

Рассеяние электромагнитных волн двоякопериодическим магнитодиэлектрическим слоем

Н. В. Сидорчук, В. В. Ячин

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина
E-mail: ryazan@rian.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 15 июля 2004 г.

В работе решается задача рассеяния электромагнитных волн двоякопериодическим магнитодиэлектрическим слоем с помощью интегральных уравнений макроскопической электродинамики. Исходные уравнения методом Галеркина сводятся к системе дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Получены выражения для рассеянных полей в широком частотном диапазоне, включающем резонансную область. Представлены графики характеристик рассеяния для диэлектрических и проводящих двоякопериодических структур.

Введение

Частотно-селективные слои (frequency-selective volumes (FSVs) в англоязычной научной литературе) и многослойные структуры (electromagnetic bandgap (EBG) structures), в которых электромагнитные волны определенных длин волн распространяться не могут, на данный момент являются объектами пристального внимания в научной литературе. Такие, в основном периодические, структуры имеют зоны пропускания и запираения, определяемые строением периода и видом трансляционной симметрии [1, 2]. Эти особенности позволяют формировать отражательные свойства многослойных структур. Элементы с данными свойствами используются в конструировании приборов СВЧ и оптического диапазонов [3, 4]. Например, для эффективной работы полосковой антенны подложка не должна канализировать энергию на рабочей частоте антенны. Для этого она может быть изготовлена из EBG материала с полосой запираения, лежащей в рабочем диапазоне антенны.

В вычислительном моделировании периодических структур традиционно использу-

ются метод моментов [5], конечно-разностные методы [6] и т. д. Как правило, эти методы имеют недостатки, связанные с требованием больших ресурсов памяти и времени счета: обычно время счета возрастает с увеличением высоты периодической структуры по степенному закону с показателем степени большим единицы. Метод, представленный в настоящей статье, значительно эффективнее, так как время счета возрастает линейно с увеличением количества слоев при использовании многослойной модели периодической структуры [7]. Каждый слой неоднородности представляет собой двоякопериодический магнитодиэлектрик с постоянными по толщине слоя диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями. Для исследования рассеяния на EBG структурах мы используем в качестве базовой модель двоякопериодического магнитодиэлектрического слоя.

Постановка задачи и метод численного решения

Исследуем рассеяние электромагнитной волны двоякопериодическим магнитодиэлектрическим слоем. В предлагаемом мето-

де решения в качестве исходных соотношений выступают интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Эти уравнения тождественны уравнениям Максвелла и удовлетворяют необходимым граничным условиям [8]. Симметрия уравнений относительно компонент электрического и магнитного полей позволяет легко получить решение задачи дифракции для случая параллельной поляризации падающей волны (вектор электрического поля параллелен плоскости падения) по известному решению для случая перпендикулярной поляризации. Решение для волн с иным типом поляризации можно получить путем наложения решений для этих двух ортогональных поляризаций. В работе будем рассматривать случай перпендикулярной поляризации.

Задача формулируется следующим образом: из области $z < 0$ под произвольным углом φ на двоякопериодический бесконечный слой падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна (рис. 1).

Периодическая ячейка слоя представляет собой косоугольный параллелепипед с произвольными размерами вдоль осей η_1 и η_2 , L_{η_1} и L_{η_2} – размеры периодов структуры вдоль соответствующих осей, β – угол между осями η_1 и η_2 . Комплексные относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости периодической ячейки зависят от координат и обозначаются соот-

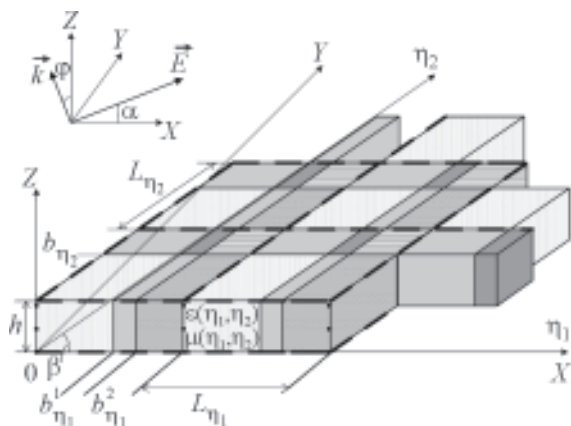


Рис. 1. Геометрия задачи

ветственно $\varepsilon(\eta_1, \eta_2)$ и $\mu(\eta_1, \eta_2)$, h – толщина слоя. Полагаем, что α – это угол между осью η_1 , совпадающей с осью x , и вектором электрического поля \vec{E} , лежащим в плоскости слоя. Будем рассматривать компоненты поля в ортогональной системе координат (x, y, z) и получим выражения для прошедшего и отраженного полей вблизи слоя.

Для решения поставленной задачи будем использовать интегральные уравнения макроскопической электродинамики [8]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi}(\nabla\nabla + k^2) \times \int_V [\varepsilon(\vec{r}') - 1] \vec{E}(\vec{r}') G(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' + \frac{ik}{4\pi} \nabla \times \int_V [\mu(\vec{r}') - 1] \vec{H}(\vec{r}') G(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}', \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi}(\nabla\nabla + k^2) \times \int_V [\mu(\vec{r}') - 1] \vec{H}(\vec{r}') G(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' - \frac{ik}{4\pi} \nabla \times \int_V [\varepsilon(\vec{r}') - 1] \vec{E}(\vec{r}') G(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}'.$$

Здесь $\vec{E}_0(\vec{r}) = (E_{0x}\vec{x}_0 + E_{0y}\vec{y}_0) \exp(i\vec{k}\vec{r})$ и $\vec{H}_0(\vec{r}) = (H_{0x}\vec{x}_0 + H_{0y}\vec{y}_0 + H_{0z}\vec{z}_0) \exp(i\vec{k}\vec{r})$ – напряженности падающего электромагнитного поля; V – объем рассеивающей структуры, в данном случае бесконечного двоякопериодического слоя; k – волновое число; \vec{r} – радиус-вектор точки наблюдения; \vec{r}' – радиус-вектор точки интегрирования, $\vec{r}' \in V$; G – функция Грина свободного пространства. Зависимость электромагнитных полей от времени предполагается в виде $\exp(-i\omega t)$, в дальнейших выкладках этот множитель опускается.

