

УДК 534.3+611.539

ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ ОБМЕЖЕНОЮ ОБЛАСТЮ ЗБУРЕНОЇ ТЕЧІЇ В ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ. ЧАСТИНА 2. ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 6.12.2004

Розглянуті частинні випадки розробленої раніше теорії генерації звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Досліджені ситуації, коли у згенерованому акустичному полі домінує внесок об'ємних квадруполів або поверхневих диполів. При цьому інтерес становлять такі потоки і форми локальних неоднорідностей геометрії каналів, при яких регіон збуреної за неоднорідністю течії займають рівномірно розподілені великі або малі вихори. Для розглянутих випадків отримані відповідні спрощені вирази для згенерованої акустичної енергії та проведені їх оцінки для характерних масштабів у області збурення.

Рассмотрены частные случаи разработанной ранее теории генерации звука ограниченной областью возмущенного течения в бесконечном прямом жесткостенном канале кругового поперечного сечения. Исследованы ситуации, когда в сгенерированном акустическом поле доминирует вклад объемных квадруполей или поверхностных диполей. При этом интерес представляют такие потоки и формы локальных неоднородностей геометрии каналов, при которых регион возмущенного за неоднородностью течения занимают равномерно распределенные большие либо малые вихри. Для рассмотренных случаев получены соответствующие упрощенные выражения для генерируемой акустической энергии и проведены их оценки для характерных масштабов в области возмущения.

Partial cases of the theory of noise generation by a limited region of a disturbed flow in an infinite straight rigid channel with circular cross-section, which has been developed earlier, are considered. In these cases the situations are studied when the contributions either from volume quadrupoles or surface dipoles dominate in generated acoustic field. Those flows and shapes of the channel local geometrical inhomogeneities are of interest, that result in large or small eddies are distributed uniformly in the disturbed flow region past the inhomogeneity. The corresponding simplified expressions for the acoustic power generated are obtained in the considered cases, and their estimates are carried out for the characteristic scales in the disturbed flow region.

ВСТУП

Дослідження течій у каналах є задачею, актуальною для нафто-газової промисловості, машинобудування, архітектури, комунального господарства, медицини тощо. Значний інтерес тут становлять збурення течій і поява акустичних ефектів у місцях локальних нерегулярностей геометрії каналів (налипань на стінках, зварювальних швів, стенозів). Очевидно, що у цьому випадку акустичне поле містить дані про параметри конструкції і середовища в зоні виникнення шумів, а отже існує можливість розроблення неінвазивних методів знаходження таких місць на основі аналізу поля [1–6]. Це можливо за наявності теорій, які, адекватно описуючи реологію, гідродинаміку і акустику течій в околі локальної нерегулярності геометрії каналу, встановлювали б кількісний зв'язок між характеристиками потоку і згенерованого звукового поля.

У попередній роботі [7] розроблено загальну теорію генерації звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. В рамках

цієї теорії встановлені кількісні зв'язки між характеристиками згенерованого звукового поля та параметрами каналу і течії в ньому. При цьому область збуреної течії моделювалася розподіленнями квадрупольними і дипольними джерелами (характеристики яких вважалися відомими), і були розглянуті випадки рівномірного та нерівномірного розподілу джерел.

У цій статті розглядаються частинні випадки зазначеної теорії. Зокрема, досліджуються ситуації, коли у згенерованому акустичному полі домінує внесок об'ємних квадруполів або поверхневих диполів. При цьому наголос робиться на таких потоках і формах локальних нерегулярностей геометрії каналів, при яких регіон збуреної за нерегулярністю течії займають рівномірно розподілені великомасштабні або дрібномасштабні вихорові утворення.

Стаття складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури і додатку. В першому розділі формулюється задача, а також наводиться і коротко аналізується отриманий в дослідженні [7] її загальний розв'язок. У другому і третьому розділах розглядаються частинні випадки загального

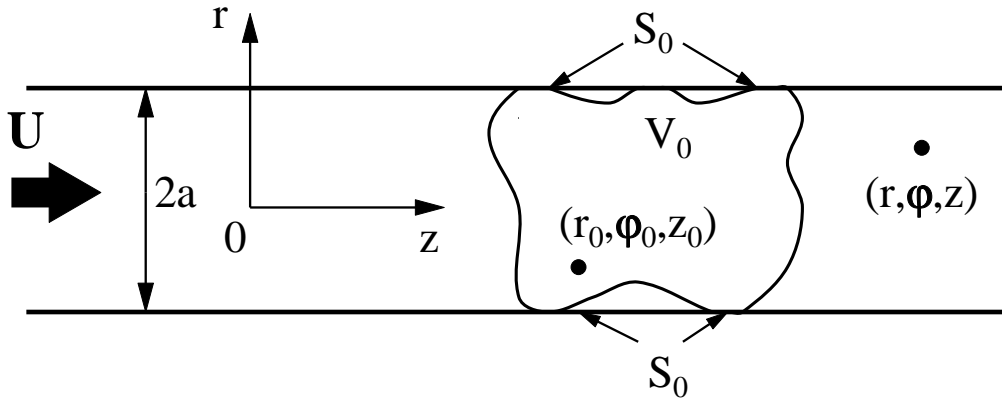


Рисунок. Геометрія задачі

розв'язку і проводяться відповідні оцінки згенерованої акустичної енергії. Далі формулюються висновки і наводяться списки цитованої літератури та прийнятих позначень.

