ТОЧНОСТЬ,
НАДЕЖНОСТЬ, ДИАГНОСТИКА

УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел.: (057) 7073737, e-mail: hm@khadi.kharkov.ua)

Надежность циклических соединений в комплекс сложных восстанавливаемых систем с временным резервом. I

(Статью представил д-р техн. наук В.Г. Тоценко)

Для множеств сложных восстанавливаемых систем, циклически соединенных в комплекс с временным резервом, марковским потоком отказов элементов и индивидуальной функцией распределения времени обслуживания элементов, число которых возрастает обратно пропорционально интенсивности отказов этих элементов так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания ограничена сверху величиной меньше единицы, с дисциплиной обслуживания требований в порядке их возникновения, найдено асимптотическое распределение времени безотказной работы комплексов с момента исправности всех элементов всех сложных систем.

Для множин складних відновлювальних систем, циклічно з'єднаних у комплекс з резервом часу, марківським потоком відмов елементів та індивідуальною функцією розподілу часу обслуговування елементів, число яких зростає зворотньо пропорційно інтенсивності відмов цих елементів так, що сумарне навантаження на систему обслуговування обмежене зверху величиною, яка є меншою за одиницю, з дисципліною обслуговування вимог у порядку їхнього виникнення, знайдено асимптотичний розподіл часу безвідмовної роботи комплексів з моменту справності усіх елементів усіх складних систем.

Ключевые слова: комплексы сложных восстанавливаемых систем с временным резервом.

Рассмотрим комплекс N, в котором работают N однотипных сложных восстанавливаемых систем, состоящих из n элементов. Каждый элемент с течением времени может отказать. В момент его отказа в одной из сложных систем возникает требование на обслуживание, которое немедленно поступает в ремонтный орган (РО), представляющий собой пару $P=(C,d)$, где C — структура; d — дисциплина обслуживания. Ремонтный орган осуществляет восстановление (ремонт или замену на новый, идентичный исходному). Восстановленный элемент занимает свое место в сложной системе, в которой произошел отказ, а требование на обслуживание немедленно покидает РО.

Процесс обслуживания неисправных элементов комплекса N в момент времени t и для j-й сложной системы опишем соответственно формулами $x(t)=(x^1(t),x^2(t),...,x^N(t))$ и $x^j(t)=(x_1^j(t),...,x_n^j(t))$, где $x_i^{j-}(t)+x_i^{j+}(t)=x_i^j$ — длина требования, т. е. время его обслуживания со скоростью, равной единице; $x_i^{j-}(t)$ — выработаная длина требования; $x_i^{j+}(t)$ — остаточная длина требования на обслуживание i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,N$; $x_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы исправен, $x_i^j(t)=(x_i^{j-}(t),x_i^{j+}(t))$, если этот элемент неисправен.

Состояние комплекса в момент времени t определяется совокупностью $v(t)=(e^1(t),e^2(t),...,e^N(t))$ из N двоичных векторов, каждый из которых определяет состояние соответствующей сложной системы комплекса $e^j(t)=$ $=(e_1^j(t),e_2^j(t),...,e_n^j(t))$, $j=1,2,...,N$. Здесь $e_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы комплекса находится в исправном состоянии, и $e_i^j(t)=1$, если в момент времени t он находится в неисправном состоянии, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,N$.

Предположим, что поток отказов элементов, возникающий в каждой сложной системе, является марковским, т. е. удовлетворяет двум условиям.

1. Если в произвольный момент времени t j-я сложная система находится в состоянии e^j, то вероятность отказа на промежутке времени $(t,t+h]$ исправного i-го элемента j-й сложной системы комплекса при $h\to 0$ составляет $\lambda_i(e^j)N^{-1}h+o(h)$.

2. В каком бы из состояний $e^j(t)$ ни находилась j-я сложная система комплекса в произвольный момент времени t, вероятность отказа двух и более элементов этой системы на промежутке времени $(t,t+h]$ равна $o(h)$ при $h\to 0$.

Если состояния двух различных k-й и l-й сложных систем совпадают, т. е. $e^k=e^l$, то интенсивности отказов соответствующих элементов в этих системах одинаковы: для любого i для всех $1\le k<l\le N$ $\lambda_i(e^k)\,N^{-1}=\lambda_i(e^l)\,N^{-1}$.

Пусть $\lambda N^{-1}=\max\limits_{e^j}\lambda(e^j)\,N^{-1}$, где $\lambda(e^j)\,N^{-1}$ — суммарная интенсивность (интенсивность отказа хотя бы одного из исправных элементов j-й сложной системы комплекса, находящейся в состоянии e^j),

$$\lambda(e^j)\,N^{-1}=\sum_{i:e_i^j=0}\lambda_i(e^j)\,N^{-1},\ \ j=1,2,...,N.$$

Длины требований (различных элементов или различных отказов одного и того же элемента) есть независимые положительные случайные величины.