Будем искать пространственный спектр дифрагированного поля. Волны в таких сложных структурах не удастся разделить на поперечно-электрические и поперечно-

магнитные, поэтому будем включать в рассмотрение все шесть компонент электромагнитного поля, а именно: E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z . Из векторных выражений (1) можно получить шесть скалярных соотношений с указанными компонентами в левой части.

На первом этапе решения задачи (см. [8]) найдем внутренние поля рассеивающей структуры, считая, что точка наблюдения, заданная радиус-вектором \vec{r} , находится внутри слоя. В этом случае в левой части выражений (1) и в правой части под интегралами содержатся одни и те же напряженности электрического и магнитного полей, а именно полей внутри рассеивающего тела, и эти выражения превращаются в интегральные уравнения, позволяющие выразить внутреннее поле через поле падающей волны.

Предположим, что периодическая ячейка разделена на параллелепипеды с постоянными материальными параметрами. Координаты точек, попадающих в такой сегмент с номером (k, l) , будем помечать соответствующими индексами, т. е.

$\eta_1^k \in [b_{\eta_1}^{k-1}, b_{\eta_1}^k)$, $\eta_2^l \in [b_{\eta_2}^{l-1}, b_{\eta_2}^l)$, при этом обозначим $\varepsilon(\vec{r}'_{kl}) = \varepsilon_{kl}$ и $\mu(\vec{r}'_{kl}) = \mu_{kl}$. На рис. 1 разные сегменты отличаются штриховкой.

Следуя процедуре метода Галеркина, представим поле в каждом сегменте с номером (k, l) в виде разложения по пространственным гармоникам с номерами (r, s) [9]. Тогда для компоненты поля в сегменте с номером (k, l) можно записать:

$$E_x^{kl}(\vec{r}^{kl}) = E_{0x} e^{i(k_x x^{kl} + k_y y^{kl} + k_z z)} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \times \right. \\ \times \sum_t \sum_u \int_{V_{tu}} \sum_r \sum_s E_{x,rs}^{tu}(z') e^{i\psi_r x'} e^{i\theta_{rs} y'} G(\vec{r}^{tu}, \vec{r}') d\vec{r}' + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sum_{t,u} \int_{V_{tu}} \sum_{r,s} E_{y,rs}^{tu}(z') e^{i\psi_r x'} e^{i\theta_{rs} y'} G(\vec{r}^{tu}, \vec{r}') d\vec{r}' + \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \sum_{t,u} \int_{V_{tu}} \sum_{r,s} E_{z,rs}^{tu}(z') e^{i\psi_r x'} e^{i\theta_{rs} y'} G(\vec{r}^{tu}, \vec{r}') d\vec{r}' \right\} +$$

$$+ \frac{ik}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{t,u} \int_{V_{tu}} \sum_{r,s} H_{z,rs}^{tu}(z') e^{i\psi_r x'} e^{i\theta_{rs} y'} G(\vec{r}^{tu}, \vec{r}') d\vec{r}' - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \sum_{t,u} \int_{V_{tu}} \sum_{r,s} H_{y,rs}^{tu}(z') e^{i\psi_r x'} e^{i\theta_{rs} y'} G(\vec{r}^{tu}, \vec{r}') d\vec{r}' \right\}, \quad (2)$$

где

$$\psi_r = k_x + \frac{2\pi r}{L_{\eta_1}}, \quad \theta_{rs} = k_y + \frac{2\pi}{\sin \beta} \left(\frac{s}{L_{\eta_2}} - \frac{r}{L_{\eta_1}} \cos \beta \right),$$

V_{tu} – объем сегмента периодической ячейки с номером (t, u) . Аналогичные выражения можно записать и для остальных компонент поля.

С учетом сингулярности функции Грина при дальнейшем решении задачи возникает вопрос о корректности внесения операции двойного дифференцирования по координатам x, y, z под знак интеграла. Исследование этой проблемы с применением различных способов локализации сингулярности привело к выводу, что для данной структуры, обладающей выделенным направлением (вдоль оси z), в выражениях вида (2) для компонент поля $E_z^{kl}(\vec{r}^{kl})$ и $H_z^{kl}(\vec{r}^{kl})$ оправдана замена

$$\frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial z^2} + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \\ = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial y^2}.$$

Можно показать, что двойное дифференцирование функции Грина по координатам x и y под знаком интеграла в нашем случае вполне корректно.

Далее нетрудно получить выражения для объемных интегралов в правой части скалярных уравнений (2). Например, для компоненты E_x имеем:

$$\sum_t \sum_u \int_{V_{tu}} \sum_r \sum_s E_{x,rs}^{tu}(z') e^{i\psi_r x'} e^{i\theta_{rs} y'} G(\vec{r}^{tu}, \vec{r}') d\vec{r}' =$$

$$= 2\pi i \sum_r \sum_s \frac{e^{i\psi_r x'} e^{i\theta_{rs} y'}}{\chi_{rs}} \sum_t \sum_u \int_0^h E_{x,rs}^{tu}(z') e^{i|z-z'|\chi_{rs}} dz', \quad (3)$$

где $\chi_{rs} = \sqrt{k^2 - \psi_r^2 - \theta_{rs}^2}$.