1. ПОСТАНОВКА І ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Перш ніж переходити до розгляду частинних випадків розробленої у роботі [7] теорії генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в каналі, нагадаємо постановку самої задачі, а також наведемо і коротко проаналізуємо її загальний розв'язок.

Розглядається нескінченний прямий жорстко-стінний канал кругового поперечного перерізу радіусом a (див. рисунок), у якому з осью швидкістю U тече рідина з густиною ρ і в'язкістю ν . Течія характеризується малим числом Маха M ($M = U/c_0 \ll 1$, де c_0 – швидкість звуку в незбуреній рідині). У скінченному об'ємі V_0 течія збурена, і цей регіон збурення породжує в каналі акустичне поле. Необхідно знайти це поле і встановити кількісний зв'язок між його характеристиками та параметрами каналу й потоку.

Шукане акустичне поле описується рівнянням Лайтхіла, у якому права частина містить як об'ємні квадрупольні $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, так і зумовлені наявністю стінки поверхневі дипольні $\partial F_i / \partial y_i$ джерела [7–9]:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \quad (1)$$

$$0 < r < a, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad |z| < \infty.$$

Граничними умовами є відсутність радіальної

швидкості на стінці каналу:

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (2)$$

і умова випромінювання в нескінченність.

У співвідношеннях (1), (2) введено такі позначення: ρ_a і p_a – акустичні флуктуації густини і тиску, які зв'язані співвідношенням [7–9]

$$p_a = c_0^2 \rho_a;$$

$T_{ij} \approx \rho u_i u_j$ і $F_i = n_j (\tau_{ij} + p \delta_{ij})$ – напруження Лайтхіла та i -та компонента прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі (T_{ij} і F_i зникають відповідно за межами об'єму збуреної течії V_0 і поверхні S_0 , котра його обмежує); $\tau_{ij} = 2/3 \mu \epsilon_{kk} \delta_{ij} - 2 \mu \epsilon_{ij}$ – дотичні напруження, $\epsilon_{ij} = 1/2 (\partial u_i / \partial y_j + \partial u_j / \partial y_i)$ – швидкості деформації; n_j – j -та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу; u_i – i -та компонента швидкості рідини; p – тиск; $\mu = \rho \nu$ – динамічна в'язкість рідини; δ_{ij} – символ Кронекера. Крім цього, тут і надалі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

Гранична задача (1), (2) розв'язується у циліндричних координатах (r, ϕ, z) методом функцій Гріна [7, 9, 10]. Загальний вираз для акустичної енергії $P(\omega)$, згенерованої на частоті ω нерівномірно розподіленими в об'ємі V_0 квадрупольними і на поверхні S_0 дипольними джерелами, має такий ви-

гляд [7]:

$$\begin{aligned}
 P(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \\
 &\times \left[\iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \times \right. \\
 &\quad \times \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}(r'_0, \phi'_0) \times \\
 &\quad \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dV_0(\vec{r}'_0) + \\
 &\quad + \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \times \\
 &\quad \times \Psi_{nm}(a, \phi_0) \Psi_{nm}(a, \phi'_0) \times \\
 &\quad \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) + \\
 &\quad + 2\text{Re} \left(\iint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iint_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k} \times \right. \\
 &\quad \times \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}(a, \phi'_0) \times \\
 &\quad \left. \left. \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Тут $\vec{r} = (r, \phi, z)$ – радіус-вектор точки поля; $\vec{r}_0 = (r_0, \phi_0, z_0) \in V_0$ і $\vec{r}'_0 = (r'_0, \phi'_0, z'_0) \in V_0$ – радіус-вектори розташованих в об'ємі V_0 квадрупольних джерел; $\vec{r}_{0a} = \vec{r}_0|_{r_0=a} = (a, \phi_0, z_0) \in S_0$ і $\vec{r}'_{0a} = \vec{r}'_0|_{r'_0=a} = (a, \phi'_0, z'_0) \in S_0$ – радіус-вектори дипольних джерел, розташованих на поверхні S_0 ; $dV_0(\vec{r}_0) = r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0$ і $dS_0(\vec{r}_{0a}) = a d\phi_0 dz_0$ – елементи об'єму та площі; $\Psi_{nm}(r, \phi) = J_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\phi)$ – акустичні моди каналу. Квадрати норми мод $\|\Psi_{nm}\|^2$ визначаються як

$$\begin{aligned}
 \|\Psi_{nm}\|^2 &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^2(r, \phi) r dr d\phi = \\
 &= \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a), & n = 0, \\ (\pi a^2 / 2) J_n^2(\alpha_{nm} a) [1 - (n^2 / \alpha_{nm}^2 a^2)], & n \geq 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

де J_n – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n ; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm} / a$ – радіальні хвильові числа, ζ_{nm} – корені рівняння $J'_n(\zeta_{nm}) = 0$ ($m = 1, 2, \dots$); $k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}$ – осьові хвильові числа; $k_0 = \omega / c_0$ – акустичне хвильове число. Крім

цього, у співвідношенні (3) функції S_{ijkl}^T та S_{ik}^F є взаємними спектрами образів Фур'є напружень Лайтхіла T_{ij} :

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \tilde{T}_{kl}(\vec{r}'_0, \omega') \rangle$$

і компонент прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі F_k :

$$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{F}_i^*(\vec{r}_{0a}, \omega) \tilde{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle,$$

S_{ijk}^{TF} – взаємний спектр образів Фур'є напружень Лайтхіла T_{ij} і сил F_k :

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \tilde{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle;$$

$\text{Re}(\cdot)$ означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини, а функція знаку $\text{sign}(z - z_0)$ позитивна, якщо оцінки енергії проводяться вниз за течією від розташованих у поперечному перерізі каналу $z = z_0$ джерел, і негативна, якщо вгору за течією. Положення частоти ω відносно критичних частот каналу

$$\omega_{nm} = c_0 \alpha_{nm} \tag{4}$$

визначає через хвильові числа k_{nm} в експоненті $\exp(-\text{sign}(z - z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0))$ випадки однорідних ($\omega \geq \omega_{nm}$) та неоднорідних ($0 < \omega < \omega_{nm}$) хвиль у формулі (3).

