты возбуждения нескольких старших мод волн соскальзывания или шепчущей галереи, а также коэффициенты возбуждения простейших (импедансных) поверхностных волн. При помощи данного метода решена задача дифракции поля электрического диполя на параболическом рефлекторе с импедансной затененной поверхностью и проведено сравнение полученного решения с решением на основе метода конечных элементов.

1. Введение

Использование асимптотических методов – геометрической теории дифракции (ГТД), равномерной асимптотической теории (РАТ), а также равномерной ГТД (РГТД) – в задачах дифракции электромагнитных волн (ЭМВ) на телах с характерными размерами порядка десяти длин волн и более позволяет существенно повысить скорость расчетов. Так, выигрыш в скорости по сравнению с методом моментов и методом конечных элементов (МКЭ) может достигать сотен и тысяч раз [1-3]. Тем не менее область применения РГТД и РАТ в настоящее время ограничена вследствие отсутствия или крайней сложности аналитических дифракционных коэффициентов для целого ряда задач, часто встречающихся на практике. В частности, это касается задачи дифракции ЭМВ на импедансных объектах с кромками. Однако упростить процедуру расчета поля

в рамках РГТД и РАТ можно при использовании численных дифракционных коэффициентов. В настоящей работе представлен гибридный метод (ГМ) вычисления электромагнитного поля в задаче дифракции ЭМВ на импедансной поверхности с кромкой, использующий совместно МКЭ и РАТ с численными дифракционными коэффициентами.

2. Постановка задачи и решение

Рассмотрим следующую задачу. Криволинейный клин S расположен в изотропной среде, изменение показателя преломления которой мало на длине волны падающего поля (рис. 1). Кромка клина является гладкой кривой с единичным касательным вектором \vec{t}_e . Предполагается, что электродинамические свойства клина могут быть смоделированы импедансными граничными условиями на его гранях:

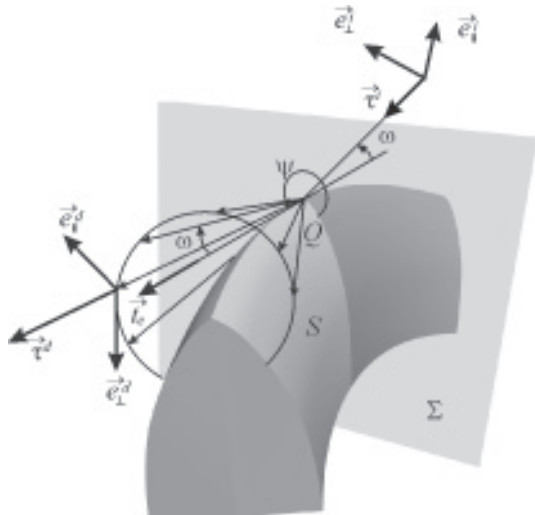


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\vec{H}_\tau = Z_s [\vec{n}, \vec{E}_\tau], \quad (1)$$

где \vec{H}_τ , \vec{E}_τ – касательные к поверхности компоненты векторов напряженности магнитного и электрического полей, \vec{n} – нормаль к поверхности клина, а Z_s – поверхностный импеданс. Пусть падающая электромагнитная волна задана лучевым разложением вектора напряженности электрического поля:

$$\vec{E}_i = \exp(iks_i(\vec{r})) \sum_{n=0}^N \vec{A}_n^i(\vec{r}) \left(\frac{i}{k}\right)^n, \quad (2)$$

где s_i , \vec{A}_n^i – эйконал и векторы лучевых амплитуд соответственно; k – волновое число; N – количество удерживаемых членов разложения. Для определенности будем считать, что освещена только одна из граней S , а двугранный угол Ψ меньше π . Случаи, когда освещены обе грани либо $\Psi > \pi$ могут быть рассмотрены аналогично. Обозначим освещенную и затененную грани S_i и S_s соответственно.

Согласно постулатам РАТ падающая волна возбуждает краевую волну. Пусть Q – произвольная освещенная падающей волной

точка кромки. Тогда в этой точке касательные к лучам краевой волны образуют конус с осью, параллельной вектору \vec{t}_e , и углом раскрытия ω , равным углу между вектором \vec{t}_e и лучом падающей волны в точке Q [5]. Для нахождения поля краевой волны удобно ввести следующие векторы: $\vec{\tau}^{i,d}$ – орты, касательные к лучам падающей и краевой волны соответственно, $\vec{e}_\perp^{i,d} = [\vec{\tau}^{i,d}, \vec{t}_e]$, а также $\vec{e}_\parallel^{i,d} = [\vec{e}_\perp^{i,d}, \vec{\tau}^{i,d}]$ (рис. 1).