Введем обозначения:

$$I_{x,rs}^{kl} = \frac{1}{\chi_{rs}} \int_0^h E_{x,rs}^{kl}(z') e^{i|z-z'|\chi_{rs}} dz', \quad (4)$$

$$M_{x,rs}^{kl} = \frac{1}{\chi_{rs}} \int_0^h H_{x,rs}^{kl}(z') e^{i|z-z'|\chi_{rs}} dz'$$

и примем во внимание, что

$$E_{x,rs}^{kl} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} I_{x,rs}^{kl} + \chi_{rs}^2 I_{x,rs}^{kl} \right). \quad (5)$$

Затем, в результате действия на уравнения для компонент поля линейным оператором [9], получаем систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функционалов компонент поля I_x , I_y , I_z и M_x , M_y , M_z вида (4). Например, первый блок уравнений этой системы (с компонентой E_x в левой части) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\epsilon_{kl} - 1} \left(\frac{\partial^2 I_{x,pq}}{\partial z^2} + \chi_{pq}^2 I_{x,pq} \right) = 2i X_p^k Y_q^l E_{0x} e^{ik_z z} -$$

$$- \sum_r \sum_s X_{p-r}^k Y_{q-s}^l \left\{ (k^2 - \psi_r^2) \sum_t \sum_u I_{x,rs}^{tu} - \right.$$

$$- \psi_r \theta_{rs} \sum_t \sum_u I_{y,rs}^{tu} + i\psi_r \frac{\partial}{\partial z} \sum_t \sum_u I_{z,rs}^{tu} +$$

$$\left. + ik \left[i\theta_{rs} \sum_t \sum_u M_{z,rs}^{tu} - \frac{\partial}{\partial z} \sum_t \sum_u M_{y,rs}^{tu} \right] \right\}, \quad (6)$$

где

$$X_p^k = \frac{b_{\eta_1}^k}{L_{\eta_1}} e^{-i\pi p \frac{b_{\eta_1}^k}{L_{\eta_1}}} \frac{\sin\left(\pi p \frac{b_{\eta_1}^k}{L_{\eta_1}}\right)}{\pi p \frac{b_{\eta_1}^k}{L_{\eta_1}}}$$

$$- \frac{b_{\eta_1}^{k-1}}{L_{\eta_1}} e^{-i\pi p \frac{b_{\eta_1}^{k-1}}{L_{\eta_1}}} \frac{\sin\left(\pi p \frac{b_{\eta_1}^{k-1}}{L_{\eta_1}}\right)}{\pi p \frac{b_{\eta_1}^{k-1}}{L_{\eta_1}}},$$

$$Y_q^l = \frac{b_{\eta_2}^l}{L_{\eta_2}} e^{-i\pi q \frac{b_{\eta_2}^l}{L_{\eta_2}}} \frac{\sin\left(\pi q \frac{b_{\eta_2}^l}{L_{\eta_2}}\right)}{\pi q \frac{b_{\eta_2}^l}{L_{\eta_2}}}$$

$$- \frac{b_{\eta_2}^{l-1}}{L_{\eta_2}} e^{-i\pi q \frac{b_{\eta_2}^{l-1}}{L_{\eta_2}}} \frac{\sin\left(\pi q \frac{b_{\eta_2}^{l-1}}{L_{\eta_2}}\right)}{\pi q \frac{b_{\eta_2}^{l-1}}{L_{\eta_2}}}.$$

Количество уравнений в блоке соответствует количеству учитываемых гармоник.

Просуммировав уравнения для каждого отдельного сегмента по всем сегментам и произведя несложные преобразования, получим выражение, позволяющее найти электромагнитное поле в одном сегменте периода, например с номером (k, l) , по известному полю в другом сегменте с номером (k', l') :

$$\|E_{x,pq}^{kl}\| = \frac{\epsilon_{kl} - 1}{\epsilon_{k'l'} - 1} A^{kl} (A^{k'l'})^{-1} \|E_{x,pq}^{k'l'}\|, \quad (7)$$

где $\|E_{x,pq}^{kl}\|$ – вектор-столбец, содержащий компоненты поля E_x для всех простран-

ственных гармоник. Если в решении учитывать пространственные гармоники с номерами $-N_x, \dots, 0, \dots, N_x$ по оси x и с номерами $-N_y, \dots, 0, \dots, N_y$ по оси y , то матрица в выражении (7) будет иметь вид:

$$A^{kl} = \begin{pmatrix} S_0^{kl} & S_{-1}^{kl} & \dots & S_{-2N_y}^{kl} \\ S_1^{kl} & S_0^{kl} & \dots & S_{-2N_y+1}^{kl} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{2N_y}^{kl} & S_{2N_y-1}^{kl} & \dots & S_0^{kl} \end{pmatrix},$$

где

$$S_j^{kl} = \begin{pmatrix} X_0^k & X_{-1}^k & \dots & X_{-2N_x}^k \\ X_1^k & X_0^k & \dots & X_{-2N_x+1}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{2N_x}^k & X_{2N_x-1}^k & \dots & X_0^k \end{pmatrix} \cdot Y_j^l,$$

$$j = 0, 1, \dots, 2N_y.$$

Матрица A^{kl} представляет собой блочную теплицевую матрицу, каждый блок которой, в свою очередь, является теплицевой матрицей. Соотношения для других компонент поля аналогичны выражению (7).