Якщо квадрупольні і дипольні джерела звуку розподілені у своїх областях рівномірно, формула (3) спрощується за рахунок спрощення виразів для взаємних спектрів S_{ijkl}^T , S_{ik}^F і S_{ijk}^{TF} , які стають функціями лише відстані між джерелами ($\vec{\xi} = \vec{r}_0 - \vec{r}'_0$, $\vec{\xi}_{aa} = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_{0a}$ та $\vec{\xi}_a = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_0$ відповідно) і частоти [7, 8]:

$$\begin{aligned}
 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) &= S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega), \\
 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) &= S_{ik}^F(\vec{\xi}_{aa}, \omega), \\
 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) &= S_{ijk}^{TF}(\vec{\xi}_a, \omega).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Аналіз співвідношення (3) показує, що акустична енергія P дорівнює сумі енергій P_{nm} акустичних мод каналу Ψ_{nm} . При цьому енергія окремої моди P_{nm} складається з трьох доданків. Перший з них являє собою звукову енергію, згенеровану об'ємними квадруполями $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, другий – енергію, випромінену поверхневими диполями $\partial F_i / \partial y_i$, а третій – зумовлений взаємодією квадруполів і диполів. Відносний внесок кожного доданку буде різним для різних значень числа Маха M . Справді, якщо число Маха таке, що у згенерованому звуковому полі домінує внесок об'ємних квадруполів, то у виразі (3) залишається лише

перший з трьох доданків:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \times$$

$$\times \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) \times$$

$$\times \Psi_{nm}(r'_0, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dV_0(\vec{r}'_0). \quad (6)$$

Коли число Маха належить до діапазону, де домінують поверхневі диполі, визначальним є другий доданок, і замість співвідношення (6) маємо:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \times$$

$$\times \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \Psi_{nm}(a, \phi_0) \times$$

$$\times \Psi_{nm}(a, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}). \quad (7)$$

2. ВИПАДОК ДОМІНУВАННЯ КВАДРУПОЛІВ

Розглянемо випадок домінування у згенерованому звуковому полі внеску об'ємних квадруполів. При цьому вважатимемо, що вони розташовані рівномірно у регіоні збуреної течії V_0 .

На практиці така ситуація може виникнути за умов:

- значного перевищення числом Рейнольдса Re критичного значення Re_{cr} у регіоні збуреної за локальним звуженням каналу течії ($Re \gg Re_{cr}$, $M \ll 1$);
- осесиметричності незбуреної течії та параболічності профілю її швидкості перед звуженням каналу;
- наявності плавної осесиметричної форми локального звуження.

Перша умова забезпечує досягнення числом Маха значень, при яких домінуючим у звуковому полі є внесок об'ємних квадруполів. Як правило, вона виконується у легких рідинах, рухи яких зазвичай характеризуються значно більшими числами Маха

порівняно з рухами важких рідин. Друга ж і третя умови сприяють рівномірному розподілу квадрупольних джерел у регіоні збуреної звуженням каналу течії.

В окресленій ситуації вираз (3) для згенерованої на частоті ω акустичної енергії $P(\omega)$ зводиться до співвідношення (6), яке, у свою чергу, спрощується за рахунок спрощення виразів для взаємних спектрів S_{ijkl}^T (див. формули (5)):

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times$$

$$\times \iiint_{V_0} \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) dV_0(\vec{r}_0) \times$$

$$\times \int_{z_{0i}-z_0}^{z_{0e}-z_0} e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} d\xi_z \times \quad (8)$$

$$\times \int_{-r_0}^{a-r_0} (r_0 + \xi_r) d\xi_r \int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \times$$

$$\times \Psi_{nm}(r_0 + \xi_r, \phi_0 + \xi_\phi) d\xi_\phi,$$

де z_{0i} і z_{0e} – початкова та кінцева осеві координати регіону збуреної течії V_0 ; $\xi_r = r'_0 - r_0$, $\xi_\phi = \phi'_0 - \phi_0$ і $\xi_z = z'_0 - z_0$ – радіальна, кутова й осева відстані між квадрупольними джерелами відповідно.

Бачимо, що інтегрування по ξ_r , ξ_ϕ та ξ_z у формулі (8) залежить від координат джерела r_0 , ϕ_0 та z_0 , а відтак, загалом не можна суттєво спростити вираз для акустичної енергії $P(\omega)$. Проте існують випадки, коли інтеграли по \vec{r}_0 та $\vec{\xi}$ у співвідношенні (8) стають незалежними, що призводить до бажаного спрощення. Це відбувається при домінуванні у регіоні V_0 великих або малих вихорів (вони зумовлюються великим або малим значенням відношення діаметрів локального звуження і каналу відповідно). Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

