УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел.: (057) 7073737, E-mail: amakarichev@mail.ru)

Надежность циклических соединений в комплекс сложных восстанавливаемых систем с временным резервом. II

(Статью представил д-р техн. наук В. Г. Тоценко)

Для множеств сложных восстанавливаемых систем с циклическим соединением их в комплекс и временным резервом, с марковским потоком отказов элементов и индивидуальной функцией распределения времени обслуживания элементов сложных систем, число которых возрастает обратно пропорционально интенсивности отказов элементов сложных систем так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания ограничена сверху величиной, меньше единицы, с дисциплиной обслуживания требований в порядке их поступления найдено асимптотическое распределение времени безотказной работы комплексов с момента исправности всех элементов всех сложных систем.

Для комплексів складних відновлювальних систем з циклічним з’єднанням їх у комплекс і резервом часу, з марківським потоком відмов елементів та індивідуальною функцією розподілу часу обслуговування елементів складних систем, число яких зростає зворотньо пропорційно інтенсивності відмов елементів складних систем так, що сумарне навантаження на систему обслуговування є обмеженим зверху величиною, меншою за одиницю, з дисципліною обслуговування вимог у порядку їхнього надходження знайдено асимптотичний розподіл часу безвідмовної роботи комплексів з моменту справності усіх елементів усіх складних систем.

Ключевые слова: комплексы сложных восстанавливаемых систем с временным резервом.

Лемма 6. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\left| E\int_{\Delta}\!\!\ldots\!\int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E\int_{\Delta}\!\!\ldots\!\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0 .$$

Доказательство. Выберем любое число $\varepsilon > 0$. Из леммы 3 следует, что существует такое $z = z(\varepsilon)$, что для любого $z \ge z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta \setminus \Delta(z)}\!\!\ldots\!\int \mathrm{B}_{\lambda}(x_1, x_{sk})\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6} . \tag{18}$$

Поскольку $\lambda(0) \le \lambda$, из леммы 2 следует

$$B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}), \quad B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}). \tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекает

$$E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}, \quad E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{20}$$

Из аксиомы непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l = l(\varepsilon)$, что для любого $l \ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(z) > l) < \frac{\varepsilon}{6\,|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и из неравенства $x_1 < x_{sk} < z$ следует

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(x_1) > l) < P(\Pi_{\lambda(0)}(z) > l) < \frac{\varepsilon}{6\,|\Delta(z)|}. \tag{21}$$

Пусть C_l — случайное событие, состоящее в том, что совпадут моменты возникновения первых l требований двух пуассоновских потоков с параметрами $\lambda(0)$ и $\lambda(0)_-$ (второй поток получается из первого просеиванием). Тогда $P(C_l) = (1 - kN^{-1})^l \to 1$ при $N \to \infty$. Следовательно, для выбранного $\varepsilon > 0$ существует такое $l = l(\varepsilon)$, что для любого $l \ge l(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$P(C_l) > 1 - \frac{\varepsilon}{6\,|\Delta(z)|}. \tag{22}$$

Пусть $C = \{\Pi_{\lambda(0)}(z) \le l\} C_l$ и $I(C)$ — индикатор случайного события C. Тогда

$$\begin{aligned} B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) &= P(\varsigma_0^- > x_1, v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi) = \\ &= P(\varsigma_0^- I(C) > x_1, v_0^{j-}(x_1)\, I(C) > x_{sk} - x_1 + \xi) + \\ &+ P(\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1, v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + \xi) \end{aligned} \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned} B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi) &= P(\varsigma_0 > x_1, v_0^{j}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi) = \\ &= P(\varsigma_0 I(C) > x_1, v_0^{j}(x_1)\, I(C) > x_{sk} - x_1 + \xi) + \\ &+ P(\varsigma_0 I(\overline{C}) > x_1, v_0^{j}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + \xi). \end{aligned} \tag{24}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2007. V. 29. № 6

Из построения случайного события C следует, что

$$\{\varsigma_0 I(C) > x_1, v_0^j(x_1) I(C) > x_{sk} - x_1 + \xi\} =$$
$$= \{\varsigma_0^- I(C) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(C) > x_{sk} - x_1 + \xi\}. \tag{25}$$

