

Численная реализация алгоритмов расчета волноводов сложного поперечного сечения с гладкими границами и их соединений

Н. Г. Дон, А. А. Кириленко, В. И. Ткаченко

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, Харьков, 61085, Украина
E-mail: nata@ire.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 24 июня 2005 г.

Описана схема декомпозиционного подхода к вычислениям матриц рассеяния плоских сочленений волноводов с поперечными сечениями произвольной формы, а также диафрагм и других волноводных узлов, образованных из таких сочленений. Расчет модовых базисов основан на решении граничных интегральных уравнений теории потенциала. Особое внимание уделено специфике численной реализации каждого из этапов описанного подхода.

В настоящее время для вычисления характеристик сложных волноводных устройств широко используются алгоритмы, основанные на декомпозиционном подходе и методе частичных областей [1]. Они обеспечивают более высокую скорость расчетов по сравнению с алгоритмами, основанными на сеточных методах, однако не обладают таким важным свойством сеточных методов как универсальность. Цель настоящей работы – создание на основе декомпозиционного подхода и метода частичных областей алгоритма, пригодного для вычисления характеристик плоских сочленений волноводов с поперечным сечением произвольной формы, а также диафрагм и расширений, составленных из таких волноводов. С прикладной точки зрения актуальность поставленной задачи вызвана тем, что, во-первых, усложнение границ может привести к новым электродинамическим свойствам и, во-вторых, при изготовлении большинства микроволновых объектов имеют место технологические погрешности, учет которых позволяет получить более точные характеристики этих объектов.

В рамках декомпозиционного подхода исследуемый объект рассматривается не как

единое целое, а как набор отдельных фрагментов. Его электродинамические характеристики в этом случае определяются из анализа этих фрагментов [1]. Таким образом, первый этап задачи – это расчет модовых базисов всех волноводов, используемых в данном устройстве, так как волновод – самый элементарный из возможных фрагментов. Следующей по сложности составной частью является плоское сочленение волноводов. Расчет электродинамических характеристик этого фрагмента заключается в вычислении его матрицы рассеяния. И, наконец, используя метод S -матриц (“нанизывая” сочленения с учетом длины соединяющих регулярных отрезков волноводов), мы получаем полную матрицу рассеяния искомого объекта.

Метод расчета модового базиса полых регулярных волноводов с поперечным сечением произвольной формы

Предполагается зависимость компонент электромагнитного поля от времени вида $e^{-i\omega t}$ и от продольной координаты z вида e^{igz} , где g – постоянная распространения. Реше-

ние задачи модового анализа полых регулярных волноводов сводится к решению дифференциальных уравнений Гельмгольца относительно продольных компонент электрического E_z (TM -волны) и магнитного H_z (TE -волны) полей с граничными условиями Дирихле и Неймана соответственно [1]. С помощью теоремы Грина и граничных условий перейдем от дифференциальной формулировки задачи к интегральной (для удобства оба класса волн рассматриваются одновременно):

$$E_z(p) = \int_{\Gamma} G(\chi|p-q|) \frac{\partial E_z(q)}{\partial n} dl, \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$H_z(p) = \int_{\Gamma} H_z(q) \frac{\partial G(\chi|p-q|)}{\partial n} dl, \quad p \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь p, q – точки в декартовой системе координат (q – переменная интегрирования); χ – поперечное волновое число; Ω обозначает поперечное сечение волновода; Γ – контур, ограничивающий Ω ; n – внешняя нормаль к Γ . Функция $G(\chi|p-q|)$ является функцией Грина соответствующего уравнения Гельмгольца и

$$G(\chi|p-q|) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi|p-q|).$$

Причины выбора в качестве функции Грина именно функции Ханкеля первого рода обсуждаются ниже. Из уравнений (1), (2) видно, что продольная компонента поля представляет собой потенциал либо простого слоя для TM -волн, либо двойного слоя для TE -волн.

Продифференцируем уравнение (1) по направлению \tilde{n} , определяемому внешней нормалью к контуру в точке, соответствующей проекции точки p на Γ :

$$\frac{\partial E_z(p)}{\partial \tilde{n}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \int_{\Gamma} G(\chi|p-q|) \frac{\partial E_z(q)}{\partial n} dl, \quad p \in \Omega. \quad (3)$$

Устремим точку p в уравнениях (2) и (3) к Γ . $\frac{\partial E_z(p)}{\partial \tilde{n}}$ при подходе к контуру поперечного сечения терпит разрыв того же рода, что и потенциал двойного слоя [2]. Следовательно, решение задачи о модовом спектре волновода сводится к решению граничных интегральных уравнений Фредгольма второго рода как для TM -, так и для TE -волн:

$$\frac{\partial E_z(p)}{\partial n_p} - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\chi|p-q|)}{\partial n_p} \frac{\partial E_z(q)}{\partial n_q} dl = 0,$$

$$H_z(p) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\chi|p-q|)}{\partial n_q} H_z(q) s dl = 0,$$

$p \in \Gamma$.

