

ЭЛЕКТРОННЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПОЛНОСТЬЮ И ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Ю.А. Выжол¹, А.Н. Жорова, И.А. Муленко, А.Л. Хомкин²

Николаевский государственный университет

Украина

¹*Национальный университет кораблестроения (Николаев)*

Украина

²*Объединенный институт высоких температур РАН (Москва)*

Россия

Поступила в редакцию 26.10.2009

Методом решения кинетического уравнения Больцмана выполнен расчет электронных кинетических коэффициентов неидеальной полностью и частично ионизованной плазмы с экранированным взаимодействием между зарядами в отсутствие и при наличии постоянного во времени внешнего магнитного поля. Установлены зависимости продольной, поперечной и холловской компонент тензоров проводимости, электронной теплопроводности, диффузии, термо-ЭДС и т.д. от параметра неидеальности плазмы Γ и степени ее замагниченности $\omega_e \tau_0$. Разработана широкодиапазонная методика расчета электропроводности частично ионизованной плазмы, применимая в области слабой и сильной неидеальности.

Ключевые слова: неидеальная плазма, электропроводность, скобочный интеграл, кинетическое уравнение.

Розрахунок електронних кінетичних коефіцієнтів неідеальної повністю й частково іонізованої плазми з екранованою взаємодією між зарядами під час відсутності та при наявності постійного у часі зовнішнього магнітного поля виконаний методом рішення кінетичного рівняння Больцмана. Установлено залежності поздовжньої, поперечної та холівських компонент тензорів провідності, електронної теплопровідності, дифузії, термо-ЕДС і т.б. від параметра неідеальності плазми Γ і ступеня її замагніченості $\omega_e \tau_0$. Розроблена широкодіапазонна методика розрахунку електропровідності частково іонізованої плазми, яка застосовується в області слабкої й сильної неідеальності.

Ключові слова: неідеальна плазма, електропровідність, скобочний інтеграл, кінетичне рівняння.

The method of decision of kinetic equalization of Boltzmann is execute the calculation of electronic kinetic coefficients non-perfect fully and partly ionized plasma with the screened co-operation between charges in absence and at presence of the permanent in time external magnetic field. Dependences are set by longitudinal, transversal and Holl component of tensors of conductivity, electronic heat conductivity, diffusion, thermo-EMF et cetera from the parameter of nonideality of plasma (and degrees of its magnetic parameter $\omega_e \tau_0$). The wide-range method of calculation of conductivity is developed partly ionized plasma, applicable in area of weak and strong nonideality.

Keywords: nonideal plasma, electrical conductivity, bracket integral, kinetic equation.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы переноса в плазме исследуются достаточно давно. Основной задачей физической кинетики неидеальной плазмы является вычисление коэффициентов переноса и, прежде всего, – электропроводности, важнейшей кинетической и электрофизической характеристики плазмы. Решение этой задачи по-прежнему остается актуальным для физики неидеальной плазмы и ее разнообразных приложений [1]. В большинстве случаев разработка широкодиапазонной методики расчета

электронных кинетических коэффициентов основана на различных модификациях приближения [2] для классических кулоновских систем и результатов [3, 4] для кулоновских систем, полученных с использованием квантовых кинетических уравнений. Важным преимуществом построенных таким образом методик расчета коэффициентов переноса (например [5]) является высокая точность полученных с их помощью результатов в широкой области изменения внешних параметров и температуры плазмы. Вместе с тем, часто

требуется их более детальное физическое обоснование, особенно в области состояний, лежащих на фазовой диаграмме вне границ применимости исходных результатов, полученных строгими методами.

Основное внимание уделяется расчету электронных коэффициентов переноса, поскольку электроны обладают значительно большей подвижностью, по сравнению с массивными частицами (атомами, ионами и молекулами) и вносят соответственно наибольший вклад в такие важные характеристики плазмы, как электропроводность, теплопроводность, термо-ЭДС и т.д.

Целью настоящей работы является построение широкодиапазонной методики расчета электронных кинетических коэффициентов классической неидеальной плазмы, полностью основанной на решении кинетического уравнения Больцмана. Единственная, используемая при этом, форма интерполяции различных приближений, включена непосредственно в процедуру решения кинетического уравнения на стадии расчета транспортных сечений рассеяния заряженных частиц.

Рассматривается полностью ионизованная плазма в отсутствие и при наличии внешнего магнитного поля, а также частично ионизованная плазма. Подробное обоснование применения уравнения Больцмана к расчету кинетических коэффициентов неидеальной плазмы, а также методы расчета транспортных сечений приведены нами в работах [6, 7]. Там же приводится обоснование используемой формы интерполяции прицельного параметра (радиуса экранирования) при решении задачи рассеяния заряженных частиц.

МЕТОД ЧЕПМЕНА-ЭНСКОГА

Для расчета электронных кинетических коэффициентов плазмы требуется знание явного вида функции распределения электронов $f_e(\vec{v}_e)$. Кинетическое уравнение для бесстолкновительной плазмы является следствием теоремы Лиувилля [8], согласно которой полная производная по времени от функции распределения $f_e(v_e)$ вдоль фазовой траектории обращается в нуль, иначе говоря, функция распределения частиц в бесстолкно-

вительной плазме должна оставаться постоянной вдоль фазовой траектории:

$$d(f_e(v_e))/dt = 0. \quad (1)$$

Учет столкновений приводит к нарушению теоремы Лиувилля, функция распределения перестает быть постоянной вдоль фазовой траектории. В этом случае имеет место соотношение [8]:

$$d(f_e(v_e))/dt = St(f_e). \quad (2)$$

Правая часть (2) определяет характер изменения функции распределения электронов, обусловленного взаимодействием (столкновением) частиц плазмы и называется интегралом столкновений.

Строгий расчет функции распределения электронов основан на решении кинетического уравнения (2). Его тип определяется видом интеграла столкновений [8]. В настоящей работе расчет $f_e(\vec{v}_e)$ основан на решении кинетического уравнения Больцмана. Решение кинетического уравнения для плазмы, при произвольном отклонении от состояния равновесия, в общем виде к настоящему времени не получено. Сказанное относится ко всем известным видам интеграла столкновений [8 – 10]. Даже в случае слабого отклонения системы от равновесного состояния решение кинетических уравнений представляет значительные трудности вычислительного характера. Естественными переменными функции распределения являются время t , координаты частицы \vec{r} и канонически сопряженные им импульсы \vec{p} . Поэтому дифференциальный оператор полной производной вдоль фазовой траектории имеет вид [8]:

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{\partial f_e}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})f_e = \vec{F}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}}. \quad (3)$$

Рассмотрим полностью ионизованную неидеальную плазму, содержащую некоторое число M сортов заряженных частиц. Кинетическое уравнение Больцмана имеет вид [11]:

$$\frac{df_e}{dt} + (\vec{v}\vec{\nabla})f_e + \vec{F}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} = St(f_e), \quad (4)$$

где \vec{F} – сила, действующая на частицу со стороны внешнего поля, интеграл столкновений Больцмана имеет вид:

$$St(f_e) = \sum_j \iiint [f_e(\vec{v}'_e) f_e(\vec{v}'_j) - f_e(\vec{v}_e) f_e(\vec{v}_j)] \times \\ \times g_{ej} b db d\phi d\vec{v}_j, \quad (5)$$

где: b, ϕ – прицельный параметр полярный угол $\phi \in [0, 2\pi]$, \vec{v}_j и \vec{v}'_j – скорости частиц сорта j до и после столкновения, g_{ej} – относительная скорость сталкивающихся электронов и частиц сорта j .