Поскольку

$$P(\varsigma_0 I(\overline{C}) > x_1, v_0^j(x_1) I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + \xi) < P(\overline{C}) \le$$
$$\le P(\Pi_{\lambda(0)} > l) + P(\overline{C}) < \frac{\varepsilon}{3\,|\Delta(z)|} \tag{26}$$

(здесь использованы (21) и (22)) и аналогично

$$P(\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + \xi) < P(\overline{C}) < \frac{\varepsilon}{3\,|\Delta(z)|}, \tag{27}$$

из (23)—(27) следует

$$\left| B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) - B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi) \right| < \frac{2}{3\,|\Delta(z)|}. \tag{28}$$

Используя свойство интеграла и (28), получаем

$$\left| E \int_{\Delta(z)} \cdots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int_{\Delta(z)} \cdots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$
$$\le E \int_{\Delta(z)} \cdots \int \left| B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) - B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi) \right| dx_1 \ldots dx_{sk} <$$
$$< \int_{\Delta(z)} \cdots \int \frac{2}{3\,|\Delta(z)|}\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{29}$$

Из (20) и (29) следует, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$

$$\left| E \int_{\Delta} \cdots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int_{\Delta} \cdots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$
$$\le \left| E \int_{\Delta \setminus \Delta(z)} \cdots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) dx_1 \ldots dx_{sk} \right| + \left| E \int_{\Delta \setminus \Delta(z)} \cdots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| +$$
$$+ \left| E \int_{\Delta(z)} \cdots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int_{\Delta(z)} \cdots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отсюда и из определения предела последовательности следует утверждение леммы 6. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\left| J_N(j_1, ..., j_{sk}) - E\int_{\Delta} ... \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk} \right| \to 0 .$$

Доказательство. Для простоты введем обозначения $J_N = J_N(j_1, ..., j_{sk})$,

$$J_N^{(1)} = E\int_{\Delta} ... \int B^{j_1, ..., j_{sk}}(x_1, ..., x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk},$$

$$J_N^{(2)} = E\int_{\Delta} ... \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk}, \; J_N^{(3)} = E\int_{\Delta} ... \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk}.$$

Из лемм 5—7 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные числа $N_1 > N_1(\varepsilon)$, $N_2 > N_2(\varepsilon)$, $N_3 > N_3(\varepsilon)$, что соответственно для любого натурального числа $N > N_1 \left| J_N - J_N^{(1)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, для любого $N > N_2 \left| J_N^{(1)} - J_N^{(2)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, для любого $N > N_3 \left| J_N^{(2)} - J_N^{(3)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $N_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда для любого натурального числа $N > N_0$ справедливо неравенство

$$\left| J_N - J_N^{(3)} \right| \le \left| J_N - J_N^{(1)} \right| + \left| J_N^{(1)} - J_N^{(2)} \right| + \left| J_N^{(2)} - J_N^{(3)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Лемма 7 доказана.

Пусть j — номер элемента j_1, а $v_0^j = \eta_j + w^{(0)}$ — стационарное время пребывания требования j-го типа в ремонтном органе (РО) комплекса $N_{\lambda(0), G_0}$. Оно состоит из двух независимых случайных слагаемых: η_j — длины требования j-го типа с функцией распределения $G_j(x) = P(\eta_j \le x)$ и стационарного времени ожидания обслуживания $w^{(0)}$ в РО комплекса $N_{\lambda(0), G_0}$.

Лемма 8. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда

$$E\int_{\Delta} ... \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk} = \frac{\int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P(v_0^j > x)\, dx}{(sk-2)!} T_{\lambda(0)}.$$

Доказательство. В рассматриваемом кратном интеграле выполним замену переменных $t = x_1,\ t_1 = x_{sk} - x_1,\ t_2 = x_{sk-1} - x_1, ..., t_{sk-1} = x_{sk} - x_{sk-1}$. После этой замены интеграл примет вид

$$E \int\limits_{t_1 > t_2 > ... > t_{sk-1} > 0,\ t > 0} \!\!\! ... \int P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi\}\, dt dt_1 ... dt_{sk-1} =$$

$$= E \int\limits_{t_1 > ... > t_{sk-1} > 0} \!\!\! ... \int dt_1 ... dt_{sk-1} \int\limits_{t > 0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi\}\, dt. \tag{30}$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [1, 2] следует

$$\int\limits_{t > 0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi\}\, dt = P\{v_0^j(t) > t_1 + \xi\}\, T_{\lambda(0)}. \tag{31}$$

