СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ РАЗВЕТВЛЕНИЯХ

Н.И. Пятак

Харьковский национальный Университет имени В.Н. Каразина

Украина

Поступила в редакцию 20.11.2009

В настоящей работе метод частичных областей с выделением области связи распространен на случай несиммметричных полуоткрытых волноводных разветвлений различной модификации. Получены математически строгие соотношения для собственных частот колебаний.

Ключевые слова: полуоткрытые волноводные разветвления, собственные колебания.

В цій роботі метод часткових областей з виділенням області зв'язку розповсюджений на випадок несиметричних напіввідкритих хвилевидних розгалужень різної модифікації. Одержано математично строгі співвідношення для власних частот коливань.

Ключові слова: напіввідкриті хвилевидні розгалуження, власні коливання.

In the present work the method of partial areas with allocation of area of connection is spread to a case asymmetrical half-open waveguide bifurcations of various modification. Mathematically rigorous relationships for own oscilation frequencies are obtained.

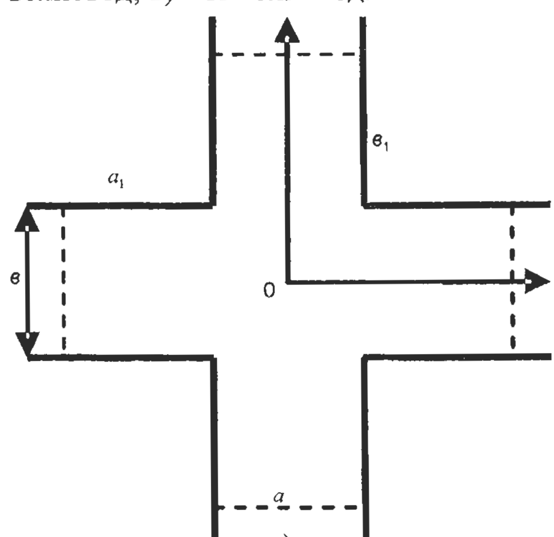
Keywords: half-open waveguide bifurcations, natural oscillations.

В работах [1, 2] впервые рассчитаны собственные частоты колебаний полуоткрытых волноводных разветвлений симметричного типа (рис. 1) методом частичных областей с выделением области связи.

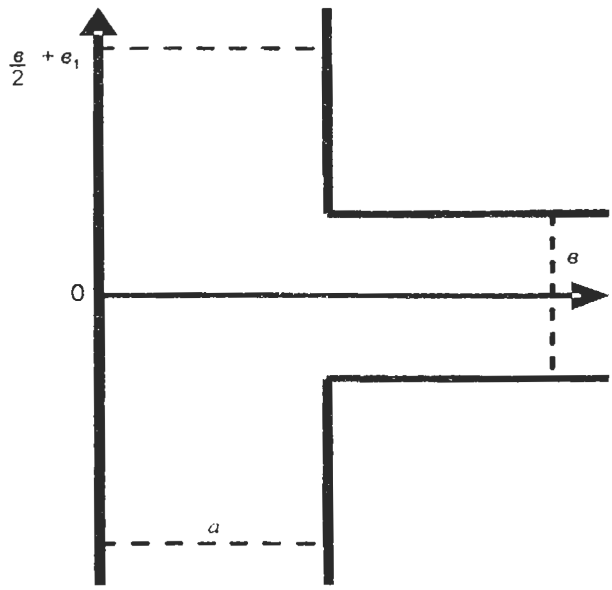
Аналогичные задачи рассматривались также в [3].

Непременным условием наличия собственных колебаний разветвлений является запредельность волноводов "а" и "в" для данного типа колебаний.

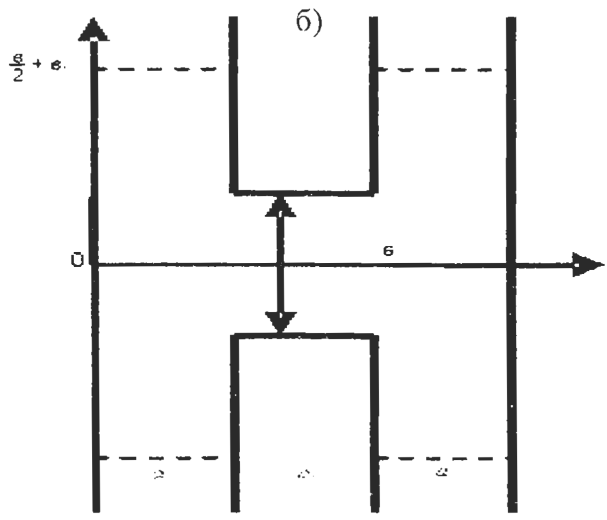
При наличии металлических закороток, показанных пунктиром на рис. 1, в плечах разветвления собственные частоты являются критическими частотами соответствующих волноводов сложной формы поперечного сечения: а) – крестообразный волновод; б) – Т-волновод; в) – Н-волновод.