Введем следующие обозначения:

$G_i(x)$ — функция распределения длины требования по обслуживанию i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,N$;

$m_n^{(i)} = \int\limits_{x>0} x^n dG_i(x)$ — ее n-й момент;

$G_0(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(0)}{\lambda(0)} G_i(x)$ — функция распределения длины первого возникшего в j-й сложной системе требования на периоде регенерации;

$m_n^{(0)} = \int\limits_{x>0} x^n dG_0(x)$ — ее n-й момент;

$\rho_0 = \lambda(0) m_1^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(0)\, m_1^0$ — начальная нагрузка на РО требований на обслуживание элементов сложных систем комплекса N;

$G(x) = \min\limits_{i=1,\ ...,\ n} G_i(x)$ — функция распределения максимума из всех длин требований из j-й сложной системы;

$m_n = \int\limits_{x>0} x^n dG(x)$ и $\rho = \lambda m_1$ — его n-й момент, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N$.

Отказы элементов некоторой сложной системы на периоде регенерации комплекса могут привести всю сложную систему к отказу. Множество $E^j = \{e^j\}$ возможных состояний j-й сложной системы делится на два непустые непересекающиеся подмножества исправных E_+^j и неисправных E_-^j состояний j-й сложной системы комплекса, $j=1,2,...,N$. Предполагаем также, что $E_+^1 = E_+^2 = ... = E_+^N$.

Пусть $\left\| e^j \right\| = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^j$ — число неисправных элементов в j-й сложной системе и $\min\limits_{e^j \in E_-^j} \left\| e^j \right\| = s,\ j=1,2,...,N$. Если число неисправных элементов в комплексе не превосходит $s-1$, то эта система исправна. Отказ комплекса наступает, если в течение случайного времени ξ в комплексе окажутся неисправными k сложных систем с номерами $\mathrm{mod}_N\,(l+1), ..., \mathrm{mod}_N\,(l+k)$, $0 \le l \le N-1$. Это связано в наличием в комплексе временного резерва. Предполагаем, что $sk > 1$. Множество $E\{v\}$ возможных состояний комплекса состоит из двух непустых непересекающихся подмножеств исправных E_+ и возможных неисправных E_- состояний комплекса: $v(t) \in E_+$, если в момент времени t все сложные системы исправны, и $v(t) \in E_-$, если хотя бы одна сложная система комплекса неисправна. Пусть $H(u) = P(\xi \le u)$. Отказавшие элементы обслуживаются в РО в порядке поступления (согласно дисциплине d_1 из класса консервативных дисциплин).

Пусть $\tau = \inf\{t: v(x) \in E_-, x \in [t, t+\xi] \| v(0) = (0, ..., 0) = 0\} + \xi$ — время до первого отказа комплекса при условии, что в момент времени $t = 0$ все элементы всех сложных систем комплекса исправны (индекс N для упрощения записи здесь и в дальнейшем опускаем).

Проведем асимптотический анализ величины τ, когда время безотказной работы элементов в сложных системах и число сложных систем возрастают так, что суммарная нагрузка на РО, вообще говоря, не является малой, но ограничена величиной меньше единицы.

Последовательность проходимых случайным процессом $v(t)$ состояний комплекса от начала периода регенерации до момента его первого отказа на этом периоде образует путь $\pi = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$, $v_l \in E_+$ при $l < r$ и $v_r \in E_-$.

Путь π назовем $l_1, l_2, ..., l_k$ слабомонотонным минимальным, если первый отказ комплекса на периоде регенерации наступил в результате отказа $l_1, l_2, ...$ ..., l_k сложных систем, в момент отказа в каждой из этих k сложных систем были неисправны ровно s элементов и больше отказов элементов до этого момента в этих сложных системах не было ($l_r = \mathrm{mod}_N (l + r)$, $r = 1, ..., k$, $0 \le l \le N - 1$). Множество таких путей обозначим $\Pi_c^{l_1, l_2, ..., l_k}$.

Путь π назовем k слабомонотонным минимальным, если для некоторых l_1, l_2, ..., l_k этот путь является l_1, l_2, ..., l_k слабомонотонным минимальным. Класс k слабомонотонных минимальных путей обозначим $\Pi_c(k)$.

Пусть π — 1, 2, ..., k слабомонотонный минимальный путь. Рассмотрим, как изменяется состояние i-й сложной системы на этом пути, $i = 1, 2, ..., k$.