Поле отраженной от поверхности S волны аналогично полю падающей волны (2) может быть записано в виде лучевого разложения:

$$\vec{E}_r = \exp(iks_r(\vec{r})) \sum_{n=0}^N \vec{A}_n^r(\vec{r}) \left(\frac{i}{k}\right)^n,$$

где s_r , \vec{A}_n^r – эйконал и векторы лучевых амплитуд отраженной волны. Величины $s_{i,r}$, $\vec{A}_n^{i,r}$ должны удовлетворять уравнениям эйконала и переноса [4, 5]. В частности, если поле \vec{E}_i либо \vec{E}_r задано своими лучевыми амплитудами на некотором фронте, соответствующем эйконалу s_0 , то на произвольном фронте, соответствующем эйконалу $s_{i,r}$,

$$s_{i,r} - s_0 = \int_{s_0}^{s_{i,r}} \sqrt{\epsilon(\vec{r}(l))\mu(\vec{r}(l))} dl, \quad (3)$$

$$\vec{A}_0^{i,r}(s_{i,r}) = \left| \vec{A}_0^{i,r}(s_0) \right| \sqrt{\frac{J(s_0)}{J(s_{i,r})}} (\vec{\eta} \cos \theta + \vec{\beta} \sin \theta),$$

где ϵ , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно; l – длина луча, отсчитываемая от s_0 ; $\vec{\tau}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\beta}$ – орты касательной, нормали и бинормали к лучу соответственно; $J(s)$ – якобиан перехода к лучевым координатам; θ – угол между векторами $\vec{E}_{i,r}$ и нормалью к лучу $\vec{\eta}$ [4]. Этот угол может быть вычислен из соотношения $d\theta/dl = T^{-1}$, где T – радиус кривизны луча [4].

Из граничного условия (1) следует, что

$$\begin{pmatrix} E_{\perp}^r \\ E_{\parallel}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{\perp} & 0 \\ 0 & R_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp}^i \\ E_{\parallel}^i \end{pmatrix},$$

где E_{\perp}^i , E_{\perp}^r и E_{\parallel}^i , E_{\parallel}^r – компоненты полей, перпендикулярные и параллельные плоскости падения соответственно; $R_{\perp, \parallel} = [\cos \varphi - W_{\perp, \parallel}] / [\cos \varphi + W_{\perp, \parallel}]$, $W_{\perp} = Z_0 / Z_s$, $W_{\parallel} = Z_s / Z_0$, Z_0 – импеданс свободного пространства, а φ – угол между нормалью \vec{n} к поверхности S и лучом падающей волны.

Кроме падающей, отраженной и краевой волны, могут существовать также волны, распространяющиеся вдоль поверхности S по геодезическим линиям, направление которых задается касающимися граней лучами краевой волны. Если эффективный радиус кривизны грани в точке Q в направлении распространения краевой волны отрицателен, то падающей волной возбуждаются волны соскальзывания. При положительном эффективном радиусе кривизны возникают волны шепчущей галереи [4]. В случае если $-\pi/2 \leq \arg W_{\perp, \parallel} < 0$, на соответствующей грани образуются также простейшие (импедансные) поверхностные волны [6]. Далее для краткости все эти волны будем называть поверхностными волнами (ПВ).

Таким образом, полное поле в рамках РАТ представимо в виде [5]:

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \vec{E}_i F(\sqrt{k(s_e - s_i)}) + \\ & + \vec{E}_r F(\sqrt{k(s_e - s_r)}) + \vec{E}_e + \vec{E}_{ss} + \vec{E}_{si}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(x)$ – интеграл Френеля; s_e – эйконал краевой волны; \vec{E}_e , \vec{E}_{ss} , \vec{E}_{si} – поля краевой волны и ПВ, распространяющихся вдоль затененной (S_s) и освещенной (S_i) граней соответственно.