а)



б)



в)

Рис. 1.

Особенностью геометрически симметричных разветвлений и волноводов сложной формы является то, что колебания в них разделяются на не связанные между собой четные и нечетные колебания, поля которых описываются четными и нечетными функциями во всех частичных областях, включая область связи, т.е. область пересечения ортогональных волноводов.

Опыт применения используемого метода в задачах о собственных колебаниях или дифракции в линиях передачи сложной формы показывает, что он обеспечивает единственность решения, равномерную и быструю сходимость, обусловленную тем, что граничные условия для полей, представленных рядами Фурье в каждой частичной области, выполняются почленно, а не в сумме и отсутствие особенности поля на металлических ребрах.

Представляет интерес распространить применение метода на несимметричные волноводные разветвления и несимметричные волноводы сложной формы поперечного сечения, простейшие из которых показаны на рис. 2.

Заметим, что несимметрия имеет место только на координате y.

Условием существования собственных колебаний является запредельность волноводов “а” и “в” для системы на рис. 2а, запредельность волновода “в” для системы на рис. 2б.

В соответствии с идеей метода частичных областей с выделением области связи разобьем систему на частичные области, как показано на рис. 2, где область IV, являющаяся пересечением волноводов “а” и “в” есть область связи.

Задачу будем решать, предполагая, что

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Поля в каждой частичной области представляются в виде разложения по собственным полям соответствующих волноводов, которые, в свою очередь, являются решением уравнения Гельмгольца с граничными условиями на металлических поверхностях. Поле в области связи IV является суперпозицией полей, пересекающихся волноводов “а” и “в”. В силу симметрии рассматриваемых систем

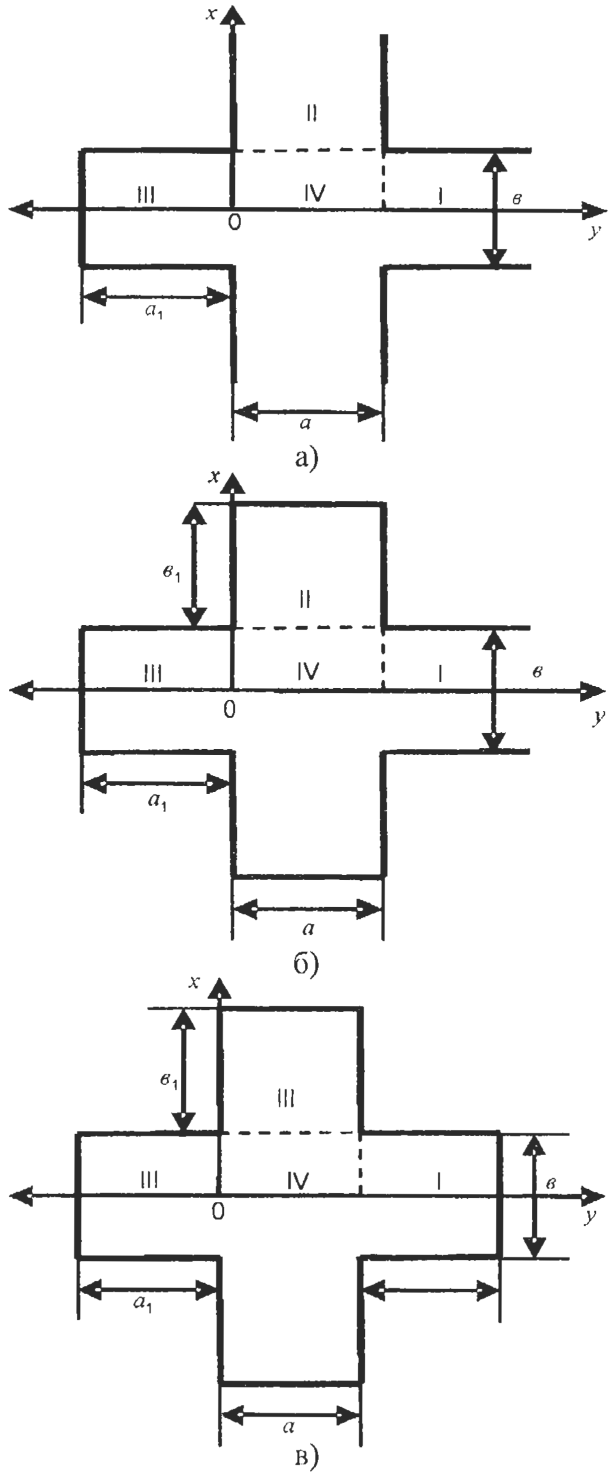


Рис. 2.

по оси x поля в области связи описываются четными либо нечетными функциями по оси x.