Используя выражения (5) и (7), можно также выразить функционалы компонент поля для одного сегмента периодической ячейки через функционалы другого сегмента.

Поэтому будем решать систему линейных дифференциальных уравнений для одного из сегментов, а именно с номером (k, l) , который в дальнейших выкладках будет опускаться.

Сначала понизим порядок уравнений, для чего введем обозначения:

$$y_1 = \frac{\partial}{\partial z} I_x, \quad y_2 = I_x, \quad y_3 = \frac{\partial}{\partial z} I_y, \quad y_4 = I_y \text{ и т. д.}$$

Будем искать решение такой системы уравнений в виде $y_j = \exp(\lambda z) U_j$, здесь y_j и U_j – вектор-столбцы ранга $(2N_x + 1)(2N_y + 1)$,

т. е. каждый вектор-столбец соответствует определенной компоненте поля, а каждый элемент вектор-столбца соответствует определенной пространственной гармонике.

После некоторых переобозначений и преобразований первый блок уравнений системы (6) в матричном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon - 1} (\lambda^2 + X^2) \tilde{U}_1 &= \\ &= 2iBE_{0x} e^{ik_z z} - A \left\{ (k^2 - \Psi^2) (\lambda^2 + X^2)^{-1} \hat{T}_\epsilon \tilde{U}_1 - \right. \\ &- \Psi \Theta (\lambda^2 + X^2)^{-1} \hat{T}_\epsilon \tilde{U}_2 + i\Psi \lambda (\lambda^2 + X^2)^{-1} T_\epsilon \tilde{U}_6 + \\ &\left. + ik \left[i\Theta (\lambda^2 + X^2)^{-1} T_\mu \tilde{U}_5 - \lambda (\lambda^2 + X^2)^{-1} \hat{T}_\mu \tilde{U}_4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь \tilde{U}_j и $B = \|X_p Y_q\|$ – вектор-столбцы; Ψ , Θ , X – диагональные матрицы, содержащие соответственно постоянные распространения ψ , θ , χ для различных пространственных гармоник;

$$T_\epsilon =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{t}_{-N_x, -N_x}^{-N_x, -N_x} & \hat{t}_{-N_x, -N_x}^{-N_x+1, -N_x} & \dots & \hat{t}_{-N_x, -N_x}^{r,s} & \dots & \hat{t}_{-N_x, -N_x}^{N_x, N_x} \\ \hat{t}_{-N_x+1, -N_x}^{-N_x, -N_x} & \hat{t}_{-N_x+1, -N_x}^{-N_x+1, -N_x} & \dots & \hat{t}_{-N_x+1, -N_x}^{r,s} & \dots & \hat{t}_{-N_x+1, -N_x}^{N_x, N_x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{t}_{p,q}^{-N_x, -N_x} & \hat{t}_{p,q}^{-N_x+1, -N_x} & \cdot & \hat{t}_{p,q}^{r,s} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{t}_{N_x, N_x}^{-N_x, -N_x} & \hat{t}_{N_x, N_x}^{-N_x+1, -N_x} & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{t}_{N_x, N_x}^{N_x, N_x} \end{pmatrix};$$

$$\hat{T}_\epsilon = \|\hat{t}_{p,q}^{r,s}\|, \quad \text{где}$$

$$\hat{t}_{p,q}^{r,s} = \sum_t \sum_u \frac{\epsilon_{tu} - 1}{\epsilon_{tu}} X_{p-r}^t Y_{q-s}^u,$$

$$\hat{t}_{p,q}^{r,s} = \sum_t \sum_u (\epsilon_{tu} - 1) X_{p-r}^t Y_{q-s}^u.$$

В аналогичных выражениях для T_μ и \hat{T}_μ вместо ϵ фигурирует μ .

Таким образом, мы получили систему неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка вида (8). Соответствующую систему однородных дифференциальных уравнений можно несложными линейными преобразованиями привести к виду:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + K & L \\ M & \lambda^2 + N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$K = (I + \hat{T}_\mu) \left[X^2 + (k^2 - \Psi^2) \hat{T}_\epsilon + \hat{T}_\mu (I + \hat{T}_\mu)^{-1} \Psi (I - T_\epsilon) \Psi (I + \hat{T}_\mu) + \Theta T_\mu \Theta + \Psi T_\epsilon \Psi (I + \hat{T}_\epsilon) \right],$$

$$L = (I + \hat{T}_\mu) \times \left[-\Psi \Theta \hat{T}_\epsilon + \hat{T}_\mu (I + \hat{T}_\mu)^{-1} \Psi (I - T_\epsilon) \Theta (I + \hat{T}_\mu) - \Theta T_\mu \Psi + \Psi T_\epsilon \Theta (I + \hat{T}_\epsilon) \right],$$

$$M = (I + \hat{T}_\mu) \times \left[-\Psi \Theta \hat{T}_\epsilon + \hat{T}_\mu (I + \hat{T}_\mu)^{-1} \Theta (I - T_\epsilon) \Psi (I + \hat{T}_\mu) - \Psi T_\mu \Theta + \Theta T_\epsilon \Psi (I + \hat{T}_\epsilon) \right],$$

$$N = (I + \hat{T}_\mu) \left[X^2 + (k^2 - \Theta^2) \hat{T}_\epsilon + \hat{T}_\mu (I + \hat{T}_\mu)^{-1} \Theta (I - T_\epsilon) \Theta (I + \hat{T}_\mu) + \Psi T_\mu \Psi + \Theta T_\epsilon \Theta (I + \hat{T}_\epsilon) \right],$$