С учетом равенств (30), (31) и принятых обозначений искомый интеграл запишем в виде

$$E \int\limits_{t_1 > t_2 > ... > t_{sk-1}} \!\!\! ... \int P\{v_0^j > t_1 + \xi\}\, dt_1 ... dt_{sk-1} T_{\lambda(0)} =$$

$$= \int\limits_{u > 0} dH(u) \int\limits_{t_1 > 0} \frac{[t_1]^{sk-2}}{(sk-2)!} P(v_0^j > t_1 + u)\, dt_1 T_{\lambda(0)} =$$

$$= \int\limits_{u > 0} dH(u) \int\limits_{x > u} \frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0^j > x\}\, dx T_{\lambda(0)} < \frac{E[v_0^j]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_{\lambda(0)} < \infty,$$

так как существует конечный момент $m_{sk} < \infty$ и $\rho < 1$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$q_{\text{c}}^{j_1, j_2, ..., j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k) \sim \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int\limits_{u > 0} dH(u) \int\limits_{x > u} \frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0^j > x\}\, dx T_{\lambda(0)},$$

где j — номер элемента j_1, отказавшего первым на периоде регенерации из первых k сложных систем.

Доказательство. Из леммы 1 вытекает равенство

$$q_{\text{c}}^{j_1, j_2, ..., j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(j_1, ..., j_{sk}).$$

Из леммы 7 при $N \to \infty$ следует

$$\left| J_N(j_1, \ldots, j_{sk}) - E \int_\Delta \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0,$$

из леммы 8 —

$$E \int_\Delta \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} = \frac{\int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P(v_0^j > x)\, dx}{(sk-2)!} T_{\lambda(0)}.$$

Из последних трех соотношений при $N \to \infty$ получаем

$$q_c^{j_1, j_2, \ldots, j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) \sim \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} \frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0^j > x\}\, dx T_{\lambda(0)}.$$

Лемма 9 доказана.

Обозначим $q_c^{1, 2, \ldots, k}$ вероятность того, что на периоде регенерации отказ комплекса произойдет по 1, 2, ..., k-слабомонотонному минимальному пути. Для краткости обозначим $v_0(i_1^l) = v_0^j$, где $j = i_1^l$ — номер элемента, отказавшего первым из первых k сложных систем на периоде регенерации и этот элемент из l-й сложной системы, отказавшей на пути π_l, $l = 1, 2, \ldots, k$.

Лемма 10. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$q_c^{1,2,\ldots,k} \sim \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi \in \Pi_0^k}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\} dx T_{\lambda(0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$ — последовательность отказавших элементов в первых k системах, приведших к отказу комплекса. Последовательность номеров отказавших элементов 1-й, 2-й, ..., k-й систем, приведших к отказу комплекса, имеет вид

$$\begin{array}{l} i_1^1, i_2^1, \ldots, i_s^1, \\ i_1^2, i_2^2, \ldots, i_s^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_1^k, i_2^k, \ldots, i_s^k. \end{array} \qquad (32)$$

Каждый из этих наборов определяет монотонный минимальный путь π_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, на котором произошел отказ i-й сложной системы. Таким образом, $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$ — такая перестановка из номеров (32), указывающая последовательность, в которой произошли отказы элементов в этих сложных системах, что для каждого верхнего индекса сохраняется монотонность по нижнему индексу. Следовательно,

$$q_{\text{c}}^{1,2,\ldots,k} = \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi \in \Pi_0^k}} \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_{sk})} q_{\text{c}}^{j_1, j_2, \ldots j_{sk}} (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k), \tag{33}$$