С учетом вышеизложенного, единственную компоненту электрического поля E_z в частичных областях представим в виде (для четного поля по оси x)

$$E_z^{\mathrm{I}} = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{b} x e^{-\gamma_{nb}(y-a)};$$

$$E_z^{\rm II} = \sum_{m=1,2,3,...}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi}{a} y \frac{\mathrm{sh}\gamma_{ma}\left(\frac{b}{2}+b_1-x\right)}{\mathrm{sh}\gamma_{ma}b_1};$$

$$E_z^{\rm III} = \sum_{n=1,3,...}^{\infty} K_n \cos\frac{n\pi}{b} x \frac{\mathrm{sh}\gamma_{nb}(y+a_1)}{\mathrm{sh}\gamma_{nb}a_1};$$

$$E_z^{\rm IV} = \sum_{m=1,2,3...}^{\infty} L_m \sin\frac{m\pi}{ay} \frac{\mathrm{ch}\gamma_{ma}x}{\mathrm{ch}\gamma_{ma}\frac{b}{2}} +$$

$$+\sum_{m=1.}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{b} x\left[C_n \mathrm{sh}\gamma_{nb}y + D_n \mathrm{ch}\gamma_{nb}y\right],$$

где $\gamma_{nb} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}$;

$$\gamma_{ma} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Условия согласования тангенциальных составляющих полей на границах частичных областей имеют вид:

$$E_z^{\rm I} = E_z^{\rm IV}\Big|_{y=a}; \quad E_z^{\rm III} = E_z^{\rm IV}\Big|_{y=0}; \quad E_z^{\rm II} = E_z^{\rm IV}\Big|_{x=\frac{b}{2}}.$$

$$H_x^{\rm I} = H_x^{\rm IV}\Big|_{y=a}; \quad H_x^{\rm III} = H_x^{\rm IV}\Big|_{y=0}; H_x^{\rm II} = H_x^{\rm IV}\Big|_{x=\frac{b}{2}}.$$

Применение трех первых условий дает связь между амплитудами полей в частичных областях $A_n = C_n \mathrm{sh}\gamma_{nb}a + D_n \mathrm{ch}\gamma_{nb}a$; $K_n = D_n$; $L_m = B_m$.

Оставшиеся условия согласования полей дают систему функциональных уравнений:

$$\sum_m B_m \frac{m\pi}{a}\frac{\mathrm{ch}\gamma_{ma}x}{\mathrm{ch}\gamma_{ma}\frac{b}{2}} = \sum_n D_n\gamma_{nb}\left(\mathrm{cth}\gamma_{nb}a_1 - 1\right)\cos\frac{n\pi}{b}x;$$

$$\sum_m B_m\gamma_{ma}\left[\mathrm{cth}\gamma_{ma}b_1 + \mathrm{th}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\right]\sin\frac{m\pi}{ay} =$$

$$= \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{b}\left[C_n \mathrm{sh}\gamma_{nb}y + D_n \mathrm{ch}\gamma_{nb}y\right];$$

$$\sum_m B_m \frac{m\pi}{a}(-1)^m \frac{\mathrm{ch}\gamma_{ma}x}{\mathrm{ch}\gamma_{ma}\frac{b}{2}} =$$

$$= -2\sum_n \gamma_{nb}\left[C_n \mathrm{sh}\gamma_{nb}a + D_n \mathrm{ch}\gamma_{nb}a\right]\cos\frac{n\pi}{b}x.$$

Применение метода Фурье к системе функциональных уравнений позволяет получить однородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) II рода различную для четных и нечетных “m”.

I. m – нечетное

$$D_k - \sum_m \frac{\theta_{mk}\frac{m\pi}{a}}{\gamma_{ma}\frac{a}{2}\mathrm{ch}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{ma}b_1 + \mathrm{th}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\right]}\times$$

$$\times\sum_n D_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{b}}{\gamma_{kb}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{kb}a_1 - 1\right]\mathrm{sh}\gamma_{nb}a}\times$$

$$\times\left[(1+\mathrm{cth}\gamma_{nb}a - \mathrm{cth}\gamma_{nb}a_1)\sigma_{nk} + f_{nk}\mathrm{sh}\gamma_{nb}a\right] = 0,$$

где $$\theta_{mk} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} ch(\gamma_{ma}x)\cos\frac{k\pi}{b}x dx =$$

$$= \frac{2(-1)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{k\pi}{b}\right)ch\gamma_{ma}\frac{b}{2}}{\gamma_{ma}^2 + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2},$$

$$\delta_{nk} = \int_0^a \mathrm{sh}\gamma_{nb}y\sin\frac{k\pi}{a}y dy = -\frac{(-1)^k\frac{k\pi}{a}\mathrm{sh}\gamma_{nb}a}{\gamma_{nb}^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2},$$

$$f_{nk} = \int_0^a \mathrm{ch}\gamma_{nb}y\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}y dy = \frac{\frac{k\pi}{a}\left(1-(-1)^k\mathrm{ch}\gamma_{nb}a\right)}{\gamma_{nb}^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2};$$