I – единичная матрица. Условием существования нетривиального решения этой систе-

мы является равенство нулю определителя матрицы:

$$\det \begin{vmatrix} \lambda^2 + K & L \\ M & \lambda^2 + N \end{vmatrix} = 0.$$

Общее решение однородной системы уравнений находится путем численного отыскания собственных чисел и собственных векторов матрицы системы. Характеристическое матричное уравнение в нашем случае записывается относительно λ^2 , вследствие чего одному собственному вектору матрицы соответствует два собственных числа $\pm \lambda$. Частное решение неоднородной системы ищется по виду свободного члена. Окончательно решение системы (6) или (8) представляется в виде суммы:

$$\begin{vmatrix} \sum_t \sum_u \|I_{x,pq}^{tu}\| \\ \sum_t \sum_u \|I_{y,pq}^{tu}\| \\ \sum_t \sum_u \|M_{x,pq}^{tu}\| \\ \sum_t \sum_u \|M_{y,pq}^{tu}\| \\ \sum_t \sum_u \|M_{z,pq}^{tu}\| \\ \sum_t \sum_u \|I_{z,pq}^{tu}\| \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{4(2N_x+1)(2N_y+1)} C_j e^{\lambda_j z} \times \begin{vmatrix} \|W_{1,j,pq}\| \\ \|W_{2,j,pq}\| \\ \|W_{3,j,pq}\| \\ \|W_{4,j,pq}\| \\ \|W_{5,j,pq}\| \\ \|W_{6,j,pq}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{p0} \delta_{q0} \frac{2i}{k^2} E_{0x} e^{ik_z z} \|V_{pq}\| \\ \delta_{p0} \delta_{q0} \frac{2i}{k^2} E_{0y} e^{ik_z z} \|V_{pq}\| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

где $I_x, I_y, M_x, M_y, M_z, I_z$ – вектор-столбцы, размерность которых соответствует количеству учитываемых гармоник; V – вектор-столбец той же размерности, состоящий из единиц; pq – индекс, соответствующий определенной пространственной гармонике, p пробегает целые значения от $-N_x$ до N_x , а q – от $-N_y$ до N_y ; δ – символ Кронекера; $W_{1,j}, \dots, W_{6,j}$ – вектор-столбцы, связанные с компонентами собственного вектора матрицы системы и соответствующие собственному числу λ_j ; C_j – произвольные константы общего решения однородной системы. При этом вектор-столбцы $W_{3,j}, \dots, W_{6,j}$ представлены линейной комбинацией вектор-столбцов $W_{1,j}$ и $W_{2,j}$. Теперь, используя соотношение (5), мы можем выразить компоненты электромагнитного поля через соответствующие интегральные функционалы, для которых получено решение (9). Таким образом,

$$\begin{aligned} & \sum_t \sum_u \|E_{x,pq}^{tu}\| = \\ & = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{4(2N_x+1)(2N_y+1)} C_j e^{\lambda_j z} (\lambda_j^2 + \chi_{pq}^2) \|W_{1,j,pq}\| + \\ & + \delta_{p0} \delta_{q0} \frac{1}{k^2} E_{0x} e^{ik_z z} (\chi_{00}^2 - k_z^2) \|V_{pq}\|. \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов C_j , имеющих смысл амплитуд характеристических волн, будем использовать принцип погашения [8]. В соответствии с этим принципом поля вторичных волн в структуре представляются в виде суммы двух слагаемых, одно из которых имеет такую же постоянную распространения, как и у падающей волны, и гасит ее, тогда как другое характеризует собственные волны, распространяющиеся в структуре. Постоянные распространения этих волн определяются диэлектрической и магнитной проницаемостями среды. Поэтому можно сказать, что падающая волна гасится в любой точке внутри структуры в результате интерференции поля падающей волны и полей вторичных

волн. Будем искать амплитуды характеристических волн. Примем во внимание, что

$$\begin{aligned} & \int_0^h E_{x,rs}(z') e^{i(z-z')\chi_{rs}} dz' = \\ & = \int_0^z E_{x,rs}(z') e^{i(z-z')\chi_{rs}} dz' + \int_z^h E_{x,rs}(z') e^{i(z'-z)\chi_{rs}} dz', \end{aligned}$$

и выполним необходимое интегрирование по z' :

$$\begin{aligned} & \sum_t \sum_u \int_0^z \|E_{x,rs}^{tu}(z')\| e^{i(z-z')\chi_{rs}} dz' = \frac{1}{2i} \times \\ & \times \sum_{j=1}^{4(2N_x+1)(2N_y+1)} C_j (e^{\lambda_j z} - e^{i\chi_{rs} z}) (\lambda_j + i\chi_{rs}) \|W_{1,j,rs}\| - \\ & - \delta_{r0} \delta_{s0} \frac{\chi_{00} + k_z}{ik^2} E_{0x} (e^{ik_z z} - e^{i\chi_{00} z}) \|V_{rs}\|, \\ & 0 < z' < z; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & \sum_t \sum_u \int_z^h \|E_{x,rs}^{tu}(z')\| e^{i(z'-z)\chi_{rs}} dz' = \\ & = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{4(2N_x+1)(2N_y+1)} C_j (e^{-iz\chi_{rs}} e^{(i\chi_{rs} + \lambda_j)h} - e^{\lambda_j z}) \times \\ & \times (\lambda_j - i\chi_{rs}) \|W_{1,j,rs}\|, \\ & z < z' < h. \end{aligned}$$

Теперь можно продифференцировать выражения (10) по переменным x, y, z и подставить полученные соотношения в систему уравнений для интегральных функционалов (6). Суммы коэффициентов при линейно независимых экспоненциальных функциях $\exp(i\chi_{rs} z)$ и $\exp(-i\chi_{rs} z)$ в правой части уравнений должны независимо друг от друга обращаться в нуль, поскольку слева таких множителей нет. Следовательно, мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд характеристических волн C_j , где правые части будут определяться падающей волной.