Решение уравнения Больцмана в условиях, когда функция распределения слабо отклоняется от равновесной было предложено Чэпменом и Энскогом (см. напр. [11]). Основная идея метода Чэпмена-Энскага состоит в разложении асимметричной по полю поправки к функции распределения в ряд по полиномам Сонина. Решение уравнения (4) ищется в виде [13]:

$$f_e(v_e) = f_e^0(v_e) + \vec{v}_e \vec{f}_e^1(v_e), \quad (6)$$

где: $f_e^0(\vec{v}_e) = n_e (m_e/2\pi T)^{3/2} e^{(-m_e v_e^2/2T)}$ – функция распределения электронов по скоростям Максвелла, соответствующая равновесному состоянию плазмы при заданных n_e и T , $f_e^0(v_e) \vec{\phi}_e(v_e)$, m_e – масса электрона. Вектор возмущения $\vec{\phi}_e(v_e)$ дается в виде ряда по полиномам Сонина $S_r^{3/2}(x)$ степени r и порядка $3/2$:

$$\vec{\phi}_e(v_e) = \sum_{r=0}^{\infty} \vec{P}_r^{3/2} (m_e v_e^2/2T). \quad (7)$$

Неизвестные векторы \vec{P}_r^e , определяются из решения линеаризованного по $\vec{\phi}_e(v_e)$ кинетического уравнения:

$$\vec{v} \frac{df_e^0}{d\vec{r}} + \frac{d\vec{E}}{m_e} \frac{df_e^0}{d\vec{v}_e} = \sum_j \vec{J}_{ej}, \quad (8)$$

где:
$$\vec{J}_{ej} = \iiint [f_e^0 f_j^0 [\vec{v}_e \vec{\phi}_e(\vec{v}_e) + \vec{v}_j \vec{\phi}_j(\vec{v}_j) - \\ - \vec{v}'_e \vec{\phi}'_e(\vec{v}'_e) - \vec{v}'_j \vec{\phi}'_j(\vec{v}'_j)]] g_{ej} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi d\phi d\vec{v}_j. \quad (9)$$

В левую часть уравнения (8) входит только равновесная функция f_e^0 , так как в линейном приближении возмущение скорости частиц

и внешние силы также рассматриваются как малые величины. Умножая уравнение (8) на

величину $\frac{2}{n_e} \frac{m_e}{2T} v_e S_n^{3/2} (m_e v_e^2/2T)$ и выполняя

интегрирование по скоростям электронов v_e , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных векторов \vec{P}_r^e [13]:

$$3\delta_{n0} \left[\frac{\partial \ln(n_e T)}{\partial \vec{r}} - \frac{e\vec{E}}{T} \right] - \frac{15}{2} \delta_{n1} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} = \\ = - \sum_{r=0}^{\infty} L_{rn}^e \vec{P}_r^{(e)}, \quad (10)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, $m = 0, 1$; $n = 0, 1, 2$. Получающаяся в результате этого бесконечная система линейных алгебраических уравнений, эквивалентная уравнению (4), решается приближенно путем ее редукции. Номер максимального члена в разложении (7) выбирается равным семи. Иначе говоря, система (10) содержит восемь векторных уравнений для $n = 0, 1, 2, \dots, 7$. Коэффициенты L_{rn}^e носят название скобочных интегралов и определяются выражениями [13]:

$$L_{rn}^e = - \frac{2}{n_e} \frac{m_e}{2T} \sum_j \iiint [f_e^0 f_j^0 \vec{v}_e S_n^{3/2} \left(\frac{m_e v_e^2}{2T} \right) \times \\ \times g_{ej} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi d\phi d\vec{v}_e d\vec{v}_j = \left[\vec{v}'_e S_r^{3/2} \left(\frac{m_e v_e^2}{2T} \right) - \right. \\ \left. - \vec{v}_e S_r^{3/2} \left(\frac{m_e v_e^2}{2T} \right) + \vec{v}'_j S_r^{3/2} \left(\frac{m_j v_j^2}{2T} \right) - \vec{v}_j S_r^{3/2} \left(\frac{m_j v_j^2}{2T} \right) \right] \quad (11)$$

Величины L_{rn}^e можно представить в следующем виде: $L_{rn}^e = \sum_j L_{rn}^{ej}$, где суммирование ведется по всем сортам частиц.

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
 Определив из решения кинетического уравнения функцию распределения, можно вычислить кинетические коэффициенты газа или

плазмы. Для этой цели используется метод моментов функции распределения [9, 12]. В плазме определяющую роль играют электронные кинетические коэффициенты, поскольку электроны, имея значительно меньшую по сравнению с ионами и атомами массу, обладают соответственно значительно большей подвижностью. В общем случае неравновесной неоднородной плазмы имеется 9 электронных транспортных коэффициентов, определяющихся соответственно из уравнений для плотностей тока, диффузионного и теплового потоков [13]:

$$\begin{aligned} \vec{j}_e &= \sigma_e \vec{E} + \alpha_e \vec{\nabla} T + \gamma_e^D \vec{\nabla} n_e; \\ \vec{\Phi}_k &= D_k^E - D_k^T \vec{\nabla} T - D_k^D \vec{\nabla} n_k; \\ \vec{q} &= -\beta_e \vec{E} - \sum_k \lambda_k \vec{\nabla} T + \sum_k \omega_k \vec{\nabla} n_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Кинетические коэффициенты, представленные в выражениях (12) имеют вид [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{3e^2 n_e}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}; \quad \alpha_e = \frac{15en_e k_B}{2m_e} \frac{\tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}; \\ \gamma_e^D &= \frac{3eP}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \beta_e &= \frac{15en_e k_B T}{2m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e + \tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}; \quad \lambda_e = \frac{75n_e k_B T}{4m_e} \frac{\tilde{L}_{01}^e + \tilde{L}_{11}^e}{L^{(n+1)e}}; \\ \omega_e &= \frac{15Pk_B T}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e + \tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} D_e^E &= \frac{3en_e}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}; \quad D_e^T = \frac{15n_e k_B}{m_e} \frac{\tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}; \\ D_e^D &= \frac{3P}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Смысл всех приведенных в формулах (13) – (15) коэффициентов переноса ясен из формулы (12). Величины в (13) – (15) характеризуют перенос заряда, энергии и массы соответственно, обусловленный наличием внешнего поля \vec{E} , градиента $\vec{\nabla} T$ температуры и градиента плотности $\vec{\nabla} n_e$. В формулах (13) – (15) величина $L^{(n+1)e}$ – определитель $(n+1)^{го}$ порядка:

$$L^{(n+1)e} = \begin{vmatrix} L_{00}^e & \dots & L_{0n}^e \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n0}^e & \dots & L_{nn}^e \end{vmatrix}, \quad (16)$$