Здесь n_p и n_q обозначают внешние нормали к Γ в точках p и q соответственно.

С помощью параметрического представления кривой Γ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

и связи между $\frac{\partial G(\chi|p-q|)}{\partial n_p}$ и $\frac{\partial G(\chi|p-q|)}{\partial n_q}$ запишем окончательные интегральные уравнения для TE - и TM -волн в едином виде (t и τ – значения параметра, соответствующие точкам p и q):

$$u(t) + \int_a^b V(\chi, t, \tau) S(t, \tau) u(\tau) \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)} d\tau = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad (4)$$

$$\text{где } u(t) = \begin{cases} \frac{\partial E_z(t)}{\partial n} \\ H_z(t) \end{cases} \quad \text{и} \quad V(\chi, t, \tau) S(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{\partial G(\chi r(t, \tau))}{\partial n_p}, & TM \text{ - волны,} \\ \frac{\partial G(\chi r(t, \tau))}{\partial n_q}, & TE \text{ - волны,} \end{cases} \quad r(t, \tau) = |p - q|.$$

Использование единого уравнения для обеих поляризации упрощает численную реализацию метода. Дискретизация (4) по методу Крылова–Боголюбова [3] приводит к матричному уравнению

$$(\hat{I} + \hat{A}(\chi))U = 0, \quad (5)$$

в котором U – вектор размерности N , где N – количество точек дискретизации контура; \hat{I} – единичная матрица; элементы матрицы \hat{A} имеют вид:

$$A_{ij} = V(\chi, t_i, t_j) S(t_i, t_j) \sqrt{\dot{x}^2(t_j) + \dot{y}^2(t_j)} h_j, \\ i, j = 1, \dots, N.$$

Здесь t_i, t_j – значения параметра, соответствующие точкам дискретизации, h_j – ее шаг. Значения параметра χ (критические волновые числа) определяются из соответствующего дисперсионного уравнения:

$$\det(\hat{I} + \hat{A}(\chi)) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, задача о модовом базисе волноводов с поперечным сечением произвольной формы сведена к решению уравнений (6) и (5).

Параметризация контура поперечного сечения волновода

Как известно, любую достаточно гладкую плоскую кривую можно описать с помощью ее натурального уравнения $\eta = f(s)$ (где η – кривизна кривой, а s – длина дуги). В этом случае параметрическое представление контура имеет следующий вид [6]:

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \cos(F(\tau)) d\tau, \\ y(s) = \int_0^s \sin(F(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad F(\tau) = \int_0^\tau f(\xi) d\xi, \quad 0 \leq \tau, s \leq L.$$

Здесь L – длина контура. При натуральной параметризации контура уравнение (4) упрощается, так как $\sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)} \equiv 1$.

Заметим, что если функция кривизны контура поперечного сечения имеет неустраиваемые особенности (например, наличие углов в случае прямоугольного волновода), описанный подход формально не применим. Однако замена “неудобного” волновода моделью со слегка сглаженными углами позволяет использовать его и в этом случае.

К сожалению, иногда получение натурального уравнения кривой само по себе является трудоемкой задачей, например, в случае эллиптического волновода. Обычно такие структуры можно параметризовать более удобным способом, в частности, с помощью полярного угла или интерполяционных формул.

Дискретизация интегрального уравнения

Для того чтобы получить все критические волновые числа, лежащие в заданном диапазоне частот $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$, необходимо:

а) выбрать достаточное количество точек дискретизации уравнения (4) и расположить их оптимальным образом;

б) уточнить полученные значения, используя информацию о поведении собственной функции (производной по нормали для ТМ-волн) на границе поперечного сечения волновода.

Опыт показал, что в качестве начального числа точек дискретизации достаточно взять 8–12 точек на части контура длиной $\lambda_{\min}/2$, $\lambda_{\min} = 2\pi/\chi_{\max}$. Такой подход позволяет не только получать хорошие начальные приближения, но также дает возможность не пропускать критических волновых чисел, близких к χ_{\max} . Для удобства численной реализации расчленим контур поперечного сечения волновода на сегменты с непрерывным изменением параметра t (например, прямоугольник с закругленными углами разбивается на прямолинейные участки и дуги окружности) и определим нужное количество точек дискретизации на каждом из сегментов.