Систему решаем численно, определив таким образом внутреннее электромагнитное поле структуры вида (9).

Теперь, на втором этапе задачи, мы можем найти внешнее рассеянное поле, используя исходные соотношения (2) и выражение для интеграла по объему рассеивающей структуры (3). Для прошедшего поля, т. е. при $z > z'$, можно получить

$$\begin{aligned} & \sum_t \sum_u \int_0^h \|E_{x,rs}^{tu}(z')\| e^{i(z-z')\chi_{rs}} dz' = \frac{e^{i\chi_{rs}z}}{2i} \times \\ & \times \sum_{j=1}^{4(2N_x+1)(2N_y+1)} C_j \left(e^{(\lambda_j - i\chi_{rs})h} - 1 \right) (\lambda_j + i\chi_{rs}) \|W_{1,j,rs}\| - \\ & - \delta_{r0} \delta_{s0} \frac{\chi_{00} + k_z}{ik^2} E_{0x} e^{i\chi_{00}z} \left(e^{ih(k_z - \chi_{00})} - 1 \right) \|V_{rs}\|, \end{aligned} \quad (11)$$

в то время как для отраженного поля, когда $z < z'$, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_t \sum_u \int_0^h \|E_{x,rs}^{tu}(z')\| e^{i(z'-z)\chi_{rs}} dz' = \frac{e^{-i\chi_{rs}z}}{2i} \times \\ & \times \sum_{j=1}^{4(2N_x+1)(2N_y+1)} C_j \left(e^{(\lambda_j + i\chi_{rs})h} - 1 \right) (\lambda_j - i\chi_{rs}) \|W_{1,j,rs}\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя полученные выражения (11), (12) и производные от них в соотношения (3) и затем в (2), получаем решение поставленной задачи. Например, E_x -компоненты прошедшего и отраженного полей выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x^{tr}(x, y, z) = & \frac{1}{4} \sum_r \sum_s \frac{e^{i(\psi_r x + \theta_{rs} y + \chi_{rs} z - h)}}{\chi_{rs}} \times \\ & \times \sum_j C_j e^{\lambda_j h} (\lambda_j + i\chi_{rs}) \left\{ (k^2 - \psi_r^2) W_{1,j,rs} - \right. \\ & \left. - \psi_r \theta_{rs} W_{2,j,rs} - \theta_{rs} W_{5,j,rs} + \chi_{rs} W_{4,j,rs} - \psi_r \chi_{rs} W_{6,j,rs} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x^{\text{ref}}(x, y, z) = & -\frac{1}{4} \sum_r \sum_s \frac{e^{i(\psi_r x + \theta_{rs} y - \chi_{rs} z)}}{\chi_{rs}} \times \\ & \times \sum_j C_j (\lambda_j - i\chi_{rs}) \left\{ (k^2 - \psi_r^2) W_{1,j,rs} - \right. \\ & \left. - \psi_r \theta_{rs} W_{2,j,rs} - \theta_{rs} W_{5,j,rs} - \chi_{rs} W_{4,j,rs} + \psi_r \chi_{rs} W_{6,j,rs} \right\}. \end{aligned}$$

Для остальных пяти компонент электромагнитного поля можно получить аналогичные соотношения.

Решение задачи можно получить и в случае плавного изменения материальных параметров двоякопериодического слоя. Для этого необходимо устремить к бесконечности количество сегментов разбиения периодической ячейки с одновременным устремлением к нулю их размеров. В результате в уравнениях (8) суммы заменяются соответствующими интегралами, а именно:

$$\begin{aligned} \hat{t}_{p,q}^{r,s} = & \frac{1}{L_{\eta_1} L_{\eta_2}} \times \\ & \times \int_0^{L_{\eta_1}} \int_0^{L_{\eta_2}} [\varepsilon(\eta_1, \eta_2) - 1] e^{-\frac{2\pi(p-r)}{L_{\eta_1}} \eta_1} e^{-\frac{2\pi(q-s)}{L_{\eta_2}} \eta_2} d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned}$$

Анализ численных результатов

Алгоритм решения поставленной задачи рассеяния был реализован в виде компьютерной программы, написанной на языке Фортран. Время счета одной точки с использованием компьютера на базе процессора Pentium II при учете 441 пространственной гармоники ($N_x = N_y = 10$) составляло около 45 минут. Достоверность расчетов подтверждалась тестированием рассчитываемых характеристик с увеличивающимся числом учитываемых пространственных гармоник. Когда разность между данными с различным числом учитываемых гармоник составляла менее 1%, значение вычисляемой характеристики считалось достоверным. Вычисления проводились в основном в целях тестирования.

тирования предложенного метода решения задач рассеяния, однако результаты расчетов могут быть полезны и для конкретных приложений. Закон сохранения энергии для непоглощающих структур выполнялся с точностью не менее 0.01 %. Проанализируем некоторые численные результаты.

В работе [10] была исследована подложка микрополосковой антенны, представляющая собой двоякопериодический диэлектрик, и получен коэффициент отражения от данной структуры при помощи конечно-разностного метода [6]. На рис. 2 приведены кривая, рассчитанная с помощью развитого выше метода (сплошная линия, в решении учитывалась 121 пространственная гармоника), и кривая из работы [10] (пунктирная линия). Размер периодической ячейки составлял 2×2 см, размер диэлектрической вставки – 1×1 см, толщина слоя – 0.2 см, рассматривалось нормальное падение волны.