2.1. Великі вихори

Нехай у регіоні збуреної течії V_0 домінують великі вихори. При цьому вважатимемо їх настільки великими, що рух у поперечному перерізі каналу повністю корельований. Це означає, що взаємні спектри напружень Лайтхіла S_{ijkl}^T не змінюються у поперечному перерізі каналу і є функціями лише осевої відстані між квадрупольними джерелами ξ_z і частоти ω :

$$\frac{\partial S_{ijkl}^T}{\partial \xi_r} = \frac{\partial S_{ijkl}^T}{\partial \xi_\phi} = 0, \quad S_{ijkl}^T = S_{ijkl}^T(\xi_z, \omega).$$

За цієї умови серед всіх похідних функцій S_{ijkl}^T у співвідношенні (8) залишиться лише одна похідна однієї функції S_{zzzz}^T по координаті ξ_z :

$$\frac{\partial^4 S_{zzzz}^T}{\partial \xi_z^4} \neq 0,$$

і співвідношення відповідно набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} P(\omega) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4 \|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \\ & \times \iiint_{V_0} \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) dV_0(\vec{r}_0) \times \\ & \times \int_{z_{0i}-z_0}^{z_{0e}-z_0} \frac{\partial^4 S_{zzzz}^T(\xi_z, \omega)}{\partial \xi_z^4} e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} d\xi_z \times \quad (9) \\ & \times \int_{-r_0}^{a-r_0} \int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \Psi_{nm}(r_0 + \xi_r, \phi_0 + \xi_\phi) \times \\ & \times (r_0 + \xi_r) d\xi_r d\xi_\phi. \end{aligned}$$

Оскільки в отриманому виразі подвійний інтеграл по ξ_r і ξ_ϕ відмінний від нуля лише у випадку $(n, m) = (0, 1)$, тобто для першої акустичної моди каналу $\Psi_{01} = 1$,

$$\begin{aligned} & \int_{-r_0}^{a-r_0} \int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \Psi_{nm}(r_0 + \xi_r, \phi_0 + \xi_\phi) (r_0 + \xi_r) d\xi_r d\xi_\phi = \\ & = \begin{cases} \pi a^2, & (n, m) = (0, 1), \\ 0, & (n, m) \neq (0, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

то вираз (9) значно спрощується, і згенерована квадрупольними акустична енергія на частоті ω стає пропорційною об'ємові регіону збуреної течії $|V_0|$ та одновимірному інтегралу від похідної взаємного спектра нормальних осевих напружень Лайтхіла T_{zz} :

$$\begin{aligned} P(\omega) = P_{01}(\omega) = & \frac{|V_0|}{4k_0 \rho_0 \omega} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{zzzz}^T(\xi_z, \omega)}{\partial \xi_z^4} e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_0 \xi_z} d\xi_z. \quad (10) \end{aligned}$$

При отриманні формули (10) було враховано, що квадруполі зникають за межами регіону V_0 . Це дозволило перейти до нескінченних меж інтегрування по ξ_z .

Аналіз співвідношення (10) показує, що у випадку домінування у регіоні збуреної течії великих вихорів звук генерують лише поздовжні квадруполі $\partial^2 T_{zz} / \partial z_0^2$, осі яких паралельні до осі каналу. При цьому згенерований звук поширюється в осьовому напрямку у вигляді плоскої хвилі зі швидкістю c_0 .

Повна акустична енергія Π , випромінена цими джерелами, визначається інтегралом від $P(\omega)$:

$$\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega,$$

і після підстановки сюди співвідношення (10), набуває вигляду

$$\Pi = \frac{|V_0|}{4\rho_0 c_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 K_{zzzz}^T(\xi_z, \tau)}{\partial \tau^2} d\xi_z, \quad (11)$$

де $\tau = \xi_z / c_0$ – час проходження звуковою хвилею осьової відстані ξ_z між квадрупольними джерелами; $K_{zzzz}^T(\xi_z, \tau)$ – кореляція напружень Лайтхіла T_{zz} :

$$K_{zzzz}^T(\xi_z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zzzz}^T(\xi_z, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

Введення в області збуреної течії V_0 масштабів довжини

$$L_t = \alpha a \quad (12)$$

і частоти

$$f_t = \beta \frac{U}{a} \quad (13)$$

(де α і β – відповідно коефіцієнти цих масштабів), а також відношення характерної швидкості збуреної течії u_t до швидкості незбуреної течії U

$$\gamma_t = \frac{u_t}{U} \quad (14)$$

дозволяє отримати оцінку повної акустичної енергії (11):

$$\Pi \sim \frac{|V_0|}{4a} \rho_0 U^3 M^3 \alpha \beta^2 \gamma_t^4, \quad \alpha \sim 1, \quad \beta \sim 1. \quad (15)$$

Бачимо, що у випадку великих вихорів інтенсивність акустичного випромінювання квадруполів у каналі пропорційна третьому степеневі числа Маха, а не п'ятому, як можна було б очікувати, виходячи з теорії генерації звуку вільною турбулентністю [8, 9, 11]. Така зміна характеру випромінювання квадрупольних джерел пояснюється впливом стінок каналу.