При уточнении полученных решений обычно используют последовательное уд-

воение числа точек дискретизации, однако это не всегда целесообразно. Например, для низших волн ($TE_{01(10)}$) прямоугольного волновода значение продольной компоненты на одной из стенок волновода постоянно, следовательно, не имеет смысла увеличивать число точек дискретизации на этом участке границы. В предложенном алгоритме мы следим за среднеквадратичным отклонением элементов вектора U из уравнения (5) на каждом из выделенных сегментов контура. Число точек дискретизации увеличиваем только в случае, если значение среднеквадратичного отклонения превышает 10^{-2} . Таким образом, мы эффективно используем информацию о поведении собственной функции на контуре.

Случай симметричного контура

Если граница поперечного сечения волновода обладает симметрией, то порядок матричного уравнения (5) можно уменьшить. Рассмотрим использование этого приема на примере прямоугольного волновода с закругленными углами. В данном случае поперечное сечение симметрично относительно оси OY и прямой $y = b/2$ (рис. 1), следовательно, искомая функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha u(-x, y), & \alpha &= \pm 1, & x &\geq 0, \\ u(x, y) &= \beta u(x, -y), & \beta &= \pm 1, & y &\geq b/2. \end{aligned} \tag{7}$$

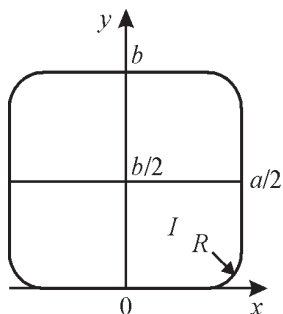


Рис. 1. Прямоугольный волновод $a \times b$ с закругленными углами

Варьируя параметры α, β и используя (7) в (4), сводим решение (5) и (6) к решению четырех подобных уравнений, заданных только на четверти контура, ограничивающей область I . Такой подход позволяет работать с матрицами в четыре раза меньшего порядка и, что более важно, “разнести” некоторые из вырожденных волн по разным классам симметрии.

Решение задачи о плоском сочленении волноводов с поперечным сечением произвольной формы

Для вычисления матрицы рассеяния плоского сочленения волноводов с произвольным поперечным сечением используется метод частичных областей [7] и контурное представление интегралов связи [8].

Рассмотрим плоское сочленение двух волноводов с поперечными сечениями Ω и Δ (рис. 2). В дальнейшем волноводы с этими сечениями будут называться волноводами Ω и Δ , а все величины, относящиеся к ним, будут обозначаться соответственно такими же индексами. Основу метода частичных областей для расчета матрицы рассеяния сочленения составляют условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитных полей волноводов в плоскости сочленения (рассмотрим случай падения волны из волновода с сечением Ω):

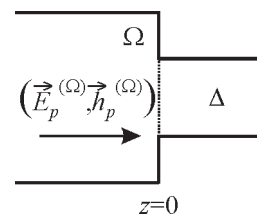


Рис. 2. Плоское сочленение волноводов

$$c_j^\Omega \vec{e}_{\tan j}^\Omega + \sum_{i=1}^{R^\Omega} c_i^\Omega S_{ij}^\Omega \vec{e}_{\tan i}^\Omega = \sum_{i=1}^{R^\Delta} c_i^\Delta S_{ij}^\Delta \vec{e}_{\tan i}^\Delta, \quad (8)$$

$$d_j^\Omega \vec{h}_{\tan j}^\Omega + \sum_{i=1}^{R^\Omega} d_i^\Omega S_{ij}^\Omega \vec{h}_{\tan i}^\Omega = \sum_{i=1}^{R^\Delta} d_i^\Delta S_{ij}^\Delta \vec{h}_{\tan i}^\Delta.$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$c_i^\Omega = \begin{cases} g_i^\Omega, & TM\text{-волна,} \\ kW, & TE\text{-волна,} \end{cases} \quad d_i^\Omega = \begin{cases} k/W, & TE\text{-волна,} \\ g_i^\Omega, & TM\text{-волна,} \end{cases}$$

$$c_i^\Delta = \begin{cases} g_i^\Delta, & TM\text{-волна,} \\ kW, & TE\text{-волна,} \end{cases} \quad d_i^\Delta = \begin{cases} k/W, & TE\text{-волна,} \\ g_i^\Delta, & TM\text{-волна,} \end{cases}$$