а \tilde{L}_{mn}^e – минор элемента L_{mn}^e в этом определителе. При вычислении кинетических коэффициентов полностью ионизованной плазмы удобно пользоваться приведенными величинами: $\sigma_e^* = \sigma_e / \sigma_e^0$; $\alpha_e^* = \alpha_e / \alpha_e^0$; $\beta_e^* = \beta_e / \beta_e^0$ и т.д. Тогда вид всех полученных безразмерных кинетических коэффициентов определяется одной универсальной функцией параметра неидеальности Γ (рис. 1). Размерные величины в знаменателях равны соответственно:

$$\begin{aligned} \sigma_e^0 &= 3\sqrt{\pi} T^{3/2} / (8\sqrt{m_e} e^2); \quad \alpha_e^0 = \frac{15\sqrt{\pi} k_B (k_B T)^{3/2}}{16 \sqrt{m_e} e^3}; \\ \gamma_e^0 &= \frac{3\sqrt{\pi} (k_B T)^{5/2}}{8 \sqrt{m_e} e^3}; \quad \beta_e^0 = \frac{15\sqrt{\pi} (k_B T)^{5/2}}{16 \sqrt{m_e} e^4}; \\ \lambda_e^0 &= \frac{75\sqrt{\pi} (k_B T)^{5/2}}{32 \sqrt{m_e} e^4}; \quad \omega_e^0 = \frac{15\sqrt{\pi} (k_B T)^{7/2}}{16 \sqrt{m_e} e^4}; \\ D_{e0}^E &= \frac{3\sqrt{\pi} (k_B T)^{3/2}}{8 \sqrt{m_e} e^3}; \quad D_{e0}^D = \frac{3\sqrt{\pi} (k_B T)^{5/2}}{8 \sqrt{m_e} e^4}; \\ D_{e0}^T &= \frac{15\sqrt{\pi} k_B (k_B T)^{3/2}}{16 \sqrt{m_e} e^4}. \end{aligned} \quad (17)$$

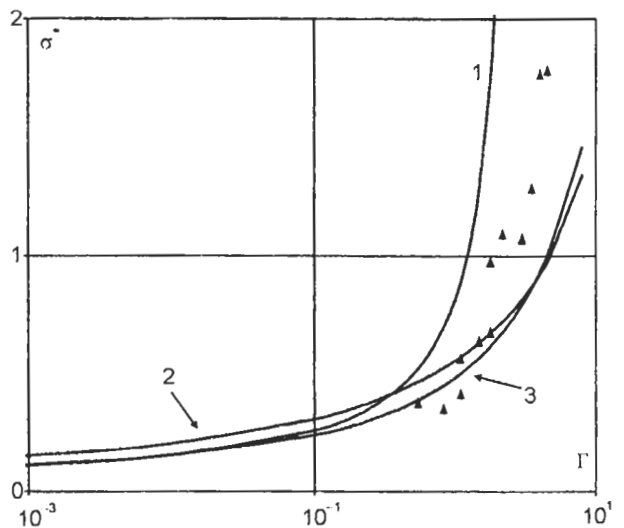


Рис. 1. Зависимость приведенных электронных кинетических коэффициентов полностью ионизованной плазмы от параметра неидеальности: теория: 1 – [2], 2 – [14], 3 – данная работа интерполяция для модели [15]; эксперимент – [16].

Для полностью ионизованной плазмы каждый элемент L_{mn}^e в определителе (16) представляется в виде суммы двух слагаемых, отвечающих электрон-ионным и электрон-электронным столкновениям:

$$L_{mn}^e = L_{mn}^{ei} + L_{mn}^{ee}. \quad (18)$$

Отношение значений электропроводности плазмы, вычисленных с учетом и без учета электрон-электронных столкновений, называют спитцеровским множителем γE . Ранее считалось, что спитцеровский множитель является постоянной величиной, при заданном значении эффективного заряда ионов в плазме: $\gamma E = 0,582$, при $z = 1$; $\gamma E = 0,683$, при $z = 2$; $\gamma E = 0,744$, при $z = 3$; $\gamma E = 0,785$, при $z = 4$; ...; $\gamma E \rightarrow 1$, при $z \rightarrow \infty$. Однако, как показано нами в [6], применение единого способа усреднения по скоростям частиц во всех членах кинетического уравнения, и учет не логарифмических членов в транспортных сечениях рассеяния частиц, приводит к зависимости спитцеровского множителя от параметра неидеальности плазмы (рис. 2).

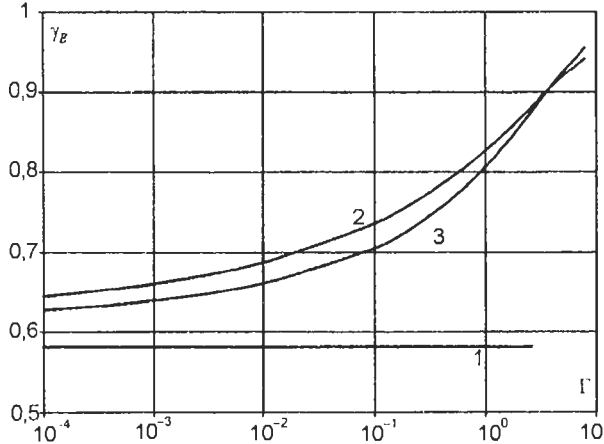


Рис. 2. Зависимость спитцеровского множителя от параметра неидеальности: 1 – [2], 2 – [14], 3 – данная работа интерполяция для модели [15].

Из рис. 2 видно, что относительный вклад электрон-электронных столкновений в кинетические коэффициенты уменьшается с ростом параметра неидеальности. Расчеты показывают, что это имеет место и в многозарядной плазме. Решение кинетического уравнения Больцмана получено путем редукции системы уравнений (10) в 8-м приближении по полиномам Сонина. Процесс сходимости полученных результатов иллюстрирует табл. 1. Относительная погрешность полученных в

Таблица 1

Сходимость процесса Чепмена-Энскога для $\gamma_E(\Gamma)$

Размер матрицы	Спитцеровское приближение	Данная работа		
		$\Gamma = 10^{-45}$	$\Gamma = 10^{-1}$	$\Gamma = 1$
2×2	0,5945	0,5981	0,7053	0,80808
3×3	0,5751	0,5797	0,7029	0,80657
4×4	0,5785	0,5830	0,7047	0,80678
5×5	0,5800	0,5847	0,7055	0,80678
6×6	0,5808	0,5854	0,7058	0,80675
7×7	0,5812	0,5859	0,7060	0,80673
8×8	0,5815	0,5861	0,7061	0,80673

этом приближении результатов для полностью ионизованной плазмы имеет порядок 10^{-4} .