Как известно [5], в базисе $(\vec{e}_{\parallel}^i, \vec{e}_{\perp}^i)$ падающей волны и в базисе $(\vec{e}_{\parallel}^d, \vec{e}_{\perp}^d)$ краевой волны коэффициент дифракции и коэффициенты возбуждения ПВ имеют диагональный вид.

Используя этот факт, можно искать скалярные коэффициенты дифракции и возбуждения отдельно для каждой из поляризацій.

Поле краевой волны представимо в виде лучевого разложения, компенсирующего невязки, создаваемые в уравнении Гельмгольца и граничном условии (1) первыми двумя слагаемыми выражения (4). Члены этого разложения для каждой из поляризацій находятся путем интегрирования уравнений переноса амплитуд краевой волны [5] вдоль ее лучей:

$$\begin{aligned} A_n^e(s) = & A_n^e(s_0) \sqrt{\frac{J(s_0)}{J(s)}} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \sqrt{\frac{J(\xi)}{J(s)}} [\Delta A_{n-1}^e(\xi) + q_n^i(\xi) + q_n^r(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q_n^{i,r} = 2\nabla \chi^{i,r} \nabla A_n^{i,r} + A_n^{i,r} \Delta \chi^{i,r}$, $\chi^{i,r} = \pi^{-1/2} \sqrt{s_e - s_{i,r}}$. Из выражения (5) видно, что краевая волна может быть найдена, если известны значения ее амплитуд на некотором фронте, а также значения $q_n^{i,r}$, учитывающие кривизну фронта падающей (отраженной) волны и неравномерность распределения амплитуды вдоль фронтов. Они не зависят непосредственно от геометрии рассеивателя и его импеданса, и поэтому могут быть вычислены аналитически для часто используемых конгруэнций лучей и затем многократно использованы. Для направлений векторов лучевых амплитуд поля \vec{E}_e справедливы формулы, аналогичные выражению (3), т. е. при отличном от нуля кручении лучей краевой волны они вращаются относительно нормали к лучу.

Поле каждой из ПВ представимо в виде суммы собственных ПВ соответствующего типа [4]. В настоящей работе использованы выражения для полей собственных ПВ, представленные в работах [4, 6]. Эти выражения были выведены для двумерного случая, однако исследования, проведенные в работе [7], показали, что они хорошо согласуются с известными аналитическими и численными результатами даже в случаях,

когда кривизна в направлении, перпендикулярном распространению волны, отлична от нуля.

Импедансные ПВ в рассматриваемой задаче имеют границу свет-тень. Поэтому равномерная асимптотика полей этих ПВ для каждой из поляризаций имеет вид:

$$E_{\text{imp}}^{\perp,\parallel} = K_{\text{exc}} E_{\text{imp}}^{\text{eig}}(\sigma, \nu) F\left(\sqrt{k(s_e - s_{\text{imp}}^{\perp,\parallel})}\right) + E_{\text{imp}}^{\delta}(\sigma, \nu),$$

где K_{exc} – коэффициент возбуждения импедансной волны; $E_{\text{imp}}^{\text{eig}}(\sigma, \nu)$ – поле собственной импедансной ПВ поверхности без кромки [6]; σ – длина геодезической линии; ν – координата, отсчитываемая вдоль нормали к геодезической линии, проходящей через точку наблюдения; $s_{\text{imp}}^{\perp,\parallel}(\sigma, \nu) = \int_0^{\sigma} \sqrt{1 + (iW_{\perp,\parallel}(t))^2} dt - i\nu W_{\perp,\parallel}(\sigma)$ – комплексный эйконал импедансной ПВ. Неизвестная функция $E_{\text{imp}}^{\delta}(\sigma, \nu)$ представляема в виде лучевого разложения, амплитуды которого удовлетворяют уравнениям переноса амплитуд краевой волны [5], и, по сути, представляет собой добавку к краевой волне \vec{E}_e .