где j – номер падающей волны; g_i^Ω , $\vec{e}_{\tan i}^\Omega$, $\vec{h}_{\tan i}^\Omega$ и g_i^Δ , $\vec{e}_{\tan i}^\Delta$, $\vec{h}_{\tan i}^\Delta$ – постоянные распространения и поперечные электрические и магнитные функции i -й волны волноводов Ω и Δ ; R^Ω , R^Δ – размерности соответствующих проекционных базисов; k – волновое число; $W = 120\pi$ Ом – волновое сопротивление свободного пространства; S_{ij}^Ω и S_{ij}^Δ – коэффициенты преобразования падающей волны в волны волноводов Ω и Δ . Умножим скалярно первое из уравнений (8) на $\vec{e}_{\tan m}^\Omega$ ($m = 1, \dots, R^\Omega$), а второе на $\vec{h}_{\tan m}^\Delta$ ($m = 1, \dots, R^\Delta$) и проинтегрируем по сечениям соответствующих волноводов. Используя свойство ортогональности собственных волн, получаем окончательную систему алгебраических уравнений для вычисления элементов матрицы рассеяния:

$$\delta_{im} c_j^\Omega \int_{\Omega} (\vec{e}_{\tan j}^\Omega, \vec{e}_{\tan m}^\Omega) ds + c_m^\Omega S_{mj}^\Omega \int_{\Omega} (\vec{e}_{\tan m}^\Omega, \vec{e}_{\tan m}^\Omega) ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{R^\Delta} c_i^\Delta S_{ij}^\Delta \int_{\Omega} (\vec{e}_{\tan m}^\Omega, \vec{e}_{\tan i}^\Delta) ds, \quad m = 1, \dots, R^\Omega,$$

$$d_j^\Omega \int_{\Delta} (\vec{h}_{\tan j}^\Omega, \vec{h}_{\tan m}^\Delta) ds + \sum_{i=1}^{R^\Omega} d_i^\Omega S_{ij}^\Omega \int_{\Delta} (\vec{h}_{\tan i}^\Omega, \vec{h}_{\tan m}^\Delta) ds =$$

$$d_m^\Delta S_{mj}^\Delta \int_{\Delta} (\vec{h}_{\tan m}^\Delta, \vec{h}_{\tan m}^\Delta) ds, \quad m = 1, \dots, R^\Delta.$$

Так как $\vec{h}_{\tan i}^\Omega = [\vec{Z}_0 \times \vec{e}_{\tan i}^\Omega]$, $\vec{h}_{\tan i}^\Delta = [\vec{Z}_0 \times \vec{e}_{\tan i}^\Delta]$, где \vec{Z}_0 – орт оси OZ и $\vec{e}_{\tan i}^\Omega \equiv 0$ на металле, то для решения системы необходимо вычислить значения интегралов, которые представляют собой:

а) нормы собственных волн волноводов

$$N_i^\Omega = \left[\int_{\Omega} (\vec{e}_{\tan i}^\Omega, \vec{e}_{\tan i}^\Omega) ds \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} (\vec{h}_{\tan i}^\Omega, \vec{h}_{\tan i}^\Omega) ds \right]^{1/2}, \quad (9)$$

$$N_i^\Delta = \left[\int_{\Delta} (\vec{e}_{\tan i}^\Delta, \vec{e}_{\tan i}^\Delta) ds \right]^{1/2} = \left[\int_{\Delta} (\vec{h}_{\tan i}^\Delta, \vec{h}_{\tan i}^\Delta) ds \right]^{1/2};$$

б) интегралы связи между собственными волнами волноводов Ω и Δ

$$M_{im} = \int_{\Delta} (\vec{e}_{\tan i}^\Omega, \vec{e}_{\tan m}^\Delta) ds. \quad (10)$$

Аналогично рассматривается случай падения волны из волновода Δ .

Вычисление интегралов связи

Для вычисления интегралов связи (10) мы используем их представления через контурные интегралы [8]:

$$M_{im}^{TETE} = - \frac{(\chi_m^\Delta)^2}{(\chi_m^\Omega)^2 - (\chi_m^\Delta)^2} \int_{\Gamma_\Delta} H_{zm}^\Delta \frac{\partial H_{zi}^\Omega}{\partial n} dl,$$

$$M_{im}^{TMTM} = - \frac{(\chi_i^\Delta)^2}{(\chi_m^\Omega)^2 - (\chi_m^\Delta)^2} \int_{\Gamma_\Delta} E_{zi}^\Delta \frac{\partial E_{zm}^\Omega}{\partial n} dl, \quad (11)$$

$$M_{im}^{TMTE} = \int_{\Gamma_\Delta} E_{zi}^\Omega \frac{\partial H_{zm}^\Delta}{\partial l} dl,$$

$$M_{im}^{TMTE} = 0.$$

Здесь χ_m^Ω , H_{zm}^Ω , E_{zm}^Ω и χ_m^Δ , H_{zm}^Δ , E_{zm}^Δ – критические волновые числа и продольные