II. m – четное

$$D_k - \sum_m \frac{\frac{m\pi}{a}\theta_{mk}}{\gamma_{ma}\frac{a}{2}\mathrm{ch}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{ma}b_1 + \mathrm{th}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\right]}\times$$

$$= \sum_n D_n \frac{\frac{n\pi}{b}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\sigma_{nk}\mathrm{cth}\gamma_{nb}a + f_{nk}\right]}{\gamma_{kb}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{kb}a_1 - 1\right]} = 0.$$

Искомые резонансные частоты являются корнями определителя СЛАУ: $\{\delta_{mk} - Q_{mk}\} = 0$,

где $Q_{mk} = \sum_n F_{nk} D_{nk}$.

m – нечетное

$$F_{mk} = \frac{Q_{mk}\frac{m\pi}{a}}{\gamma_{ma}\frac{a}{2}\mathrm{ch}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{ma}b_1 + \mathrm{th}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\right]};$$

$$P_{nk} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{b}}{\gamma_{kb}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{kb}a_1 - 1\right]\mathrm{sh}\gamma_{nb}a} \times$$

$$\times \frac{\left[\left(1 + \mathrm{cth}\gamma_{nb}a - \mathrm{cth}\gamma_{nb}a_1\right)\sigma_{nk} + f_{nk}\mathrm{sh}\gamma_{nb}a\right]}{\gamma_{kb}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{kb}a_1 - 1\right]\mathrm{sh}\gamma_{nb}a}.$$

m – четное $\quad F'_{mk} = F_{mk}$,

$$P'_{nk} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{b}\left[\delta_{nk}\mathrm{cth}\gamma_{nb}a + f_{nk}\right]}{\gamma_{kb}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{kb}a_1 - 1\right]}.$$

Они имеют смысл коэффициентов Фурье разложения поля в области связи по собственным функциям волноводов “а” и «в”.

Для системы, показанной на рис. 2а коэффициенты F''_{mk}, P''_{nk}, имеют вид:

$$F''_{mk} = \frac{Q_{mk}\frac{m\pi}{a}}{\gamma_{ma}\frac{a}{2}\mathrm{ch}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\left[1 + \mathrm{th}\gamma_{ma}\frac{b}{2}\right]} \text{ для всех } m;$$

$P''_{nk} = P_{nk}$ m – нечетное; $P''_{nk} = P_{nk}$ m – четное.

Для системы на рис. 2в коэффициенты Фурье F'''_{mk}, P'''_{nk}, $F'''_{mk} = F_{mk} = F'_{mk}$.

$$P'''_{nk} = \frac{\frac{n\pi}{b}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\left(\mathrm{cth}\gamma_{nb}a_2 - \mathrm{cth}\gamma_{nb}a_1 + \mathrm{cth}\gamma_{nb}a\right)\right]}{\gamma_{nb}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{nb}a_1 - \mathrm{cth}\gamma_{kb}a_2\right]\mathrm{sh}\gamma_{nb}a} \times$$

$$\times \frac{\sigma_{nk} + f_{nk}\mathrm{sh}\gamma_{nb}a}{\gamma_{nb}\frac{b}{2}\left[\mathrm{cth}\gamma_{nb}a_1 - \mathrm{cth}\gamma_{kb}a_2\right]\mathrm{sh}\gamma_{nb}a}$$,(m– нечетное);

$$P'''_{nk} = \frac{\frac{n\pi}{b}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\sigma_{nk}cth\gamma_{kb}a + f_{nk}\right]}{\gamma_{kb}\frac{b}{2}\left[cth\gamma_{kb}a_1 - cth\gamma_{kb}a_2\right]}$$ (m – четное).

Таким образом, метод частичных областей с выделением области связи. Успешно применяемый для полуоткрытых волноводных систем, обладающих симметрией, впервые распространен на несимметричные системы, в которых поля в области связи не разделяются на четные и нечетные. При условии, что $b/\lambda << 1$ рассмотренные системы представляют собой Н – либо прямоугольный волновод с продольной щелью, широко используемые в антенной технике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробкин В.А., Осинцев В.В.//Радиотехника и электроника.– 1985. – Вып. 3. – С. 417-421.
2. Коробкин В.А., Пятак Н.И.//Радиотехника и электроника. – 1987. – Вып. 3. – С. 517-525.
3. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А. Резонансное рассеяние волн. Волноводные неоднородности. Т. 2. – К.: Наукова думка, 1986. – 216 с.

© Н.И. Пятак, 2009