Выражение (4) не может быть использовано, если точка наблюдения находится в непосредственной близости от кромки, поскольку амплитуды лучевого разложения краевой волны $A_n^e(s)$ обращаются на ней в бесконечность [5]. Кроме того, поле краевой волны (5) содержит неизвестные величины $A_n^e(s_0)$, а выражения для полей ПВ вычисляются с точностью до произвольных множителей – коэффициентов возбуждения. Для отыскания поля вблизи кромки, а также нахождения неизвестных величин в выражении (4) может быть использован МКЭ. Для этого при помощи МКЭ решается вспомогательная задача дифракции в малой окрестности кромки $s_e - s_e^0 < s_{\text{num}}$, где s_e^0 – значение эйконала краевой волны на кромке, а $s_{\text{num}} \sim \lambda$. При этом параметры падающей волны и рассеивателя должны быть идентичны параметрам исходной задачи. Неизвестные коэффициенты в выражении (4) находятся приближенно путем минимизации

среднеквадратичного отклонения поля РАТ (4) от численного решения МКЭ на отрезках сшивания $s_e \in [s_l, s_{\text{num}}]$, где эйконал s_l определяет длину отрезков сшивания. При выборе величин s_l, s_{num} принималось во внимание следующее. Увеличение значения s_{num} улучшает точность решения МКЭ, но значительно увеличивает время численного счета. Величина s_l ограничена снизу вследствие того, что асимптотические выражения для краевой волны, а также для волн соскальзывания неприменимы вблизи кромки. Вместе с тем увеличение значения s_l повышает точность процедуры минимизации за счет увеличения длины отрезков $[s_l, s_{\text{num}}]$. Авторами было экспериментально установлено, что при использовании в МКЭ на поверхности $s = s_{\text{num}}$ поглощающих граничных условий второго порядка [8] оптимальные значения s_{num} составляют $(1 \div 2)\lambda$, а $s_l - (0.5 \div 0.9)s_{\text{num}}$ в зависимости от геометрии рассеивателя, требуемой точности и других параметров.

3. Численные результаты

Для проверки ГМ применим его к задаче дифракции поля электрического диполя на рассеивателе, освещенная сторона которого представляет собой идеально проводящий параболоид, а затененная – сегмент сферы с поверхностным импедансом $Z_s = Z_0/(1 - 2i)$ (рис. 2, 3). Параболоид и сегмент сферы образованы вращением вокруг оси OZ соответственно ветви параболы $z = \alpha x^2$ и дуги окружности $z = z_0 - \sqrt{R^2 - x^2}$, где $x \in [0, D/2]$, D – диаметр параболоида, $\alpha = (4F)^{-1}$, F – фокальное расстояние, $(0, 0, z_0)$ – центр сегмента сферы, а R – его радиус (рис. 2, 3). Диполь расположен в точке $(0, 0, F)$ и ориентирован параллельно оси OX . Такая геометрия задачи позволяет оценить точность ГМ при $\Psi \neq 0$ и существование всех типов ПВ: на освещенной поверхности рассеивателя образуются волны шепчущей галереи, а на затененной – импедансные ПВ и волны соскальзывания.

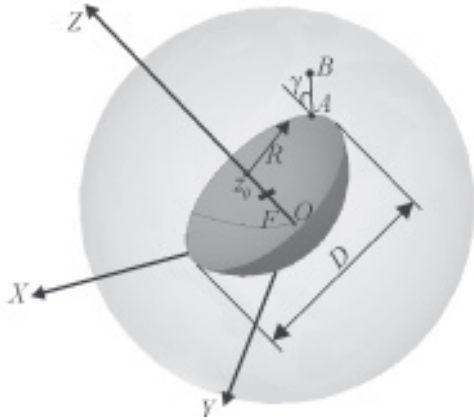


Рис. 2. Область решения МКЭ

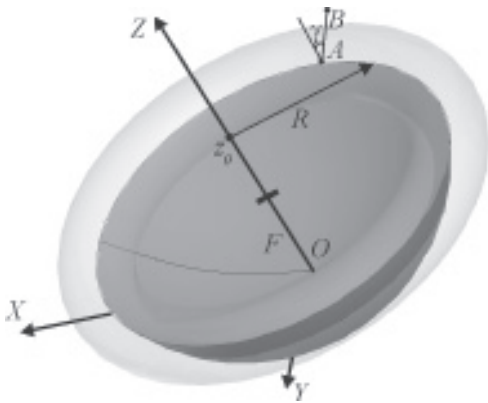


Рис. 3. Область решения МКЭ в ГМ

При решении задачи с помощью МКЭ дискретизации подлежит область, окружающая рассеиватель на расстоянии порядка длины волны (рис. 2). В то же время при использовании предложенного ГМ дискретизируется лишь область, прилегающая к кромке (рис. 3). Таким образом, достигается существенная экономия вычислительных ресурсов. На рис. 4 представлено отношение времен, затраченных на решение данной задачи традиционным МКЭ (t_1), а также ГМ (t_2) (круглые маркеры соответствуют вычисленным значениям). Как видно из рисунка, эффективность ГМ резко возрастает с ростом размеров рассеивателя по отношению к длине волны.