Пусть $0, e_1^i, e_2^i, ..., e_s^i$ — последовательность состояний i-й системы до момента ее отказа. Эта последовательность образует монотонный минимальный путь π_i, по которому i-я сложная система из состояния $\{0\}$ приходит к отказу и

$$\lambda(\pi_i) = \lambda_{i_1}(0) \lambda_{i_2}(e_1^i) ... \lambda_{i_s}(e_{s-1}^i) > 0, \quad i = 1, ..., k,$$

где $i_1, i_2, ..., i_s$ — номера последовательно отказавших элементов i-й сложной системы на пути π_i. Множество монотонных минимальных путей, на которых i-я сложная система может отказать обозначим Π_0^i.

Пусть $B^{j_1, j_2, ..., j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}, \xi) = P\{\varsigma > x_1, v^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi\}$ — условная вероятность того, что период регенерации не закончится к моменту x_1 и отказавший в момент x_1 элемент j_1 не будет восстановлен до момента времени $x_{sk} - x_1 + \xi$ при условии, что этот период регенерации начался в момент $x = 0$ и в моменты $x_1, x_2, ..., x_{sk}$ $(0 < x_1 < x_2 < ... < x_{sk})$ последовательно отказали элементы $j_1, j_2, ..., j_{sk}$ из первых k сложных систем и больше отказов элементов из первых k сложных систем на отрезке времени $[0, x_{sk}]$ не было. Здесь $v^{j_1}(x_1)$ — время пребывания в РО элемента j_1, отказавшего в момент времени x_1 от начала периода регенерации, при дисциплине обслуживания со скоростью единица требований в порядке поступления. Эта вероятность не зависит от номеров элементов, отказавших после момента времени x_1.

Обозначим $q_c^{j_1,\, j_2,\, ...,\, j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k)$ вероятность отказа комплекса на периоде регенерации по таким 1, 2, ..., k слабомонотонным минимальным путям, что отказ i-й сложной системы произойдет на монотонном минимальном пути π_i $(i = 1, 2, ..., k)$, а перестановка $j_1, j_2, ..., j_{sk}$ определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем. Пусть e' получается из вектора e выделением первых k компонент, т.е. e' определяет состояние первых k сложных систем. Набор $j_1, j_2, ..., j_{sk}$ определяет последовательность состояний $0', e'_1, e'_2, ..., e'_{sk}$, которые проходит подкомплекс из первых k сложных систем до отказа всего комплекса на 1, 2, ..., k слабомонотонном минимальном пути. Пусть

$$\lambda(e')N^{-1} = \sum_{r=1}^{k} \lambda(e^r)N^{-1}$$

есть суммарная интенсивность отказов элементов из первых k сложных систем, находящихся в состоянии e'. Обозначим $\Delta = \{(x_1, x_2, ..., x_{sk}) : 0 < x_1 < < x_2 < ... < x_{sk}\}$ и положим

$$J_N(j_1, ..., j_{sk}) = E \int_{\Delta} ... \int \exp(-aN^{-1})\, B^{j_1,\, j_2,\, ...,\, j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk},$$

где $a = \lambda(0')x_1 + \lambda(e'_1)(x_2 - x_1) + ... + \lambda(e'_{sk-1})(x_{sk} - x_{sk-1})$.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$q_c^{j_1,\, j_2,\, ...,\, j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(j_1, ..., j_{sk}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно введенным обозначениям по формуле полной вероятности ...

$$q_-^{j_1,\, ...,\, j_{sk}}(\pi_1, ..., \pi_k) = E \int_{\Delta} ... \int \lambda_{j_1}(0')N^{-1} \exp[-\lambda(0')\, N^{-1} x_1] \times$$

$$\times \lambda_{j_2}(e'_1)\, N^{-1} \exp[-\lambda(e'_1)\, N^{-1}(x_2 - x_1)] ...$$

$$... \lambda_{j_{sk}}(e'_{sk-1}) N^{-1} \exp[-\lambda(e'_{sk-1})\, N^{-1}(x_{sk} - x_{sk-1})] \times$$

$$\times B^{j_1,\, ...,\, j_{sk}}(x_1, ..., x_{sk}, \xi)\, dx_1 dx_2, ..., dx_{sk} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(j_1, ..., j_{sk}),$$

что и требовалось доказать. Лемма 1 доказана.