2.2. Малі вихори

У цьому випадку вважаємо, що в регіоні збуреної течії V_0 домінують вихори, малі у порівнянні з радіусом каналу a . Це означає, що довжини кореляцій у радіальному, азимутальному і осьовому напрямках (λ_r , λ_ϕ і λ_z відповідно), а також масштаб довжини L_t в області V_0 набагато менші за радіус каналу a :

$$\lambda_r \sim \lambda_\phi \sim \lambda_z \sim L_t = \alpha a \ll a, \quad \alpha \ll 1. \quad (16)$$

Для таких малих довжин кореляцій можна перейти до нескінченних меж інтегрування по $\vec{\xi}$ у співвідношенні (8), знехтувавши при цьому граничними ефектами течії біля стінки каналу:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \\ \times \iiint_{V_0} \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) dV_0(\vec{r}_0) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \times \\ \times \Psi_{nm}(r_0 + \xi_r, \phi_0 + \xi_\phi) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} \times \\ \times (r_0 + \xi_r) d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z. \quad (17)$$

Можливість такого нехтування зумовлена тим, що напруження Лайтхіла T_{ij} зникають на нерухомій жорсткій стінці каналу (внаслідок відсутності там будь-якого руху рідини), і всі вихори мають там нульову енергію. Крім цього, зайнятий вихорами об'єм $|V_1|$ біля стінки є малою величиною у порівнянні з об'ємом регіону збуреної течії $|V_0|$:

$$\frac{|V_1|}{|V_0|} = \frac{L_t 2\pi a (z_{0e} - z_{0i})}{\pi a^2 (z_{0e} - z_{0i})} = 2\alpha \ll 1.$$

Для співвідношення (17) розглянемо випадки низьких і високих частот.

2.2.1. Низькі частоти

Під низькими розумітимемо частоти ω , нижчі за всі критичні частоти каналу (4), окрім першої ω_{01} . Оскільки для вибраного каналу ω_{01} дорівнює нулеві, то це частоти

$$0 < \omega < \omega_{nm}, \quad (n, m) \neq (0, 1).$$

За цієї умови всі акустичні моди Ψ_{nm} , окрім першої ($\Psi_{01}=1$), будуть неоднорідними, і їхнім внеском у звукове поле можна знехтувати. Це призводить до значного спрощення виразу (17) для

спектра $P(\omega)$:

$$P(\omega) = P_{01}(\omega) = \frac{|V_0|}{4\pi a^2 k_0 \rho_0 \omega} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_0 \xi_z} \times \\ \times \xi_r d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z. \quad (18)$$

Отже, як і при домінуванні у регіоні V_0 великих вихорів, у випадку малих вихорів і низьких частот звук генерується у вигляді плоскої хвилі, яка поширюється в осьовому напрямку зі швидкістю c_0 . Проте, на відміну від формули (10), у співвідношенні (18) внесок в акустичне поле роблять усі, а не лише поздовжні осьові квадруполі.

Застосування теореми про середнє [12] до інтегралів по ξ_r та ξ_ϕ у формулі (18) дає такий вираз для згенерованої на частоті ω акустичної енергії:

$$P(\omega) = P_{01}(\omega) \approx \frac{|V_0| \alpha^2}{\pi k_0 \rho_0 \omega} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi_r = \xi_{r*}, \xi_\phi = \xi_{\phi*}} \times \\ \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_0 \xi_z} d\xi_z, \quad (19)$$

де $\alpha \ll 1$ (див. оцінку (16)); ξ_{r*} і $\xi_{\phi*}$ – точки з відрізків $[0, \lambda_r]$ і $[0, \lambda_\phi]$ відповідно.

Співставлення виразів (10) і (19) показує, що згенерована малими вихорами у діапазоні низьких частот звукова енергія є малою величиною порядку α^2 від звукової енергії, згенерованої в тому ж діапазоні великомасштабними вихоровими утвореннями. Тоді доходимо висновку, що повна акустична енергія Π наближено даватиметься співвідношенням (11), помноженим на α^2 , а її оцінка відрізнятиметься від оцінки (15) практично лише додатковим множником α^2 :

$$\Pi \sim \frac{|V_0|}{\pi a} \rho_0 U^3 M^3 \alpha^3 \beta^2 \gamma_t^4, \quad \alpha \ll 1. \quad (20)$$

Аналіз виразу (20) засвідчує, що, як і у випадку великих вихорів (див. оцінку (15)), згенерована малими вихорами на низьких частотах повна акустична енергія Π формально пропорційна третьому степеневі числа Маха ($M \ll 1$). Проте наявність у співвідношенні (20) додаткового, порівняно з формулою (15), квадрату малого параметра α^2 фактично вказує на пропорційність енергії Π п'ятому степеневі числа M :

$$M^3 \alpha^2 \sim M^5, \quad M \ll 1, \quad \alpha \ll 1,$$

тобто на квадрупольний (а не дипольний) характер випромінювання малих вихорів у каналі. З іншого боку, практично однаковий характер випромінювання малих вихорів у вільному просторі і каналі вказує на відсутність істотного впливу стінки каналу на процес генерації звуку малими вихорами в ньому.

2.2.2. Високі частоти

Під високими розумітимемо такі частоти, для яких всі акустичні моди каналу Ψ_{nm} будуть однорідними:

$$\omega > \omega_{nm}, \quad n \geq 0, \quad m \geq 1.$$

Це означає, що всі вони братимуть участь у формуванні дальнього звукового поля в каналі і мають враховуватися при аналізі виразу (17) для спектра $P(\omega)$.

У такій ситуації доцільно виконати певні операції зі спектром (17). Їх суть полягає у розписуванні косинусів $\cos n(\phi_0 + \xi_\phi)$ і функцій Бесселя $J_n(\alpha_{nm}(r_0 + \xi_r))$ з подальшим урахуванням ортогональності отриманих при цьому тригонометричних і циліндричних функцій, а також парності/непарності їхніх добутків на симетричному відносно початку координат відрізьку.