компоненты m -х волн волноводов Ω и Δ ; Γ_Δ – контур поперечного сечения волновода Δ . Контурное представление уменьшает время, затрачиваемое на вычисление интегралов связи. Более того, для волновода с меньшим поперечным сечением (для первых двух интегралов) необходимо вычислять только значения функций, которые присутствуют в уравнении (4). Таким образом, вычисления сводятся к нахождению следующих величин:

$$M_{im}^{TEE} = -\frac{(\chi_m^\Delta)^2}{(\chi_m^\Omega)^2 - (\chi_m^\Delta)^2} \sum_l u(t_l) \frac{\partial H_{zi}^\Omega(x(t_l), y(t_l))}{\partial n} h_l,$$

$$M_{im}^{TMM} = \frac{(\chi_m^\Delta)^2}{(\chi_m^\Omega)^2 - (\chi_m^\Delta)^2} \sum_l E_{zi}^\Omega(x(t_l), y(t_l)) u(t_l) h_l,$$

(12)

$$M_{im}^{TME} = \sum_l E_{zi}^\Omega(x(t_l), y(t_l)) \frac{u(t_l + \epsilon) - u(t_l - \epsilon)}{2\epsilon} u(t_l) h_l$$

где $u(t_l)$ – значения решения (4) в точках дискретизации, ϵ – малая величина. Следует заметить, что последняя формула справедлива только в случае натуральной параметризации. В таблице 1 представлены интегралы связи для соосного соединения двух круглых волноводов ($R=10$ мм, $r=6$ мм), вычисленные различными путями: А – аналитический расчет, Б – с использованием формулы прямоугольников при интегрировании и В – с использованием формул (12).

Как видно из этого сравнения, вариант расчета В позволяет получить значения интегралов связи с достаточной для вычислений точностью. Более того, он позволяет увеличить скорость вычислений в несколько раз (в зависимости от геометрии рассматриваемых объектов и величины проекционных базисов).

Значения функций в интегралах связи восстанавливаются по формулам (1), (2). Так как критические волновые числа уже определены, то для повышения быстродействия алгоритма будем использовать в качестве функции Грина вещественнозначную функцию, например, функцию Неймана, $-\frac{1}{4}N_0(\chi|p-q|)$, или Векуа, $-\frac{1}{4}N_0(\chi|p-q|) + \frac{1}{2\pi}J_0(\chi|p-q|)\ln\left(\frac{\chi e^\gamma}{2}\right)$ (γ – постоянная Эйлера) [4].

Следует заметить, что использование вещественнозначной функции возможно и при расчете критических волновых чисел. Однако в этом случае вероятна ситуация, когда найденное значение χ удовлетворяет уравнению (6), но не является собственным числом исходной краевой задачи. Это связано с тем, что при таком выборе функции Грина в класс решений (6) попадают не только критические волновые числа исходной внутренней задачи, но и решения некоторой внешней задачи [5]. Следовательно, существует проблема селекции найденных решений. В случае использования функции Ханкеля в качестве функции Грина “ложные” собственные значения не появляются.

Таблица 1.

Подход к расчету коэффициентов связи	Тип собственных волн (Ω – волновод с большим сечением, Δ – с меньшим; v – вертикальная поляризация, h – горизонтальная)			
	$(H_{11,v}^{(\Omega)}, H_{11,v}^{(\Delta)})$	$(H_{11,h}^{(\Omega)}, H_{11,h}^{(\Delta)})$	$(E_{01,h}^{(\Omega)}, E_{01,h}^{(\Delta)})$	$(E_{11,v}^{(\Omega)}, E_{11,v}^{(\Delta)})$
А	0.7197	-0.7197	-0.4897	-0.4530
Б	0.7167	-0.7158	-0.4890	-0.4504
В	0.7172	-0.7159	-0.4893	-0.4504

Вычисление норм собственных мод

На наш взгляд, вычисление норм (9) удобнее проводить на этапе модового анализа волновода сложного поперечного сечения. К сожалению, вычисление норм пока не удалось свести к контурному интегрированию и этот процесс занимает до четверти всего времени, затрачиваемого на модовый анализ.