При сравнении графиков можно видеть, что полученная нами кривая очень близка к рассчитанной в статье [10] и практически совпадает с ней в области первого резонанса, существование которого в этой статье подтверждается экспериментально.

Относительно структур из металла распространено мнение, что фактор конечной проводимости главным образом влияет на

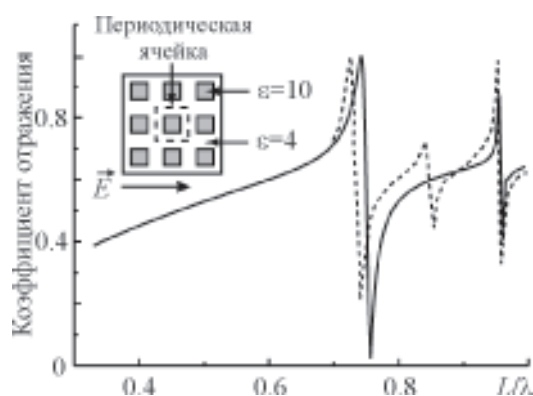


Рис. 2. Коэффициент отражения от диэлектрического слоя с квадратными диэлектрическими вставками

величину коэффициента отражения в максимуме, а ход кривых частотных зависимостей остается приблизительно таким же, как и для структур из идеального металла, вплоть до частот видимого диапазона [11]. Однако для двоякопериодических сред в оптическом диапазоне частот, где реальные металлы ведут себя как “плохие” диэлектрики (имеющие большие потери), такое утверждение становится не столь очевидным. В связи с этим необходимы исследования по сопоставлению картины рассеяния от структур, элементом которых является идеальный проводник, и структур с реальными значениями диэлектрической проницаемости элемента той же геометрии. Для сравнения нами были взяты достаточно распространённые модели бесконечно тонких идеально проводящих структур.

Дифракцию будем рассматривать в режиме, когда распространяется одна основная волна, т. е. отношение величины периода структуры к длине падающей волны составляет $L/\lambda \leq 1$. Толщина слоя выбиралась равной нескольким толщинам скин-слоя, но гораздо меньше толщины, при которой возникает первый интерференционный резонанс, что соответствует понятию “тонкого экрана”. В задаче рассеяния на экране с отверстиями в форме креста использовался принцип Бабинне.

Достоверные численные данные о коэффициенте отражения при дифракции на идеально проводящем тонком экране с отверстиями в форме круга и креста были взяты соответственно из работ [12] и [13].

На рис. 3 и 4 им соответствует пунктирная кривая с длинными штрихами; две кривые, сплошная и пунктирная, получены для проводника с $\epsilon = 10 + i424000000$ (диапазон $\lambda \approx 1.8$ см) при толщине слоя $h = 0.0003L$ с учетом различного количества пространственных гармоник, определяемого выражением $(2N + 1)^2$, где $N = N_x = N_y$; кривая, помеченная кружками, рассчитана для золота с $\epsilon = -157.92 + i21.414$ (диапазон $\lambda \approx 2$ мкм) при $h = 0.15L$.

На рис. 5 приведены результаты расчетов коэффициента отражения при рассеянии

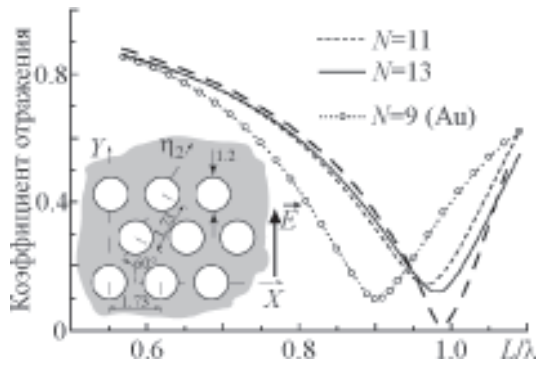


Рис. 3. Коэффициент отражения от проводящего экрана с круглыми отверстиями (нормальное падение)

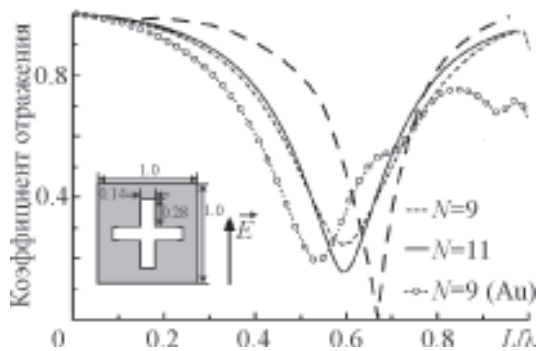


Рис. 4. Коэффициент отражения от проводящего экрана с крестообразными отверстиями (нормальное падение)

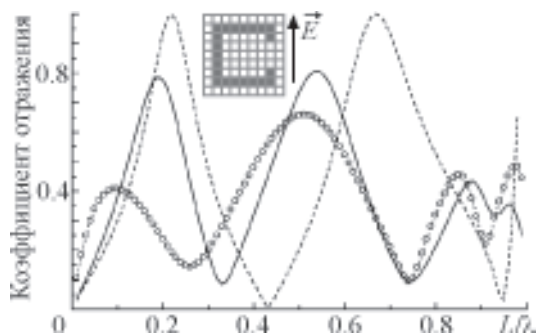


Рис. 5. Коэффициент отражения от решетки из проводящих С-образных элементов (нормальное падение)

волны на решетке из проводящих С-элементов и дана форма периодической ячейки такой структуры. Кривая для решетки из идеально проводящих бесконечно тонких С-элементов (пунктирная линия) была рассчитана при помощи метода, изложенного в статье [14]; сплошная линия представляет коэффициент отражения для решетки из реального проводника с $\epsilon = 10 + i424000000$ ($N = 11$); а кривая, помеченная кружками, рассчитана для элементов из золота ($N = 11$).