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Наличие внешнего магнитного поля внесет анизотропию в транспортные свойства плазмы [9]. С математической точки зрения это означает, что кинетические коэффициенты плазмы в магнитном поле становятся тензорами 2-го ранга. Их вычисление уже выполнялось в ряде работ [17 – 19]. В [19] для расчета функции распределения электронов использовались методы разложения по сферическим гармоникам и Чепмена-Энскога [11]. Точность результатов [19] на данный момент не может считаться удовлетворительной, поскольку в схеме разложения в ряд по системе полиномов Сонина сохранялись лишь первые три члена ряда и, кроме того, значение кулоновского логарифма $\Lambda = \ln(b_{max}/b_{min})$ (b_{min} – минимальный прицельный параметр) считалось постоянной величиной $\Lambda = 7$. В [17] точность расчета коэффициентов переноса была значительно повышена путем использования матрицы 20×20 . Была учтена также зависимость кулоновского логарифма от параметра неидеальности Γ . Однако при расчете транспортных сечений и скобочных интегралов усреднение по скоростям проводилось нерегулярно, поскольку зависимостью аргумента кулоновского логарифма от скорости пренебрегалось, а максимальный прицельный па-

параметр b_{\max} выбирался равным радиусу Дебая r_D . Поэтому полученные в [17] результаты справедливы лишь для слабонеидеальной плазмы $\Gamma \ll 1$.

В [18] расчеты поперечных компонент тензоров различных электронных кинетических коэффициентов плазмы в магнитном поле вычислены в τ -приближении. Используются различные модификации кулоновского логарифма: в слабонеидеальной плазме в качестве максимального значения прицельного параметра выбирался радиус Дебая: $b_{\max} = r_D$, в плотной плазме – среднее межионное расстояние $b_{\max} = r_{cp}$. В качестве минимального прицельного параметра бралась наибольшая из характерных длин рассеяния – длина Ландау $\lambda_L = e^2/T$ или тепловая длина волны де Бройля электрона $\lambda_e = \hbar/\sqrt{2\pi m T}$ – для классического и вырожденного случая соответственно. Однако в [18] не учитывались электрон-электронные столкновения. Кроме того, соответствующий выбор максимального и минимального прицельных параметров осуществлялся на этапе расчета кулоновского логарифма после выполнения процедуры усреднения транспортного сечения по энергии, что также снижает точность вычислений.

Для магнитоактивной плазмы изложим методику расчета компонент тензора проводимости $\sigma_{ij}(\Gamma)$. Остальные кинетические коэффициенты могут быть вычислены аналогично. Для установления зависимостей $\sigma_{ij}(\Gamma)$ от параметра Γ в широком диапазоне его изменения выполним прямой расчет, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана с учетом электрон-ионных и электрон-электронных столкновений. Как и ранее, единственным допущением является использование интерполяционного соотношения для радиуса экранировки r_s (максимального прицельного параметра b_{\max}) на самом первом этапе расчета кинетических коэффициентов – при вычислении транспортных сечений рассеяния свободных зарядов.

Рассмотрим неидеальную полностью ионизованную плазму с температурой T и концентрацией электронов n_e , находящуюся в постоянном во времени и однородном внешнем магнитном поле. При наличии внешнего электромагнитного поля, заряженные частицы движутся под действием силы Лоренца:

$$\vec{F} = Ze \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_e, \vec{H}] \right), \quad (19)$$

где c – скорость света в вакууме. В стационарном случае, при постоянных во времени электрическом и магнитном полях функция распределения электронов не зависит от времени явно: $\partial f_e / \partial t = 0$, поэтому имеем:

$$(\mathbf{v}\nabla) f_e + e \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e, H] \right) \frac{\partial f_e}{\partial p} = St(f_e). \quad (20)$$

Интеграл столкновений Больцмана по-прежнему имеет вид (5). Для слабо неравновесной системы, используя представление функции распределения $f_e(\vec{v}_e)$ в виде (6), умножая (20) на $\frac{2}{n_e} \frac{m_e}{2T} v_e S_n^{3/2} \frac{m_e v_e^2}{2T}$ и интегрируя по скоростям электронов \vec{v}_e , снова получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных векторов \vec{P}_r^e :

$$3\delta_{n0} \left[\frac{\partial \ln(n_e T)}{\partial \vec{r}} - \frac{e\vec{E}}{T} \right] - \frac{15}{2} \delta_{n1} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} - \frac{(2n+3)!!}{2^n n!} \omega_e [\vec{P}_n^e, \vec{h}] = - \sum_{r=0}^{\infty} L_m^e \vec{P}_r^{(e)}, \quad (21)$$

которая является аналогом системы (10) при наличии внешнего магнитного поля напряженности \vec{H} . В (21) введены обозначения: $\omega_e = eH/m_e c$ – электронная циклотронная частота, $\vec{h} = \vec{H}/H$ – единичный вектор в направлении магнитного поля. Приближенное решение системы уравнений (21) также можно получить путем ее редукции. По-прежнему помер максимального члена в разложении (7) выбирается равным семи. Иначе говоря, система (21) содержит восемь векторных уравнений для $n = 0, 1, 2, \dots, 7$. Скобочные интегралы L_m^e сохраняют вид (11).

Систему векторных уравнений (21) относительно неизвестных векторов \vec{P}_r^e можно рассматривать как совокупность трех систем скалярных уравнений для их компонент $\vec{P}_r^{(e)} = (P_r^{(e)} x, P_r^{(e)} y, P_r^{(e)} z)$. Причем составляющие векторов \vec{P}_r^e , параллельные магнитному полю $P_r^{(e)} x$ образуют независимую систе-

му уравнений. Ввиду того, что внешнее магнитное поле не влияет на характер движения заряженных частиц вдоль его направления \vec{h} , эта система уравнений совпадает с (10). Поэтому продольные кинетические коэффициенты плазмы остаются такими же, как и в отсутствие поля \vec{H} .

Остальные пары компонент каждого из векторов \vec{P}_r^e , лежащие в плоскости, перпендикулярной, образуют систему связанных уравнений. Поэтому, на самом деле, имеются две системы уравнений для продольной и поперечной составляющих векторов \vec{P}_r^e . Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, направим вектор \vec{H} вдоль оси z (компоненты вектора $\vec{h} = (0, 0, 1)$). Направление вектора напряженности электрического поля \vec{E} будем считать произвольным.