где $q_{\text{c}}^{j_1, j_2, \ldots, j_{sk}} (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ — вероятность отказа комплекса по таким $1, 2, \ldots, k$-слабомонотонным путям, что отказ l-й сложной системы произошел по монотонному минимальному пути $\pi_l, (l = 1, 2, \ldots, k)$, а перестановка $j_1, j_2, \ldots$ $\ldots, j_{sk}$ определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем. Из леммы 1 и определения условной вероятности $B^{j_1, j_2, \ldots, j_{sk}} (x_1, \ldots, x_{sk})$ в силу дисциплины обслуживания требований в порядке поступления следует, что вероятность $q_{\text{c}}^{j_1, j_2, \ldots, j_{sk}} (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ не зависит от порядка отказов элементов $j_2, \ldots, j_{sk}$, отказавших вслед за элементом j_1 из первых k сложных систем комплекса, а $J_N (j_1, j_2, \ldots, j_{sk}) = J_N (j_1)$ не зависит от номеров элементов $j_2, \ldots, j_{sk}$. Поэтому во внутренней сумме (33) для каждого элемента j_1 с номером $j = i_1^l$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ будет ровно $\dfrac{(sk-1)!}{(s-1)!(s!)^{k-1}}$ равных слагаемых, каждое из которых при $N \to \infty$ ввиду леммы 9 эквивалентно

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx T_{\lambda(0)}.$$

Отсюда при $N \to \infty$ получаем

$$\sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_{sk})} q_{\text{c}}^{j_1, j_2, \ldots, j_{sk}} (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) \sim$$

$$\sim \frac{(sk-1)!}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} \frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx T_{\lambda(0)}. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует, что при $N \to \infty$

$$q_{\text{c}}^{1,2,\ldots,k} \sim \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi \in \Pi_0^k}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx T_{\lambda(0)}.$$

Лемма 10 доказана.

Обозначим $Q_{lk} = P(S_{lk})$ вероятность того, что на периоде регенерации в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ откажут не менее l элементов из первых k систем (период занятости не закончится к моменту отказа l-го порядка элемента из первых k систем на этом периоде регенерации). Поскольку суммарная остаточная длина дообслуживания всех требований в РО не зависит от дисциплины обслуживания в классе консервативных дисциплин [3], эта вероятность не зависит от дисциплины обслуживания в классе D_k консервативных дисциплин обслуживания. Введем следующие обозначения: K — случайное событие, состоящее в том, что первым на периоде регенерации откажет элемент из первых k систем; $Q_1 = P(S_{lk}|K)$ — условная вероятность того, что на периоде регенерации откажут не менее l элементов из первых k систем при условии, что первым на периоде регенерации отказал элемент одной из первых k систем; $Q_2 = P(S_{lk}|\overline{K})$ — условная вероятность того, что на периоде регенерации откажут не менее l элементов из первых k систем при условии, что первым на периоде регенерации отказал элемент из системы, отличной от первых k систем; ς_l — длина периода занятости РО комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ при условии, что в момент начала этого периода занятости в РО находились ровно l требований с полным временем обслуживания.

Лемма 11. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{l-1} < \infty$. Тогда в классе консервативных дисциплин обслуживания D_k

$$Q_1 \le \left(\frac{\lambda k\,(l-1)}{N}\right)^{l-1} \frac{E\,[(\varsigma_1)^{l-1}]}{(l-1)!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в моменты времени $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_l$ последовательно отказали на периоде регенерации l элементов из первых k систем и в момент τ_1 начался период занятости РО. Поскольку просеивание с вероятностью k/N пуассоновского потока с параметром λ приводит к пуассоновскому потоку с параметром $\lambda_\Delta = \lambda k / N$, время между соседними отказами элементов из первых k систем имеет показательное распределение с параметром λ_Δ и $\tau_l - \tau_1$ представляет сумму $(l-1)$ независимых случайных величин с таким же распределением.