Після розписування косинуса суми аргументів $\cos n(\phi_0 + \xi_\phi)$ одержуємо спрощену форму запису співвідношення (17):

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z_{0e} - z_{0i}) \|\cos(n\phi_0)\|^2}{4\|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_0^a J_n(\alpha_{nm} r_0) r_0 dr_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \times J_n(\alpha_{nm}(r_0 + \xi_r)) \cos(n\xi_\phi) \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}\xi_z} (r_0 + \xi_r) d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z, \quad (21)$$

де квадрат норми косинуса $\|\cos(n\phi_0)\|^2$ має вигляд

$$\|\cos(n\phi_0)\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(n\phi_0) d\phi_0 = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ \pi, & n \geq 1. \end{cases}$$

Застосування теореми додавання [13]

$$J_n(u + v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(u) J_k(v)$$

до функцій Бесселя $J_n(\alpha_{nm}(r_0 + \xi_r))$ у формулі (21) приводить до такого виразу для спектра акустичної енергії $P(\omega)$:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V_0|}{4\pi a^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} J_0(\alpha_{nm} \xi_r) \times \cos(n\xi_\phi) e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}\xi_z} \xi_r d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z. \quad (22)$$

Аналіз співвідношення (22) показує, що у разі домінування у регіоні збуреної течії V_0 малих вихорів внесок у високочастотну область спектра $P(\omega)$ роблять усі квадруполі. При цьому, на відміну від випадків великих вихорів та малих вихорів і низьких частот, тепер участь у формуванні звукового поля беруть усі акустичні моди каналу Ψ_{nm} , а не лише його перша мода Ψ_{01} .

Інтегрування співвідношення (22) по частоті і введення в отриманий вираз масштабів збуреної течії (12)–(14) дає оцінку для акустичної енергії Π :

$$\Pi \sim \frac{|V_0|}{\pi a} \rho_0 U^3 M^5 \alpha^3 \beta^4 \gamma_t^4, \quad \alpha \ll 1. \quad (23)$$

Бачимо, що для малих вихорів і високих частот інтенсивність акустичного випромінювання квадруполів у каналі визначається п'ятим степенем числа Маха. Оскільки такий же степінь числа Маха характеризує і акустичне випромінювання квадруполів у вільному просторі [8, 11], то цей результат свідчить про незначний вплив стінки каналу на процес генерації звуку малими вихорами у ньому (аналогічний висновок було зроблено і у підрозділі 2.2.1).

Співставлення ж оцінок (23) і (20), а також врахування наведеної після формули (20) пропорційності

$$M^3 \alpha^2 \sim M^5, \quad M \ll 1, \quad \alpha \ll 1$$

показує, що при домінуванні у регіоні збуреної течії V_0 малих вихорів згенерована квадрупольями у діапазоні високих частот акустична енергія є малою величиною порядку $\alpha^2 \beta^2$ ($\alpha \ll 1$) від енергії, згенерованої цими ж квадрупольями на низьких частотах.

3. ВИПАДОК ДОМІНУВАННЯ ДИПОЛІВ

Розглянемо ситуацію, коли у згенерованому звуковому полі в каналі домінує внесок поверхневих диполів. При цьому вважатимемо їх рівномірно розташованими на поверхні S_0 , яка обмежує регіон збуреної течії V_0 .

Першу з цих умов може бути реалізовано на практиці, коли число Рейнольдса Re в регіоні збуреної за локальним звуженням каналу течії V_0 є або близьким до критичного значення Re_{cr} ($Re \sim Re_{cr}$), або ж ненабагато більшим за нього ($Re > Re_{cr}$, $M \ll 1$). Виконання ж другої умови, як і у випадку рівномірного розподілу об'ємних квадруполів, може бути забезпечено в разі:

- осесиметричності незбуреної течії та параболічності профілю її швидкості перед звуженням каналу;
- плавності та осесиметричності геометрії локального звуження.

У такій ситуації співвідношення (3) для спектра акустичної енергії $P(\omega)$ зводиться до формули (7), яка за рахунок співвідношень (5) для функцій S_{ik}^F спрощується до вигляду

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^2 J_n^2(\alpha_{nm} a)}{4 \|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_0^{2\pi} \int_{z_{0i}}^{z_{0e}} \cos(n\phi_0) d\phi_0 dz_0 \times \int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \int_{z_{0i}-z_0}^{z_{0e}-z_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \times \cos(n(\phi_0 + \xi_\phi)) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} d\xi_\phi d\xi_z, \quad (24)$$

де $\partial S_{ik}^F / \partial \xi_r = 0$.

У співвідношенні (24) подвійний інтеграл по ξ_ϕ і ξ_z залежить від ϕ_0 і z_0 . Тому очевидно, що у загальному випадку не вдасться суттєво спростити вираз для спектра $P(\omega)$. Однак у разі домінування в регіоні збуреної течії V_0 великомасштабних або дрібномасштабних вихорових утворень таке спрощення стає можливим.

3.1. Великі вихори

Розглянемо випадок домінування у регіоні збуреної течії V_0 настільки великих вихорових утворень, що поверхневі диполі стають повністю корельованими по колу $r_0 = a$. У такій ситуації взаємні

спектри S_{ik}^F не залежатимуть від азимутальної координати ξ_ϕ :

$$\frac{\partial S_{ik}^F}{\partial \xi_\phi} = 0, \quad S_{ik}^F = S_{ik}^F(\xi_z, \omega),$$

і співвідношення (24) для спектра акустичної енергії $P(\omega)$ зведеться до виразу

$$P(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_0|}{2 a k_{0m} \rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{zz}^F(\xi_z, \omega)}{\partial \xi_z^2} \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{0m} \xi_z} d\xi_z, \quad (25)$$

де $|S_0|$ – площа поверхні S_0 .