Для поперечных компонент векторов \vec{P}_r^e из (21) получим:

$$3\delta_{n0} \left[\left(\frac{\partial \ln(n_e T)}{\partial \vec{r}} \right)_\perp - \left(\frac{e\vec{E}}{T} \right)_\perp \right] - \frac{15}{2} \delta_{n1} \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} \right)_\perp - \frac{(2n+3)!!}{2^n n!} \omega_e \left[\vec{P}_{n\perp}^e, \vec{h} \right] = - \sum_{r=0}^{\infty} L_{nr}^e \vec{P}_{r\perp}^{(e)}. \quad (22)$$

Нижний индекс \perp обозначает компоненту соответствующего вектора, лежащую в плоскости, перпендикулярной \vec{H} : $\vec{A}_\perp = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y$.

Будем считать плазму однородной во всем объеме, т.е. $T = \text{const}$ и $n_e = \text{const}$. В этом случае электрический ток обусловлен действием только внешнего электрического поля \vec{E} .

Компоненты тензора проводимости σ_{ik} представляют собой коэффициенты пропорциональности между компонентами тока и электрического поля в законе Ома [24]

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad \vec{E} \quad (23)$$

По повторяющимся индексам выполняется суммирование. Вычислив коэффициенты разложения (7) из решения системы уравнений (21) и подставив полученную функцию распределения в виде (6) в выражение (23),

для различных компонент плотности тока имеем:

$$j_x = -\frac{n_e e T}{m_e} P_{0_x}^{(e)}; \quad j_y = -\frac{n_e e T}{m_e} P_{0_y}^{(e)}; \\ j_z = -\frac{n_e e T}{m_e} P_{0_z}^{(e)}. \quad (24)$$

Компоненты вектора \vec{P}_r^e определяются выражениями:

$$P_{0_x}^{(e)} = -\frac{3eE_z}{T} \frac{\Delta_{00}}{\Delta}, \quad P_{0_y}^{(e)} = -\frac{3e}{T} \left(E_x \frac{\Delta'_{00}}{\Delta'} - E_y \frac{\Delta'_{01}}{\Delta'} \right), \\ P_{0_z}^{(e)} = -\frac{3e}{T} \left(E_x \frac{\Delta'_{10}}{\Delta'} + E_y \frac{\Delta'_{11}}{\Delta'} \right). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24) и сравнивая полученные соотношения с выражениями (23), для компонент тензора проводимости магнитоактивной плазмы получим:

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

где: $\sigma_{zz} = \frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta_{00}}{\Delta}$ — продольная;

$$\sigma_{xx} = \frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{00}}{\Delta'}, \quad \sigma_{yy} = \frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{11}}{\Delta'} \quad (\sigma_{xx} = \sigma_{yy})$$
 — поперечные;

$$\sigma_{xy} = -\frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{01}}{\Delta'}, \quad \sigma_{yx} = -\frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{10}}{\Delta'}$$

($\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$) — холловские компоненты тензора проводимости. Определитель Δ поперечному определяется формулой (16), определитель имеет вид:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} L_{00} & A_0 \omega_e & L_{01} & 0 & L_{02} & 0 & L_{03} & 0 & L_{04} & 0 & L_{05} & 0 & L_{06} & 0 & L_{07} & 0 \\ -A_0 \omega_e & L_{00} & 0 & L_{01} & 0 & L_{02} & 0 & L_{03} & 0 & L_{04} & 0 & L_{05} & 0 & L_{06} & 0 & L_{07} \\ L_{10} & 0 & L_{11} & A_0 \omega_e & L_{12} & 0 & L_{13} & 0 & L_{14} & 0 & L_{15} & 0 & L_{16} & 0 & L_{17} & 0 \\ 0 & L_{10} & -A_0 \omega_e & L_{11} & 0 & L_{12} & 0 & L_{13} & 0 & L_{14} & 0 & L_{15} & 0 & L_{16} & 0 & L_{17} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{70} & 0 & L_{71} & 0 & L_{72} & 0 & L_{73} & 0 & L_{74} & 0 & L_{75} & 0 & L_{76} & 0 & L_{77} & A_0 \omega_e \\ 0 & L_{70} & 0 & L_{71} & 0 & L_{72} & 0 & L_{73} & 0 & L_{74} & 0 & L_{75} & 0 & L_{76} & -A_0 \omega_e & L_{77} \end{vmatrix} \quad (26)$$

Здесь $A_n = \frac{(2n+3)!!}{2^n n!}$, величины Δ_{ik} и Δ'_{ik} — миноры соответствующих элементов в опре-

делителях Δ и Δ' . Так как многие элементы определителя Δ' равны нулю, при выполнении численных расчетов его использование оказывается неудобным, из-за возникновения машинных нулей. Поэтому в конечном итоге при решении системы уравнений (22) приходится выражать x -компоненты всех векторов $\vec{P}_{r_1}^{(e)}$ через линейные комбинации их y -компонент, а затем получившиеся две системы уравнений для величин $P_{n_x}^{(e)}$ и $\vec{P}_{r_1}^{(e)}$ ($n = 0, 1, \dots, 7$) решать отдельно.

Результаты расчета компонент тензора проводимости полностью ионизованной плазмы в магнитном поле также удобно представлять в виде приведенных величин с размерным множителем σ_0 из (17). Зависимости всех компонент тензора σ_{ik} от термодинамических параметров и напряженности магнитного поля могут быть представлены в виде функций от двух независимых безразмерных параметров: неидеальности Γ и замагниченности $\omega_e \tau_0$. Характерное время определяется

формулой $\tau_0 = \sqrt{\pi m_e \Gamma^3 / (8 n_e e^4)}$, а среднее время передачи импульса запишется в виде $\tau = \tau_0 x$, где величина x некоторым достаточно сложным образом выражается через приведенные выше определители. Графики зависимостей приведенных значений поперечных и холловских компонент тензора проводимости от параметра замагниченности приведены на рис. 3.

КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Решение кинетического уравнения Больцмана для частично ионизованной плазмы требует учета столкновений электронов с атомами. Это достигается добавлением к электронному матричному элементу (скобочному интегралу) L_m^e слагаемого, характеризующего электрон-атомные (e - a)-столкновения L_m^{ea} . Для частично ионизованной атомарной плазмы скобочные интегралы запишутся в виде суммы трех слагаемых:

$$L_m^e = L_m^{ei} + L_m^{ee} + L_m^{ea}. \quad (27)$$

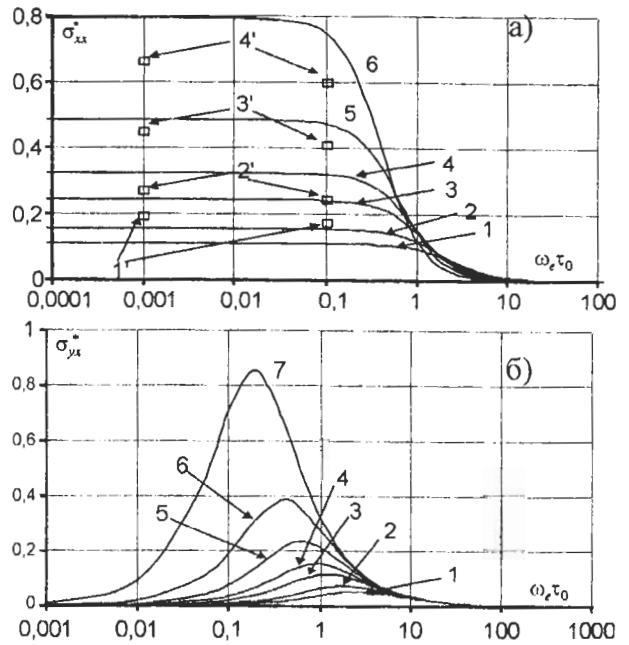


Рис. 3. Зависимости приведенных значений поперечных (а) и холловских компонент тензора (б) проводимости плазмы от параметра замагниченности при различных значениях параметра неидеальности: 1 – $\Gamma = 0,001$; 2 – 0,01; 3 – 0,1; 4 – 0,3; 5 – 1; 6 – 3; 7 – 10; 1' – 4' – соответствующие кривым 1 – 4 данные расчетов [18].

При вычислении из (27) необходимы энергетические зависимости транспортных сечений рассеяния электронов на атомах. Они могут быть получены из квантово-механических расчетов, либо путем аппроксимации данных эксперимента. Универсальных зависимостей транспортных сечений электрон-атомных (тем более электронно-молекулярных) столкновений от энергии не существует. Однако, для атомов, обладающих близкими конфигурациями внешних электронных оболочек можно предложить некоторые общие зависимости. Например, для сечения рассеяния электронов на атомах инертных газов имеется простая формула, дающая хорошую точность аппроксимации сечений (<10%) вплоть до энергии ~ 10 эв [21, 22]:

$$\sigma_{ea} = [ae^{-hc} + ce^d e^{-f\epsilon}] \text{Å}^2. \quad (28)$$

Значения коэффициентов a, b, c, d, f для некоторых газов приведены, например в [21].

При расчете кинетических характеристик частично ионизованной плазмы возникает сложность, связанная с неравномерной сходимостью рядов по полиномам Сонина для e - e , e - i -столкновений с одной стороны, и e - a -

столкновений – с другой. Если, например, 4-ое приближение в случае полностью ионизованной плазмы дает точность порядка 0,5% и менее, то для достижения той же точности в случае частично ионизованной плазмы требуется брать уже 10-12-ое приближение. Такая особенность поведения интеграла столкновений для плазмы инертных газов обусловлена немонотонной зависимостью транспортных сечений рассеяния электронов на атомах и наличием минимума Рамзауэра [1]. При учете 7-го приближения по полиномам Сонина в интеграле столкновений погрешность метода расчета кинетических коэффициентов частично ионизованной плазмы не превышает 1% для всех исследуемых типов сечений рассеяния.

В данной работе выполнен широкодиапазонный расчет электронных кинетических коэффициентов плазмы некоторых классов чистых веществ. Так как в литературе имеется обширные экспериментальные данные для электропроводности плазмы инертных газов [23 – 27], приведем для них результаты расчетов проводимости. При вычислении кинетических коэффициентов частично ионизованной плазмы в качестве входных данных методики расчета используются термодинамические характеристики плазмы данного вещества (температура, состав, давление и т.д.). Их расчет выполнен в рамках модели уравнения состояния плазмы, развитой нами в [28].

При сравнении с экспериментальными данными можно выделить на фазовой диаграмме области слабой, умеренной и сильной неидеальности. Для слабо ($\Gamma < 0,1$) и умерен-

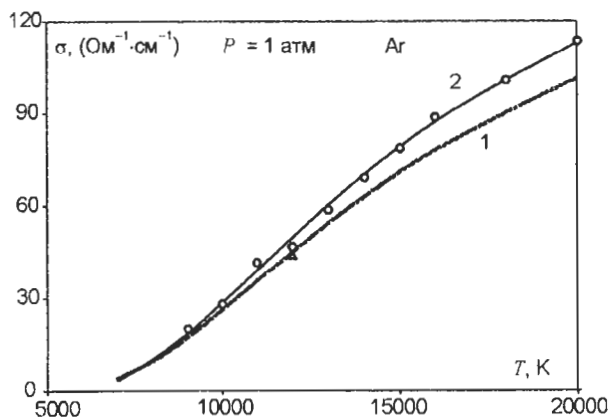


Рис. 4. Зависимость электропроводности слабонеидеальной плазмы аргона от температуры. Расчет: сплошные кривые – интерполяция сечения по b_{max} , пунктир – по r_s , эксперимент [23].

но ($0,1 < \Gamma < 1$) неидеальной плазмы имеется вполне удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных данных (рис. 4, 5).

С ростом Γ согласие ухудшается, однако для состояний с умеренной неидеальностью $\Gamma \sim 0,3$ расчет в основном попадает в пределы экспериментальных погрешностей (рис. 5).

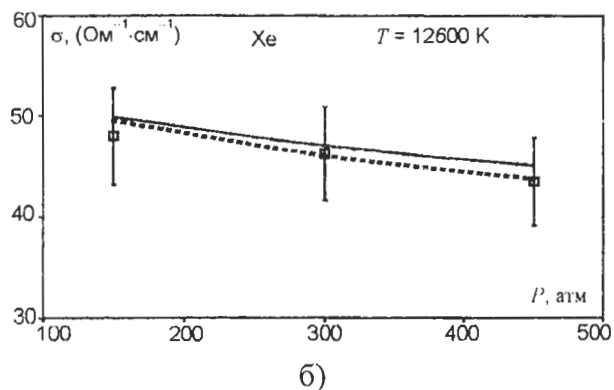
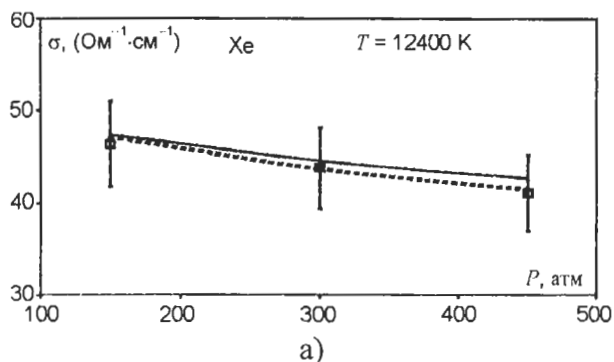


Рис. 5. Зависимость электропроводности умеренно неидеальной плазмы ксенона от давления вдоль изотерм: сплошные кривые – интерполяция по b_{max} , пунктир – интерполяция по r_s , эксперимент [24]. а) – $T = 12400\text{K}$; б) – $T = 12600\text{K}$.