Пусть элементы систем, отличных от первых k систем, имеют абсолютный приоритет в обслуживании перед элементами первых k систем, а сами обслуживаются в порядке поступления. Тогда с каждым отказавшим элементом из первых k систем можно связать случайный отрезок времени от момента начала обслуживания этого элемента до момента окончания его обслуживания. Длины этих отрезков являются независимыми случайными величинами и распределены так же, как и длина периода занятости в

РО комплекса $N^0_{1,\lambda(1-kN^{-1}),G}$, которую обозначим ς_1^-. Пусть $\{\gamma_i\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных как ς_1^- случайных величин и пусть $\varsigma_{l-1}^- = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_{l-1}$. Тогда

$$Q_1 = P(S_{lk} | K) \le P(\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_{l-1} > \tau_l - \tau_1) =$$

$$= \int_{t>0} \frac{\lambda_\Delta (\lambda_\Delta t)^{l-2}}{(l-2)!} \exp(-\lambda_\Delta t) P(\varsigma_{l-1}^- > t)\, dt \le \int_{t>0} \frac{\lambda_\Delta (\lambda_\Delta t)^{l-2}}{(l-2)!} P(\varsigma_{l-1}^- > t)\, dt =$$

$$= \frac{[\lambda_\Delta (l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\zeta_1^-)^{l-1}] = \frac{[\lambda_\Delta (l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\varsigma_1^-)^{l-1}] \le \left[\frac{\lambda k (l-1)}{N}\right]^{l-1} \frac{E[(\varsigma_1)^{l-1}]}{(l-1)!}.$$

Здесь использованы неравенства $\exp(-\lambda_\Delta t) < 1$ и $\varsigma_1^-(\omega) \le \varsigma_1(\omega)$, последнее из которых есть прямое следствие леммы 1 [4], т. е. от увеличения интенсивности входящего потока требований период занятости РО обслуживанием требований со скоростью единица не уменьшится. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_l < \infty$. Тогда в классе консервативных дисциплин обслуживания D_k

$$Q_2 \le \left(\frac{\lambda k l}{N}\right)^l \frac{E[(\varsigma_1)^l]}{l!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в момент времени τ_0 начался период занятости РО и в моменты времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l$ $(\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_l)$ последовательно отказали l элементов из первых k систем. Время между соседними отказами элементов из первых k систем имеет показательное распределение с параметром λ_Δ и разность $\tau_l - \tau_0$ равна сумме l независимых случайных величин с тем же распределением у каждой из них.

Пусть элементы систем, отличных от первых k систем, кроме открывшего период занятости первого элемента, имеют абсолютный приоритет в обслуживании перед элементом, открывшим период занятости, и элементами из первых k систем, которые обслуживаются в порядке поступления. Тогда с элементом, открывшим период занятости, и с каждым отказавшим элементом из первых k можно связать случайный отрезок времени от момента начала его обслуживания до момента окончания обслуживания соответствующего элемента. Длины этих отрезков независимы и одинаково распределены, так же как и длина периода занятости в РО комплекса $N^0_{1,\lambda(1-kN^{-1}),G}$, обозначаемая ς_1^-. Как и прежде, $\{\gamma_i\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных как ς_1^- случайных величин и $\varsigma_{l-1}^- = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_l$. Тогда

$$Q_2 = P(S_{lk} | \overline{K}) \le P(\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_l > \tau_l - \tau_0) =$$

$$= \int\limits_{t>0} \frac{\lambda_\Delta (\lambda_\Delta t)^{l-1}}{(l-1)!} \exp(-\lambda_\Delta t)\, P(\varsigma_l^- > t)\, dt \le \int\limits_{t>0} \frac{\lambda_\Delta (\lambda_\Delta t)^{l-1}}{(l-1)!} P(\varsigma_l^- > t)\, dt =$$

$$= \frac{(\lambda_\Delta)^l E[(\zeta_1^-)^l]}{l!} = \frac{[\lambda_\Delta l]^l}{l!} E[(\varsigma_1^-)^l] \le \left[\frac{\lambda k l}{N}\right]^l \frac{E[(\varsigma_1)^l]}{l!}.$$

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_l < \infty$. Тогда в классе консервативных дисциплин обслуживания D_k имеет место неравенство

$$Q_{lk} \le N^{-l} \left\{ k \frac{[\lambda k (l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\varsigma_1)^{l-1}] + \frac{(N-k)}{N} \frac{(\lambda k l)^l}{l!} E[(\varsigma_1)^l] \right\}.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности

$$Q_{lk} = P(S_{lk}) = P(K)\, P(S_{lk} | K) = P(\overline{K})\, P(S_{lk} | \overline{K}). \tag{35}$$