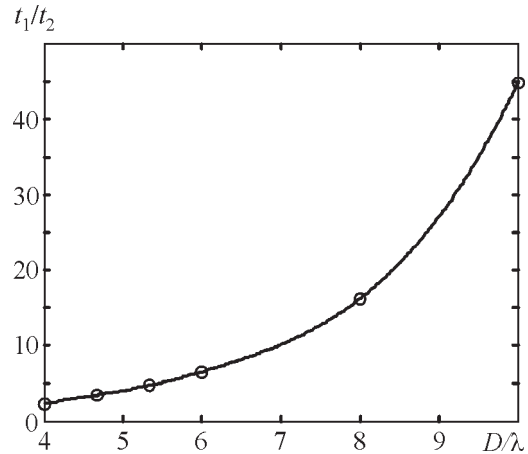


Рис. 4. Отношение времен расчета МКЭ (t_1) и ГМ (t_2). Круглые маркеры соответствуют вычисленным значениям

На рис. 5 представлены зависимости нормированного на максимальное значение модуля компоненты поля E_x от координаты y в плоскости YZ на расстоянии 0.125λ по оси OZ от рассеивателя ($F = 0.25D$, $D = 5\lambda$, $\alpha = 0.5$, $z_0 = 2.25\lambda$, $R = 2.75\lambda$). Сплошная и пунктирная линии соответствуют полю ГМ вблизи освещенной и затененной сторон рассеивателя. Решению МКЭ соответствуют треугольные (освещенная область)

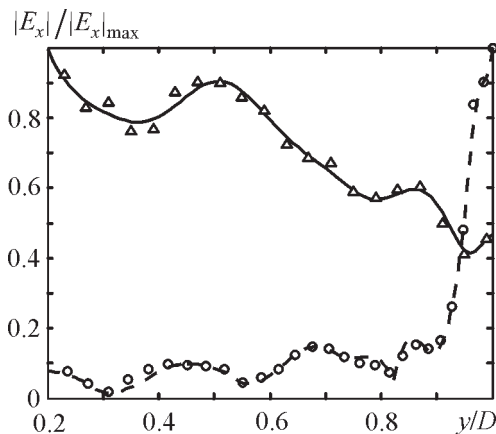


Рис. 5. Поле у поверхности рассеивателя. Решение ГМ в освещенной области (—) и зоне тени (---), решение МКЭ в освещенной области (Δ) и зоне тени (\circ)

и круглые (область тени) маркеры. При расчете поля ГМ учитывались первые три моды волн шепчущей галереи и две моды волн соскальзывания. Как видно из рис. 5, решения МКЭ и ГМ хорошо согласуются между собой. Различия обусловлены в основном несовпадением полей ГМ и МКЭ вблизи кромки, а также усечением асимптотических рядов.

На рис. 6 представлены зависимости нормированного на максимальное значение модуля компоненты E_x от угла γ между осью OZ и отрезком AB от кромки до точки наблюдения (рис. 2, 3) в плоскости YZ на расстоянии λ от кромки. Остальные параметры – как в предыдущем случае. Решению МКЭ соответствуют круглые маркеры, а полю ГМ – сплошная линия. Краевая волна в ГМ вычислялась с точностью до $k^{-3/2}$. Из рис. 6 видно, что оба решения практически идентичны.

Таким образом, предложенный метод уже при значениях $a/\lambda \sim 5$, где a – характерный размер рассеивателя, показывает удовлетворительные результаты. Тем не менее его применение целесообразно при $a/\lambda \sim 10$ и более, когда выигрыш в скорости вычислений по сравнению с традиционным МКЭ становится существенным, а асимптотические ряды для краевой волны и ПВ могут быть усечены до 2–3 членов.