Учет симметрии при вычислении интегралов связи и норм

Использование условий симметрии (7) в формулах (11) в случае, когда меньший волновод обладает симметрией, сводит вычисление контурных интегралов к интегрированию только по части контура. Аналогичный подход справедлив и при вычислении норм: интегрирование по всему поперечному сечению заменяется интегралом только по его части.

Если само сочленение обладает симметрией (рис. 3), то вычисление интегралов связи в (11) упрощается за счет использования симметрии контура большего волновода. Кроме того, в этом случае очевидно, что для волн, принадлежащих разным классам симметрии, коэффициенты связи равны нулю.

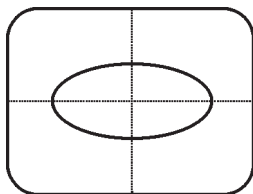


Рис. 3. Плоское сочленение волноводов с двойной симметрией

Случай, когда в сочленение входит круглый или прямоугольный волновод

Естественно, что если хотя бы один из волноводов является прямоугольным или круглым, его критические волновые числа, соответствующие представления продольных компонент поля и нормы вычисляются по известным формулам. Таким образом,

для вычисления интегралов связи необходимо получить аналитические представления для $\frac{\partial H_z(x, y)}{\partial n}$, $\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial n}$, $\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial l}$, а также “распределить” волны по соответствующим классам симметрии. Эта процедура не вызывает трудностей, поэтому останавливаться на ней мы не будем.

Определение размерности проекционного базиса

Для определения размерности проекционного базиса используется известное правило Миттры [10]:

$$\frac{N^{(\Omega)}}{N^{(\Delta)}} = \frac{D^{(\Omega)}}{D^{(\Delta)}},$$

где N^Ω и N^Δ – количество волн соответственно в волноводах Ω и Δ , D^Ω и D^Δ – площади соответствующих поперечных сечений. Для волноводов с произвольным поперечным сечением вычисление площади является отдельной задачей, поэтому в настоящей работе использована модификация правила Миттры, полученная в [9] с помощью теоремы Гильберта [11]:

$$\frac{N^{(\Omega)}}{N^{(\Delta)}} = \frac{K^{(\Omega)}(\chi_{\max})}{K^{(\Delta)}(\chi_{\max})}. \tag{13}$$

$K^\Omega(\chi_{\max})$ и $K^\Delta(\chi_{\max})$ – количество собственных чисел уравнения Гельмгольца с граничными условиями Неймана или Дирихле, не превосходящих χ_{\max} для сечений Ω и Δ . Таким образом, в каждом из волноводов необходимо учитывать все волны с критическими волновыми числами в диапазоне $(0, \chi_{\max})$.

Расчет матрицы рассеяния более сложной неоднородности

Для вычисления матрицы рассеяния более сложной волноводной неоднородности используется декомпозиционный подход

с обратной рекомпозицией матрицы рассеяния объекта [1, 12]. Рассмотрим схему численной реализации этого метода на примере последовательного соединения трех волноводов. Эта структура подразделяется на сочленения А и В волноводов 1, 2, 3. Вычислив матрицы рассеяния сочленений и записав поля прошедших и отраженных волн в каждой из волноводных секций, мы получаем требуемую матрицу рассеяния исходного объекта:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{AB}^{11} &= \hat{S}_A^{11} + \hat{S}_A^{12} \hat{E} \hat{S}_{AB}^{22} \hat{E} \hat{P}, \\ \hat{S}_{AB}^{31} &= \hat{S}_B^{32} \hat{E} \hat{P}, \\ \hat{S}_{AB}^{13} &= \hat{S}_A^{12} \hat{E} \hat{Q}, \\ \hat{S}_{AB}^{33} &= \hat{S}_A^{33} + \hat{S}_B^{32} \hat{E} \hat{S}_A^{22} \hat{E} \hat{Q}, \end{aligned} \tag{14}$$

где \hat{E} – диагональная матрица с элементами $E_{jj} = \exp(ig_j L)$, g_j – постоянные распространения собственных волн волновода 2, а L – расстояние между неоднородностями А и В; \hat{S}_A^{jp} и \hat{S}_B^{jp} обозначают матрицы преобразований волн p волновода в волны волновода j при анализе сочленений А и В, нижний индекс AB соответствует соединению трех волноводов; матрицы \hat{P} , \hat{Q} – решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (\hat{I} - \hat{S}_A^{22} \hat{E} \hat{S}_B^{22} \hat{E}) \hat{P} &= \hat{S}_A^{21}, \\ (\hat{I} - \hat{S}_B^{22} \hat{E} \hat{S}_A^{22} \hat{E}) \hat{Q} &= \hat{S}_B^{23}. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, подставляя решения (15) в (14), находим матрицу рассеяния исследуемой неоднородности.