В силу однотипности сложных систем комплекса вероятность того, что период занятости РО начнется отказом элемента из первых k систем определяется величиной

$$P(K) = \frac{k}{N}. \tag{36}$$

Отсюда вероятность противоположного события определяется величиной

$$P(\overline{K}) = 1 - \frac{k}{N}. \tag{37}$$

Из (35) — (37) и лемм 11, 12 получаем

$$Q_{lk} = \frac{k}{N} Q_1 + \left(1 - \frac{k}{N}\right) Q_2 \le N^{-l} \left\{ k \frac{[\lambda k (l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\varsigma_1)^{l-1}] + \right.$$

$$\left. + \frac{(N-k)}{N} \frac{(\lambda k l)^l}{l!} E[(\varsigma_1)^l] \right\}.$$

Лемма 13 доказана.

Обозначим $q_{\text{нс}}^{1,2,\dots,k}$ вероятность того, что на периоде регенерации первый отказ комплекса произойдет в результате отказа первых k сложных систем на пути, который не является 1, 2, ..., k-слабомонотонным минимальным. Множество таких путей обозначим $\Pi_{\text{нс}}^{1,2,\dots,k}$.

Лемма 14. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk+1} < \infty$. Тогда

$$q_{\text{нс}}^{1,2,\dots,k} \le N^{-l} \left\{ k \frac{[\lambda k (l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\varsigma_1)^{l-1}] + \frac{(N-k)}{N} \frac{(\lambda k l)^l}{l!} E[(\varsigma_1)^l] \right\},$$

где $l = sk + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если первый отказ комплекса на периоде регенерации произошел на пути из множества путей $\Pi_{\text{нс}}^{1,2,\ldots,k}$, то на этом периоде регенерации из первых k сложных систем отказали не менее, чем $sk+1$элементов. Отсюда следует, что $q_{\text{нс}}^{1,2,\ldots,k} \le Q_{sk+1}$. Из этого неравенства и леммы 13 в силу транзитивности отношения порядка следует утверждение леммы 14.

Введем следующие обозначения:

$q_{\text{с}}^{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ — вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произошел по l_1, l_2, l_k-слабомонотонному минимальному пути, множество которых обозначим $\Pi_{\text{с}}^{l_1,l_2,\ldots,l_k}$;

$q_{\text{нс}}^{l_1,l_2,\ldots,l_k}$— вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произошел в результате отказа l_1, l_2, l_k-й сложных систем на пути, который не является l_1, ..., l_k-слабомонотонным l_k минимальным; множество таких путей обозначим $\Pi_{\text{нс}}^{l_1,l_2,\ldots,l_k}$;

$q_{\text{с}}$— вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произойдет по слабомонотонному минимальному пути из множества $\Pi_{\text{с}}(k)$; $q_{\text{нс}}$ — вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произойдет по пути, который не является слабомонотонным минимальным, из множества $\Pi_{\text{нс}}(k)$; q — вероятность отказа комплекса на одном периоде регенерации.

Лемма 15. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$, $q \sim CN^{-sk+1}$ где

$$C=\frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}}\sum_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \cdots\cdots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)\sum_{l=1}^{k}\int\limits_{u>0}dH(u)\int\limits_{x>u}(x-u)^{sk-2}P\{v_0(i_1^l)>x\}\,dxT_{\lambda(0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отказ комплекса на периоде регенерации может произойти либо по пути из множества $\Pi_{\text{с}}(k)$, либо по пути из множества $\Pi_{\text{нс}}(k)$. Отсюда следует

$$q=q_{\text{с}}+q_{\text{нс}}. \tag{38}$$

Из определения комплекса N следует, что его вероятностные характеристики не зависят от номеров сложных систем комплекса, если дисциплина обслуживания отказавших элементов не зависит от номеров тех сложных систем, где они отказали. Отсюда следует, что