Следует заметить, что погрешность измерений проводимости, а также температуры в области этой области фазовой диаграммы довольно велика и составляет 10 – 15% [24], так что здесь согласие экспериментальных и расчетных значений проводимости также может считаться удовлетворительным. Изменение характера экранировки с ростом параметра неидеальности сказывается на результатах расчета проводимости таким образом, что при $\Gamma < 0,166$ использование кулоновского потенциала (интерполяция по максимальному прицельному параметру) дает более близкие к эксперименту значения (рис. 4). При $r_{cp} > r_D$ – $\Gamma > 0,166$ наоборот, использование короткодействующего кулоновского потенциала (ККП) (интерполяция по радиусу

экранирования) более точно согласуется с экспериментальными данными (рис. 5).

При дальнейшем увеличении Γ согласие расчетных и экспериментальных значений проводимости еще более ухудшается. Если для слабонеидеальной плазмы практически все известные методы расчета дают близкие значения, то в области сильной неидеальности $\Gamma \sim 1$ и выше имеется большой разброс и согласие с экспериментом для некоторых точек является скорее случайным. Кроме того, и погрешность измерений также заметно растет и составляет 30 – 50% [25 – 27].

На рис. 6 приведены результаты расчета проводимости сильно неидеальной $\Gamma > 1$ плазмы аргона вдоль изобар 270 и 6800 атм. Видно, что лишь с учетом экспериментальных погрешностей, некоторые значения проводимости близки к расчетным изобарам. Здесь характерно заметное занижение расчетных значений проводимости по сравнению с экспериментальными. Средние значения экспериментально измеренных величин не попадают в заявленный в [25] диапазон изменения давления в плазме.

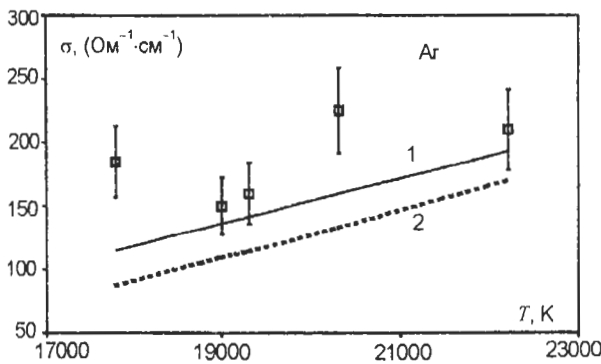


Рис. 6. Зависимость электропроводности сильно неидеальной плазмы аргона от температуры вдоль изобар: 1 – $P = 270$ атм, 2 – $P = 6800$ атм, эксперимент [25].

В области сильной неидеальности для плазмы ксенона имеются данные по измерению электропроводности [25 – 27]. Результаты расчетов для некоторых состояний и сравнение с экспериментальными данными приводятся на рис. 7 – 9. Диапазон изменения параметра неидеальности составляет $0,5 < \Gamma < 5$ (рассчитан в рамках модели, развитой в [28]). Помимо сильного межчастичного взаимодействия, существенное влияние на электропроводность плазмы ксенона оказывает

присутствие ионов с зарядом +2, поскольку диапазон изменения температуры для условий эксперимента, например [26], составлял $(29 - 95) \cdot 10^4$ К.

Для более детального обсуждения результатов сравнения расчетных и экспериментальных значений проводимости плазмы ксенона разобьем массив экспериментальных точек на две части, соответствующие двум различным диапазонам измеренных давлений: $P = 2 - 20$ кбар и $P = 20 - 73$ кбар.

На рис. 7 приведены результаты расчета проводимости плазмы ксенона вдоль изобар 2 кбар и 20 кбар. Экспериментально измеренные значения давления плазмы для всех приведенных точек лежат в этом диапазоне. Однако средние значения измеренной электропроводности для большинства результатов измерений лежат за пределами расчетных изобар проводимости. Причем это отклонение тем больше, чем выше значение Γ . Для тех экспериментальных точек, которые лежат между кривыми 1 и 2, характерные значения Γ как правило не превосходят 1.

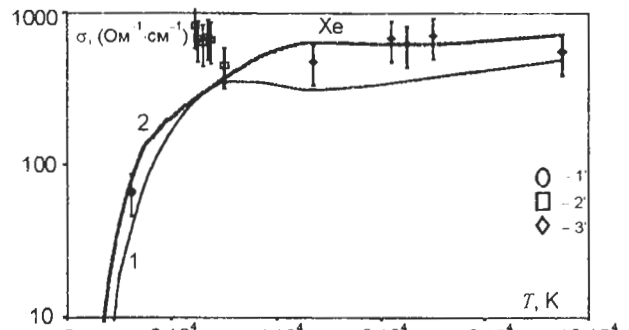


Рис. 7. Зависимость электропроводности сильно неидеальной плазмы ксенона от температуры вдоль изобар (высокие давления). Расчет: 1 – $P = 2 \cdot 10^4$ атм, 2 – $P = 2 \cdot 10^4$ атм, эксперимент: 1' – [27], 2' – [25], 3' – [26].

На рис. 8 представлены данные, аналогичные предыдущему графику, для диапазона сверхвысоких давлений $P = 20 - 73$ кбар. Так же как и в предыдущем случае, средние измеренные значения проводимости для большинства экспериментальных точек лежат вне диапазона расчетных ее значений для изобар 20 и 73 кбар. И хотя для многих точек границы экспериментальных погрешностей попадают в область между расчетными кривы-

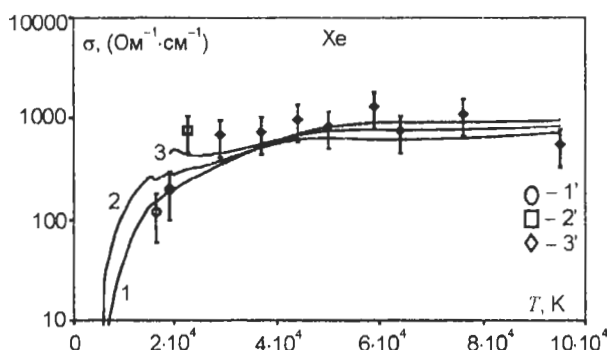


Рис. 8. Зависимость электропроводности сильно неидеальной плазмы ксенона от температуры вдоль изобар (сверхвысокие давления). Расчет: 1 – $P = 2 \cdot 10^4$ атм, 2 – $P = 4 \cdot 10^4$ атм, 3 – $P = 7,3 \cdot 10^4$ атм, эксперимент: 1' – [27], 2' – [25], 3' – [26].