Численные результаты

Для верификации численного алгоритма, созданного на основе описанного выше подхода, мы использовали структуры, состоящие из классических волноводов.

Первый пример – несоосное сочленение прямоугольного волновода с большим круглым [13]. Для вычислений использованы те же проекционные базисы, что и в [13] (14 TE - и 7 TM -волн). В рамках описанного подхода вместо стандартного прямоугольного волновода рассмотрена его модель с радиусами закругления углов 10^{-4} мм [5]. Сравнение полученных кривых с опубликованными результатами показало вполне удовлетворительное совпадение данных о рассеянии основной волны (рис. 4). Таблица 2 иллюстрирует процесс сходимости вычисленных коэффициентов отражения и прохождения при увеличении размеров проекционных базисов. Как видно, уже при 14 TE - и 7 TM -волнах ошибка расчета не превышает десятых долей децибела.

Результат более полной проверки расчета S -матрицы несоосного сочленения (при учете 14 TE - и 7 TM -волн прямо-

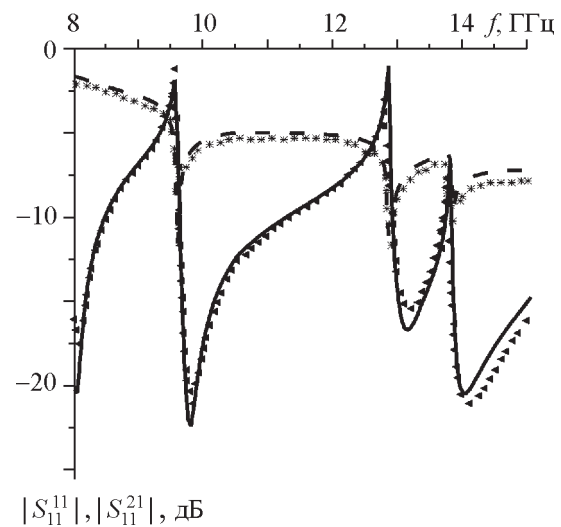


Рис. 4. Сравнение вычисленных коэффициентов отражения $|S_{11}^{11}|$ (сплошная линия) и прохождения $|S_{11}^{21}|$ (пунктирная линия) основной волны с опубликованными в [13] для случая сочленения прямоугольного волновода WR75 с круглым волноводом $R = 19.05$ мм ($dx = 3.175$ мм, $dy = 0.03175$ мм). Зависимости $|S_{11}^{11}|$ и $|S_{11}^{21}|$ из [13] маркированы треугольниками и звездочками соответственно

Таблица 2.

Частота, ГГц	Коэффициент прохождения S_{11}^{21} , дБ			Коэффициент отражения S_{11}^{11} , дБ		
	Базис прямоугольного волновода ($TE+TM$)					
	7+3	14+7	24+16	7+3	14+7	24+16
9.008	-6.29742	-6.49998	-6.60179	-2.87861	-2.79137	-2.80974
11.052	-10.4139	-10.3464	-10.4933	-5.04375	-4.95684	-4.98111
14.972	-15.4414	-15.1407	-15.0258	-7.48179	-7.28192	-7.31324

угольного волновода) представлен на примере круглого резонатора, образованного двумя описанными выше сочленениями (рис. 5). Во взаимодействии входного и выходного сочленений учитывалось 64 волноводных моды круглого волновода (в соответствии с (13)), причем на верхних частотах до 10 из них (включая несимметричные) являлись распространяющимися и реально влияли на результат расчета. Видно, что

в диапазоне до 14 ГГц точность расчета нашего алгоритма вполне удовлетворительна, расхождение результатов на более высоких частотах свидетельствует о необходимости повышения точности расчета частей модовых базисов, связанных с высшими модами.

Выводы

Полученные численные результаты иллюстрируют правомерность использования предложенного подхода для расчета матрицы рассеяния плоско-поперечного сочленения полых регулярных волноводов произвольной формы, а также диафрагм и расширений, составленных из таких волноводов. Созданные алгоритмы предполагается использовать при расчете разнообразных элементов СВЧ систем с учетом технологических погрешностей, например, для расчета волноводных диафрагм и направленных ответвителей с различными конфигурациями отверстий.

Работа выполнена в рамках проектов INTAS 01-0373, INTAS 04-83-3578.

Литература

1. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989. – 542 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – 680 с.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Изд-во техн.-теорет. лит., 1972. – 695 с.