Бачимо, що при домінуванні в регіоні V_0 великих вихорів внесок в акустичне поле у каналі роблять лише осьові диполі $\partial F_z / \partial z_0$. При цьому основна частина цього внеску припадає на першу акустичну моду каналу $\Psi_{01} = 1$. Їй відповідає плоска звукова хвиля, яка поширюється в осьовому напрямку зі швидкістю c_0 .

Повна акустична енергія Π , згенерована осьовими диполями $\partial F_z / \partial z_0$, має такий вигляд:

$$\Pi \approx \frac{|S_0|}{2 a \rho_0 c_0} \int_{-\infty}^{\infty} K_{zz}^F(\xi_z, \tau) d\xi_z, \quad (26)$$

де $\tau = \xi_z / c_0$ – час проходження звуковою хвилею осьової відстані ξ_z між дипольними джерелами; $K_{zz}^F(\xi_z, \tau)$ – кореляція сил F_z :

$$K_{zz}^F(\xi_z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zz}^F(\xi_z, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

Зауважимо, що тут було враховано внесок лише першої акустичної моди каналу Ψ_{01} .

Введення масштабів збуреної течії (12)–(14) у співвідношення (26) дає змогу отримати оцінку енергії Π :

$$\Pi \sim \frac{|S_0|}{2} \rho_0 U^3 M^3 \alpha \gamma_t^4, \quad \alpha \sim 1. \quad (27)$$

Маємо класичну кубічну залежність інтенсивності акустичного випромінювання диполів від числа Маха [8, 9, 11].

3.2. Малі вихори

Тепер нехай в регіоні збуреної течії V_0 домінують вихорові утворення, розміри яких малі у порівнянні з радіусом каналу a . У такій ситуації малими відносно a будуть довжини кореляцій λ_r , λ_ϕ і λ_z , а також масштаб довжини L_t в області V_0 :

$$\lambda_r \sim \lambda_\phi \sim \lambda_z \sim L_t = \alpha a \ll a, \quad \alpha \ll 1.$$

Тоді межі інтегрування по ξ_ϕ та ξ_z у формулі (24) можна розширити – від $-\infty$ до ∞ :

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^2 J_n^2(\alpha_{nm} a)}{4 \|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_0^{2\pi} \int_{z_{0i}}^{z_{0e}} \cos(n\phi_0) d\phi_0 dz_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \cos(n(\phi_0 + \xi_\phi)) \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0 \xi_z} d\xi_\phi d\xi_z. \quad (28)$$

В отриманому співвідношенні розглянемо випадки низьких та високих частот.

3.2.1. Низькі частоти

Як і у підрозділі 2.2.1, вважатимемо низькими частоти, котрі задовольняють умову

$$0 < \omega < \omega_{nm}, \quad (n, m) \neq (0, 1).$$

Тоді внесок у звукове поле в каналі робить лише його перша акустична мода Ψ_{01} , і співвідношення (28) набуває такого вигляду:

$$P(\omega) = P_{01}(\omega) = \frac{|S_0|}{4\pi a k_0 \rho_0 \omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0 \xi_z} d\xi_\phi d\xi_z. \quad (29)$$

Аналіз цього співвідношення показує, що у випадку домінування у регіоні збуреної течії V_0 малих вихорів внесок у низькочастотну область спектра $P(\omega)$ роблять всі диполі. Тоді згенерована ними звукова енергія поширюється у вигляді плоскої хвилі в осьовому напрямку зі швидкістю c_0 .

Застосуємо теорему про середнє [12],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0 \xi_z} d\xi_\phi d\xi_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \Big|_{\xi_\phi = \xi_{\phi*}} \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0 \xi_z} d\xi_z \frac{2\lambda_\phi}{a},$$

де $\xi_{\phi*}$ – точка з відрізка $[0, \lambda_\phi]$; $\lambda_\phi \sim L_t$, до співвідношення (29):

$$P(\omega) \approx \frac{|S_0| \alpha}{2\pi a k_0 \rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \Big|_{\xi_\phi = \xi_{\phi*}} \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0 \xi_z} d\xi_z, \quad \alpha \ll 1.$$

Це дозволяє провести його порівняльний аналіз із виразом (25). Бачимо, що при домінуванні у регіоні V_0 малих вихорів згенерована диполями на низьких частотах звукова енергія є малою величиною порядку α/π ($\alpha \ll 1$) від звукової енергії, згенерованої у тому ж діапазоні диполями у разі домінування великих вихорів.

Відповідно, вираз для акустичної енергії Π відрізнятиметься від співвідношення (26) практично лише додатковим множником α/π , а оцінка для Π матиме вигляд (27), домножений на α/π :

$$\Pi \sim \frac{|S_0|}{2\pi} \rho_0 U^3 M^3 \alpha^2 \gamma_t^4, \quad \alpha \ll 1. \quad (30)$$

Знову отримуємо класичну кубічну залежність згенерованої диполями акустичної енергії від числа Маха [8, 9, 11].