$$q_{\text{с}}^{l_1,l_2,\ldots,l_k}=q_{\text{с}}^{1,2,\ldots,k}, \tag{39}$$

$$q_{\text{нс}}^{l_1,l_2,\ldots,l_k}=q_{\text{нс}}^{1,2,\ldots,k}. \tag{40}$$

Поэтому

$$q_{\text{с}} = Nq_{\text{с}}^{1,2,\ldots,k}, \tag{41}$$

$$q_{\text{нс}} = Nq_{\text{нс}}^{1,2,\ldots,k}. \tag{42}$$

Из равенств (39), (41) и леммы 10 следует, что при $N \to \infty$

$$q_{\text{с}} \sim CN^{-sk+1}, \tag{43}$$

где

$$C = \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx T_{\lambda(0)}.$$

Из равенств (40), (42) и леммы 14 следует, что при $N \to \infty$

$$q_{\text{нс}} \sim O(N^{-sk}). \tag{44}$$

Из (38), (43) и (44) непосредственно следует утверждение леммы 15. Лемма 15 доказана.

Теорема. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk+1} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$, $P(\Lambda\tau > x) \to \exp(-x)$, где

$$\Lambda = \frac{(sk-1)N^{-sk+1}}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx.$$

Доказательство. Из условий леммы 15 и из теоремы 5 из работы [4] следует, что при $N \to \infty$

$$r^{(1)} \sim r_0^{(1)} = T_{\lambda(0)},\ r^{(2)} \sim r_0^{(2)}. \tag{45}$$

Из леммы 15 при $N \to \infty$ вытекает

$$q \sim CN^{-sk+1}, \tag{46}$$

где

$$C = \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx T_{\lambda(0)}.$$

Согласно теореме 2 из работы [5] при $\alpha_0 = \dfrac{r^{(2)}}{[r^{(1)}]^2} q \to 0$

$$P\left\{\frac{q\tau}{r^{(1)}} > x\right\} \to \exp(-x).$$

Отсюда и из (45) и (46) следует, что при $N \to \infty$ $P(\Lambda\tau > x) \to \exp(-x)$, где

$$\Lambda = \frac{(sk-1)\, N^{-sk+1}}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx.$$

Теорема доказана.

Результаты этой теоремы можно использовать на практике, опираясь на функцию распределения стационарного времени ожидания обслуживания $w^{(0)}$ в РО комплекса $N_{\lambda(0),G_0}$, которая в случае показательного распределения с одним и тем параметром длин требований выглядит весьма просто. Если длина требования имеет отличный от экспоненциального закон распределения, то получение для функции распределения времени ожидания начала обслуживания в явном виде представляет весьма сложную математическую проблему (необходимо решить функциональное уравнение в области изображений по Лапласу, а затем выполнить обратное преобразование). В этом случае можно пользоваться эмпирическими функциями распределения длин требований различных видов и эмпирической функцией распределения случайного времени ожидания начала обслуживания требования, не углубляясь в сложную связь между ними.

Asymptotic time distribution of failure-free work of complexes is found from the serviceability moment for all elements of all complex systems. It obtains for the sets of complicate reducible systems, which are linked into a complex, and have a float time, a Markov's flow of element faults. Individual function of elements service time distribution are intrinsic for these systems too. At that the elements number increase inversely proportional of their fault intension so that a summary load on a service system is bounded above by a value less than one. Demands service discipline is by way of their appearance.

1. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М. : Наука, 1967. — 244 с.
2. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М.: Сов. радио, 1967. — 299 с.
3. *Козлов В. В., Соловьев А. Д.* Оптимальное обслуживание восстанавливаемых систем. 1// Техническая кибернетика. — 1978, № 3.
4. *Макаричев А. В.* Асимптотические оценки периода регенерации комплексов сложных восстанавливаемых систем при различных дисциплинах обслуживания. — Электрон. моделирование. — 2003. — **25**, № 2. — С. 83—97.
5. *Соловьев А. Д.* Оценка надежности восстанавливаемых систем. — М. : Знание, 1987.

Поступила 23.06.06

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского государственного автомобильно-дорожного технического университета. В 1981 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — теория вероятностей и математическая статистика и их применение, теория массового обслуживания, математическая теория надежности, теория оптимизации характеристик случайных процессов, расширяющиеся комплексы сложных восстанавливаемых систем.