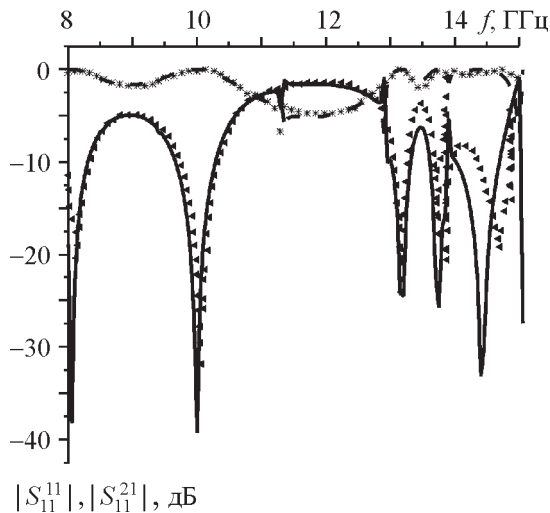


Рис. 5. Сравнение полученных коэффициентов отражения $|S_{11}^{11}|$ (сплошная линия) и прохождения $|S_{11}^{21}|$ (пунктирная линия) основной волны с опубликованными в [13] данными для неоднородности, состоящей из цилиндрического резонатора ($R = 13.589$ мм, $l = 40.9448$ мм) с выходными прямоугольными волноводами WR75 ($dx = 6.35$ мм, $dy = 4.826$ мм). Зависимости $|S_{11}^{11}|$ и $|S_{11}^{21}|$ из [13] маркированы треугольниками и звездочками соответственно

4. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: ГИЗ. Гостехиздат, 1948. – 296 с.
5. Дон Н. Г., Поединчук А. Е, Ткаченко В. И. Численно–аналитический метод расчета критических волновых чисел волноводов сложного поперечного сечения // Радиоп физика и электроника. – Харьков: Ин-т радиоп физики и электроники НАН Украины. – 2004. – Т. 9, №1. – С. 177-184.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1959. – 808 с.
7. Kirilenko A., Kulik D., Parkhomenko Yu., Rud L., Tkachenko V. Automatic electromagnetic solvers based on mode-matching, traverse resonance, and S-matrix techniques // Proc. of MICON. 2002 Conf. – Gdansk (Poland). – 2002. – Vol. 3. – P. 815-824.
8. Conciauro G., Bressan M., Zuffada C. Waveguide modes via an integral equation leading to a linear matrix eigenvalue problem // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1984. – Vol. 32, No. 11. – P. 1495-1504.
9. Дон Н. Г. Расчет матрицы рассеяния плоского соединения полых регулярных волноводов произвольного поперечного сечения // Радиоп физика и электроника. – Харьков: Ин-т радиоп физики и электроники НАН Украины. – 2005. – Т. 10, №1. – С. 39-45.
10. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 324 с.
11. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. – М.-Л.: Техтеориздат, 1951. – 476 с.
12. Kirilenko A., Kulik D., Parkhomenko Yu., Rud L., Tkachenko V. Decomposition approach to multilayer circuits electromagnetic modeling // Proc. of MMET. 2000 Conf. – Kharkov (Ukraine). – 2000. – P. 21-26
13. MacPhie P., Wu K. Scattering at the junction of a rectangular waveguide and a larger circular waveguide // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1995. – Vol. 43, No. 9. – P. 2041-2045.

Числова реалізація алгоритмів розрахунку хвилеводів складного поперечного перерізу з гладкими межами та їх з'єднань

**Н. Г. Дон, А. О. Кириленко,
В. І. Ткаченко**

Описано схему декомпозиційного підходу до обчислень матриць розсіяння плоских з'єднань хвилеводів з поперечними перерізами довільної форми, а також діафрагм та інших хвилеводних вузлів з таких з'єднань. Розрахунок хвилеводних базисів ґрунтується на розв'язанні граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу. Особливої уваги приділяється специфіці числової реалізації кожного з етапів наведеного підходу.

Numerical Implementation of Algorithms for Calculating Waveguides of Compound Cross-Sections with Smooth Boundaries and Waveguide Junctions

**N. G. Don, A. A. Kirilenko,
and V. I. Tkachenko**

Described is the scheme of a decomposition approach to the calculation of the S-matrix of plane junctions formed by waveguides of arbitrary cross-sections as well as the characteristics of irises and other waveguide components consisting of such junctions. The mode basis is computed through the solution of the boundary potential theory integral equations. Special emphasis is laid on the numerical implementation particularity for each stage of the approach described.