3.2.2. Високі частоти

Перейдемо до розгляду частот, вищих за всі критичні частоти каналу:

$$\omega > \omega_{nm}, \quad n \geq 0, m \geq 1.$$

У цьому випадку всі акустичні моди Ψ_{nm} будуть однорідними і братимуть участь у формуванні дальнього звукового поля. Тому їх треба враховувати при подальшому аналізі співвідношення (28) для спектра акустичної енергії $P(\omega)$. Розписуючи у цьому співвідношенні косинус суми аргументів $\cos n(\phi_0 + \xi_\phi)$ і враховуючи ортогональність отриманих при цьому тригонометричних функцій, приходимо до такого виразу для спектра $P(\omega)$:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_0|}{4\pi a \varepsilon_n k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \cos(n\xi_\phi) \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0 \xi_z} d\xi_\phi d\xi_z, \quad (31)$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 1 - \left(\frac{n}{\alpha_{nm} a}\right)^2, & n \geq 1. \end{cases}$$

Аналіз формули (31) засвідчує, що у разі домінування у регіоні V_0 малих вихорів внесок у високочастотну область спектра $P(\omega)$ роблять усі диполі. При цьому всі акустичні моди Ψ_{nm} беруть участь у формуванні звукового поля в каналі.

Підстановка співвідношення (31) в інтеграл для акустичної енергії Π і введення туди масштабів збуреної течії (12)–(14) дозволяє отримати оцінку для Π :

$$\Pi \sim \frac{|S_0|}{2\pi} \rho_0 U^3 M^3 \alpha^3 \beta \gamma_t^4, \quad \alpha \ll 1. \quad (32)$$

Бачимо, що і у випадку малих вихорів та високих частот згенерована диполями акустична енергія також визначається третім степенем числа Маха. Проте вона є малою величиною порядку $\alpha\beta$ ($\alpha \ll 1$) у порівнянні з енергією, згенерованою диполями у випадку малих вихорів та низьких частот, описаному в підрозділі 3.2.1 (співстав оцінки (32) і (30)).

ВИСНОВКИ

Розглянуті частинні випадки розробленої у статті [7] теорії генерації звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостинному каналі кругового поперечного перерізу. Досліджені ситуації, коли у згенерованому акустичному полі домінує внесок об'ємних квадруполів або поверхневих диполів. Зокрема, проаналізовані такі потоки і форми локальних неоднорідностей геометрії каналів, при яких регіон збуреної за неоднорідністю течії займають рівномірно розподілені великі або малі вихори. Для розглянутих випадків отримані відповідні спрощені вирази для згенерованої акустичної енергії та проведені їхні оцінки для характерних масштабів у області збурення.

ПОДЯКА

Автор висловлює подяку академіку НАН України В. Т. Грінченку за корисні поради, які допомогли покращити якість цієї статті.

1. *Lees R. S., Dewey C. F., Jr.* Phonoangiography: a new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease // *Proc. Nat. Acad. Sci.*– 1970.– **67**.– P. 935–942.
2. *Young D. F.* Fluid mechanics of arterial stenosis // *J. Biomech. Engng.*– 1979.– **101**.– P. 157–175.
3. *Миролюбов С. Г.* Гидродинамика стеноза // *Современ. пробл. биомех.*– 1983.– **1**.– С. 73–136.
4. *Berger S. A., Jou L-D.* Flows in stenotic vessels // *Ann. Rev. Fluid Mech.*– 2000.– **32**.– P. 347–382.

5. *Borisyuk A. O.* Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // *Flow, Turbulence and Combustion.*– 1999.– **61**.– P. 269–284.
6. *Borisyuk A. O.* Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis // *J. Sound Vib.*– 2002.– **256**.– P. 475–498.
7. *Борисюк А. О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостинному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // *Акуст. вісн.*– 2003.– **6**, N 3.– С. 3–9.
8. *Blake W. K. (ed.)* Mechanics of flow-induced sound and vibration.– New York: Academic Press, 1986.– 974 p.
9. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.
10. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics.– New York: McGraw-Hill, 1953.– 997 p.
11. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 1. General theory // *Proc. Roy. Soc. London.*– 1952.– **A211**.– P. 564–587.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: том 2.– М.: Физматгиз, 1962.– 807 с.
13. *Ямке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции.– М.: Наука, 1968.– 344 с.

ДОДАТОК. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

a	– радіус поперечного перерізу каналу;
U	– осереднена осьова швидкість течії в каналі;
u_t	– характерна швидкість збуреної течії;
c_0	– швидкість звуку в незбуреній рідині;
M	– число Маха;
ρ	– густина рідини;
ν	– кінематична в'язкість рідини;
μ	– динамічна в'язкість рідини;
p	– тиск;
T_{ij}	– напруження Лайтхіла;
F_i	– i -та компонента прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі;
τ_{ij}	– дотичні напруження;
ϵ_{ij}	– швидкості деформації;
n_j	– j -та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу;
u_i	– i -та компонента швидкості рідини;
δ_{ij}	– символ Кронекера;
$\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$	– об'ємні квадруполі;
$\partial F_i / \partial y_i$	– поверхневі диполі;
V_0	– об'єм збуреної течії;
S_0	– поверхня, що його обмежує;
$\delta(\cdot)$	– дельта-функція Дірака;
ρ_a	– акустичні флуктуації густини;

p_a	– акустичні флуктуації тиску;	ω_{nm}	– критичні частоти каналу;
$P(\omega)$	– акустична енергія на частоті ω ;	S_{ijkl}^T	– взаємні спектри образів Фур'є напружень Лайтхіла;
Π	– повна акустична енергія;	S_{ik}^F	– взаємні спектри образів Фур'є сил F_k ;
Ψ_{nm}	– акустичні моди каналу;	S_{ijk}^{TF}	– взаємний спектр образів Фур'є напружень Лайтхіла T_{ij} і сил F_k .
α_{nm}	– радіальні хвильові числа;		
k_{nm}	– осьові хвильові числа;		
k_0	– акустичне хвильове число;		