Анализ даже такого сравнительно небольшого количества данных позволяет сделать вывод, что для структур с явной симметрией (круг, крест и др.) характерные особенности резонансных кривых хорошо описываются моделями на основе идеального проводника. Поведение кривых коэффициента отражения остается неизменным при рассмотрении рассеяния на такого рода тонких проводящих периодических экранах, когда диэлектрическая проницаемость проводника изменяется вплоть до значений, отвечающих частотам оптического диапазона, с незначительным смещением резонансов, соответствующих минимуму коэффициента отражения, в длинноволновую область (рис. 3, 4). Когда же рассматривается дифракция на периодической проводящей структуре, симметрия которой нарушена, например, на решетке из С-элементов, ориентированных несимметрично относительно вектора возбуждающего поля (рис. 5), характер кривых коэффициентов рассеяния существенно зависит от значения диэлектрической проницаемости.

Выводы

В статье предложен новый метод исследования магнитодиэлектрических двоякопериодических структур, позволяющий исследовать проводящие структуры в диапазоне, близком к оптическому. Рассмотрено рассеяние на двоякопериодическом магнитодиэлектрическом слое. Такую задачу можно считать ключевой для рассмотрения рассеяния на магнитодиэлектрических двоякопериодических структурах, т. к. любую

двокопериодическую магнитоэлектрическую структуру мы можем аппроксимировать слоистой структурой, каждый слой которой однороден вдоль направления оси z . Показано, что идеально проводящие модели тонких двокопериодических структур можно использовать для рассмотрения взаимодействия с электромагнитным полем в широком диапазоне частот, вплоть до оптического, только для структур с явной симметрией периода.

Авторы выражают благодарность С. Л. Просвирнину за ряд ценных замечаний и обсуждение результатов работы.

Литература

1. Yablonovitch E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics // *Physical Review Letters*. – 1987. – Vol. 58, No. 20. – P. 2059-2062.
2. Yablonovitch E. Photonic Band-Gap Structures // *J. Opt. Soc. Am. B*. – 1993. – Vol. 10, No. 2. – P. 283-295.
3. Parker G. and Charlton M. Photonic Crystals // *Physics World*. – 2000. – Vol. 13, No. 8. – P. 29-34.
4. Yablonovitch E. Applied Physics – How to be Truly Photonic // *Science*. – 2000. – Vol. 289, No. 2. – P. 557-560.
5. Yang C., Durnside W. D., and Ruddack R. C. A Doubly Periodic Moment Method Solution for the Analysis and Design of an Absorber Covered Wall // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 1994. – Vol. 41, No. 5. – P. 600-609.
6. Taflov A. and Hagness S. C. *Computational Electromagnetics: the finite-difference-timedomain method*. – Norwood: Artech House Inc., 2000. – 279 p.
7. Yachin V. V. and Ryazantseva N. V. The Scattering of Electromagnetic Waves by a Periodic Magneto-dielectric Structures with Arbitrary Profiles and Inhomogeneous Media // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. – 1997. – Vol. 11, No. 11. – P. 1349-1366.
8. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. – Киев: Наукова думка, 1986. – 280 с.
9. Сидорчук Н. В., Ячин В. В., Просвирнин С. Л. Длинноволновое приближение в задаче распространения электромагнитных волн в двупериодическом магнитоэлектрическом слое // *Радиофизика и электроника*. – 2002. – Т. 7, спец. вып. – С. 208-212.

10. Li Z., Erdemli Y. E., Volakis J. L., and Papalambros P. Y. Design Optimization of Conformal Antennas by Integrating Stochastic Algorithms With the Hybrid Finite-Element Method // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 2002. – Vol. 50, No. 5. – P. 676-684.
11. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1973. – 287 с.
12. Chen C. C. Transmission of Microwave Through Perforated Flat Plates of Finite Thickness // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* – 1971. – Vol. MTT-19, No. 5. – P. 475-481.
13. Rubin V. J. and Bertony H. L. Reflection from a Periodically Perforated Plane Using a Subsectional Current Approximation // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 1983. – Vol. AP-31, No. 6. – P. 829-836.
14. Просвирнин С. Л. Преобразование поляризации при отражении волн микрополосковой решеткой из элементов сложной формы // *Радиотехника и электроника*. – 1999. – Т. 44, №6. – С. 681-686.

Розсіяння електромагнітних хвиль двокопериодичним магнітодіелектричним шаром

Н. В. Сидорчук, В. В. Ячин

У роботі розв'язано задачу розсіяння електромагнітних хвиль двокопериодичним магнітодіелектричним шаром за допомогою інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки. Вихідні рівняння методом Гальоркіна зводяться до системи диференціальних рівнянь другого порядку із постійними коефіцієнтами. Отримано вирази для розсіяних полів у широкому частотному діапазоні, включно з резонансною областю. Надаються графіки характеристик розсіяння для діелектричних та провідних двокопериодичних структур.

Electromagnetic Wave Scattering by a Double-Periodic Magnetodielectric Layer

N. V. Sydoruk and V. V. Yachyn

The problem of electromagnetic wave scattering by a double-periodic magnetodielectric layer is resolved in terms of integral equations of macroscopic electrodynamics. The Galerkin technique is applied to reduce the initial equations to a set of second-order differential ones with constant coefficients. Expressions for the scattered fields have been obtained for a wide frequency range, the resonance region including. Scattering signature curves are shown for dielectric and conducting double-periodic structures.