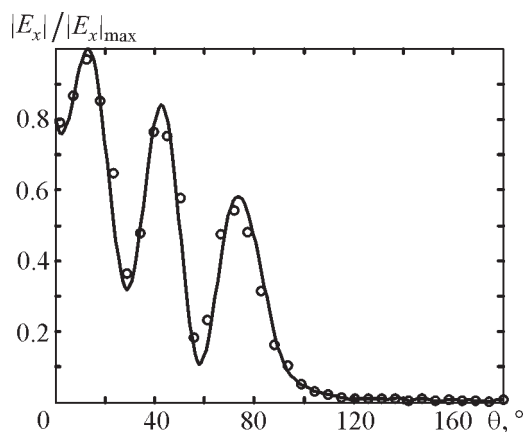


Рис. 6. Угловая зависимость поля на расстоянии λ от кромки. Решение ГМ (—), решение МКЭ (○)

4. Выводы

Предложенный в работе способ гибридизации МКЭ и РАТ может быть использован при решении задач дифракции на импедансных рассеивателях, имеющих электрически большие элементы с кромками. В отличие от аналогичных методов [3], он позволяет находить не только старший член краевой волны РАТ $A_0^e(s)$, но и несколько последующих членов, а также коэффициенты возбуждения ПВ. Численное решение задачи дифракции поля электрического диполя на модели параболической антенны показало, что результаты ГМ согласуются с результатами МКЭ.

Литература

1. U. Jakobus. Users' Guide to FEKO. – EMSS: Stellenbosch, South Africa, 1999 (<http://www.emss.co.za>).
2. Thiele G. A. Overview of selected hybrid methods in radiating system analysis // Proc. IEEE. – 1992. – Vol. 80, No. 1. – P. 66-78.
3. T. Ozdemir, M. W. Nurnberger, J. L. Volakis, R. Kipp, and J. Berrie. A hybridization of finite-element and high-frequency methods for pattern prediction for antennas on aircraft structures // IEEE Antennas Propag. Mag. – 1996. – Vol. 38, No. 3. – P. 28-38.
4. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
5. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. – М.: Связь, 1978. – 248 с.
6. Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Пять лекций по асимптотическим методам в задачах дифракции и распространения радиоволн. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. – 76 с.
7. Pathak P. G. A., Walter D. B., Marhefka R. J. A Uniform GTD Analysis of the Diffraction of Electromagnetic Waves by a Smooth Convex Surface // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1980. – Vol. 28, No. 5. – P. 631-642.
8. Stupfel V. Absorbing boundary conditions on arbitrary boundaries for the scalar and vector wave equations // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1994. – Vol. 42, No. 5. – P. 773-780.

**Числове відшукування дифракційних
коефіцієнтів в задачі розсіяння
на криволінійній імпедансній
поверхні з кромкою**

А. О. Звягинцев, О. І. Иванов, Д. В. Катков

Пропонується гібридний метод відшукування електромагнітного поля у задачі дифракції променевої конгруенції на криволінійній імпедансній поверхні з кромкою, який використовує спільно метод кінцевих елементів та рівномірну асимптотичну теорію з числовими дифракційними коефіцієнтами. Запропонований спосіб гібридизації дозволяє знаходити кілька старших членів асимптотичного розкладу крайової хвилі, коефіцієнти збудження кількох старших мод хвиль зсковзування та хвиль шепочучої галереї, а також коефіцієнти збудження найпростіших (імпедансних) поверхневих хвиль. За цим методом розв'язано задачу дифракції поля електричного диполя на параболічному рефлекторі з імпедансною затіненою поверхнею та порівняно отриманий розв'язок з розв'язком за методом кінцевих елементів.

**Numerical Calculation of Diffraction
Coefficients in the Electromagnetic Wave
Scattering by a Curvilinear
Impedance Surface with Edge**

**A. A. Zvyagintsev, A. I. Ivanov,
and D. V. Katkov**

A hybrid method of electromagnetic field calculation in the problem of ray congruence diffraction by a curvilinear impedance surface with edge is suggested. It uses jointly the finite element method and the uniform asymptotic theory with numerical diffraction coefficients. The hybridization procedure proposed allows computing several highest terms of the edge wave asymptotic expansion, the excitation coefficients of several highest creeping or whispering gallery modes, and the excitation coefficients of the impedance surface waves. The electric dipole field diffraction by a parabolic reflector with the impedance shaded surface is solved using the method proposed, and the obtained solution is compared to that obtained with the finite element method.