ми 1 и 3, количественное согласие здесь также не может считаться удовлетворительным.

На рис. 9 приводится сравнение результатов расчета и измерения [27] проводимости плазмы ксенона вдоль ударной адиабаты. Согласие расчетных и экспериментальных значений проводимости можно считать удовлетворительным, не смотря на то, что значения параметра неидеальности вдоль ударной адиабаты велики $\Gamma > 3$. Это согласие можно объяснить лишь большой погрешностью 50% самого измерения проводимости.

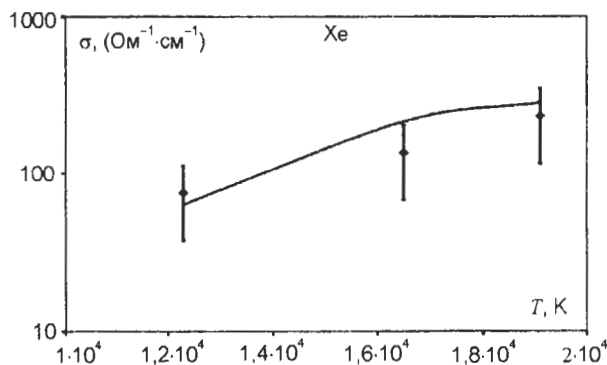


Рис. 9. Зависимость электропроводности сильно неидеальной плазмы ксенона от температуры вдоль ударной адиабаты. Расчет – данная работа, эксперимент [27].

Разработанная программа решения кинетического уравнения Больцмана наряду с электропроводностью, позволяет вычислять также остальные электронные кинетические коэффициенты частично ионизованной плазмы согласно формулам (13) – (15). Такие расчеты также были выполнены для плазмы аргона, криптона и ксенона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе методом решения кинетического уравнения Больцмана выполнен расчет электронных кинетических коэффициентов неидеальной полностью и частично ионизованной плазмы с экранированным взаимодействием между зарядами в отсутствие и при наличии постоянного внешнего магнитного поля. Решение кинетического уравнения выполнено методом Чепмена-Энскога. С целью минимизации вычислительных погрешностей методики расчета, интерполяция между состояниями слабой и сильной неидеальности осуществлялась на этапе расчета сечений рассеяния заряженных частиц. Исследована сходимость процесса Чепмена-Энскога в различных областях диаграммы состояний плазмы (в том числе в условиях многократной ионизации). Показано, что вклад электрон-электронных столкновений в кинетические коэффициенты уменьшается с ростом параметра неидеальности. Установлены зависимости продольной, поперечной и холловской компонент тензоров проводимости, электронной теплопроводности, диффузии, термо-ЭДС и т.д. от параметра неидеальности плазмы Γ и степени ее замагниченности $\omega_e \tau_0$. Показано, что выбор модели уравнения состояния оказывает существенное влияние на результаты расчета проводимости сильно неидеальной плазмы. Разработана широкодиапазонная методика расчета электропроводности частично ионизованной плазмы, применимая в области слабой и сильной неидеальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фортон В.Е., Якубов И.Т. Неидеальная плазма. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 368 с.
2. Спитцер Л., Хэрм Р. Явления переноса в полностью ионизованном газе//Проблемы современной физики. II. – 1956. – С.70-79.
3. Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1964.
4. Климонтович Ю., Эбеленг В. Квантовые кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы//ЖЭТФ. –1972. – Т. 62, № 3. – С. 905-917.
5. Беспалов И.М., Полищук А.Я. Методы расчета транспортных коэффициентов плазмы в

- широком диапазоне параметров. – Препр. ИВТАН, №1-257, М., 1988.
6. Заика Е.В., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Электропроводность полностью ионизованной неидеальной плазмы с экранированным взаимодействием между зарядами//ТВТ.– 2000. – Т. 38, № 1. – С. 5-11.
 7. Заика Е.В., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Электропроводность полностью ионизованной магнитоактивной плазмы с экранированным взаимодействием между зарядами//ТВТ. – 2000. – Т. 38, № 6. – С. 853-861.
 8. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979.
 9. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. – М.: Наука, 1975.
 10. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т.2. – М.: Мир, 1978.
 11. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
 12. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов. – М.: Наука, 1980. – 376 с.
 13. Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы/Под ред. Л.С. Полака. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
 14. Муленко И.А., Хомкин А.Л. Решение уравнения Больцмана для полностью ионизованной плазмы с короткодействующим потенциалом взаимодействия между зарядами//ТВТ. – 1991. – Т. 29, № 6. – С. 1234-1236.
 15. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. – М.: Мир, 1976.
 16. Иванов Ю.В., Минцев В.Б., Фортов В.Е., Дреммин А.Н. Электропроводность неидеальной плазмы//ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71, № 1. – С. 216-224.
 17. Кинетические процессы в газах и плазме/Сб. статей под ред. А. Хохштива. – М.: Атомиздат, 1972. – 368 с.
 18. Lee Y.T., More R.M. An electron conductivity model for dense plasmas//Phys. Fluids.–1984. – Vol. 27, № 5. – P. 1273-1286.
 19. Шкаровский И., Джонсон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. – М.: Атомиздат, 1969.
 20. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
 21. Хомкин А.Л. К расчету термодинамических функций, состава и электропроводности плазмы инертных газов//ТВТ. – 1978. – Т. 16, № 1. – С. 37-42.
 22. Атражев В.М., Якубов И.Т. Подвижность электронов в плотных газах и жидкостях//ТВТ. – 1980. – Т. 18, № 6. – С. 1292-1311.
 23. Devoto R.S. Transport coefficients of ionized argon//Phys. Fluids. – 1973. – Vol. 16, № 5. – P. 616-623.
 24. Popovic M.M., Vitel Yu, Mihajlov A.A. Some interpretation of experimental values of DC electrical conductivity and spectral line shape// Strongly Couplet Plasma Conf. (Jamanaka Lake, Japan). – 1989.
 25. Иванов Ю.В., Минцев В.Б., Фортов В.Е., Дреммин А.Н. Электропроводность неидеальной плазмы//ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71, № 1. – С. 216-224.
 26. Минцев В.Б., Фортов В.Е., Грязнов В.К. Электропроводность высокотемпературной неидеальной плазмы//ЖЭТФ. – 1980. – Т. 79, № 1. – С. 116-124.
 27. Минцев В.Б., Фортов В.Е. Электропроводность ксенона в закритических условиях// Письма в ЖЭТФ. – 1979. – Т. 30, № 7. – С. 401-404.
 28. Муленко И., Олейникова Е., Соловей В., Хомкин А. Широкодиапазонная модель смеси для неидеальных газов и плазмы сложного состава с химическими реакциями//ТВТ. – 2001. – Т. 39, № 1. – С. 13-25.

© Ю.А. Выжол, А.Н. Жорова, И.А. Муленко, А.Л. Хомкин, 2009