Пусть $B_\lambda(x_1,x_{sk})=P\{\varsigma_\lambda>x_1,v_\lambda(x_1)>x_{sk}-x_1\}$ — условная вероятность того, что в комплексе $N^0_{1,\lambda,G}$ (на свободном периоде параметр входящего пуассоновского потока требований равен $\lambda(0)$, а на периоде занятости — λ; функция распределения длины требования $G(x)$ [1]) период регенерации не закончится до момента времени x_1 и требование, возникшее в момент времени x_1 не завершит свое обслуживание в РО к моменту времени $x_{sk}-x_1$ при условии, если этот период регенерации начался в момент времени $x=0$ и в момент времени x_1 возникло требование в РО комплекса ($v(x_1)$ — время пребывания в РО возникшего требования в момент времени x_1 от начала периода регенерации).

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$B^{j_1,j_2,\dots,j_{sk}}(x_1,x_2,\dots,x_{sk},\xi)\le B^{j_1,j_2,\dots,j_{sk}}(x_1,x_2,\dots,x_{sk})\le B_\lambda(x_1,x_{sk}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, существует импликация

$$\{\varsigma>x_1,v^{j_1}(x_1)>x_{sk}-x_1+\xi\}\subset\{\varsigma>x_1,v^{j_1}(x_1)>x_{sk}-x_1\},$$

из которой следует первое из двух неравенств в утверждении леммы в силу положительности случайной величины ξ.

Пусть $\lambda_-=\lambda(1-kN^{-1})$ и $\varsigma_{\lambda_-}(\omega)$ — длина периода регенерации в комплексе $N^0_{1,\lambda_-,G}$; $s_{\lambda_-}[x_1](\omega)$ — суммарная остаточная длина дообслуживания всех требований в РО комплекса $N^0_{1,\lambda_-,G}$ в момент времени x_1. Тогда из теоремы 1 [1] и следствия 1 [1] получаем импликации

$$\{\varsigma(\omega)>x_1,s^{j_1}[x_1,d_1](\omega)>x_{sk}-x_1\}\subset\{\varsigma_{\lambda_-}(\omega)>x_1,s_{\lambda_-}[x_1](\omega)>x_{sk}-x_1\}\subset$$
$$\subset\{\varsigma_\lambda(\omega)>x_1,s_\lambda[x_1](\omega)>x_{sk}-x_1\}. \quad (1)$$

При дисциплине d_1 справедливы равенства

$$s^{j_1}[x_1,d_1]=v^{j_1}(x_1),\ s_\lambda[x_1]=v_\lambda(x_1). \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$P\{\varsigma>x_1,v^{j_1}(x_1)>x_{sk}-x_1\}\le P\{\varsigma_\lambda>x_1,v_\lambda(x_1)>x_{sk}-x_1\}.$$

Отсюда согласно принятым обозначениям запишем

$$B^{j_1,j_2,\dots,j_{sk}}(x_1,x_2,\dots,x_{sk})\le B_\lambda(x_1,x_{sk}).$$

Из первого и последнего в этом доказательстве предложений в силу транзитивности отношения порядка действительных чисел следует

$$B^{j_1,j_2,\dots,j_{sk}}(x_1,x_2,\dots,x_{sk},\xi)\le B^{j_1,j_2,\dots,j_{sk}}(x_1,x_2,\dots,x_{sk})\le B_\lambda(x_1,x_{sk}).$$

Лемма 2 доказана.

Введем следующие обозначения:

$T_\lambda = \dfrac{1}{\lambda(0)} + \dfrac{m_1}{(1-\rho)}$ — математическое ожидание длины периода регенерации [2] комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$;

v_λ — стационарное время пребывания требования в РО этого комплекса при дисциплине обслуживания d_1.

Лемма 3. Пусть $\rho<1$ и $m_{sk}<\infty$. Тогда

$$\int\limits_{0<x_1<x_2<...<x_{sk}} ... \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 ... dx_{sk} = \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем в рассматриваемом кратном интеграле замену переменных: $t_1 = x_{sk} - x_1$, $t_2 = x_{sk-1} - x_1, ...,$ $t_{sk-1} = x_2 - x_1$, $t = x_1$. После этого искомый интеграл запишем в виде

$$\int\limits_{t_1 > t_2 > ... > t_{sk-1} > 0,} ... \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt dt_1 ... dt_{sk-1} =$$

$$= \int\limits_{t_1 > ... > t_{sk-1} > 0} ... \int dt_1 ... dt_{sk-1} \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt. \tag{3}$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [2, 3] следует, что

$$\int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt = P\{v_\lambda > t_1\} T_\lambda. \tag{4}$$

Согласно (3), (4) и принятым обозначениям искомый интеграл принимает вид

$$\int\limits_{t_1 > t_2 > ... > t_{sk-1}} ... \int P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 ... dt_{sk-1} T_\lambda =$$

$$= \int\limits_{t_1>0} \frac{[t_1]^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 T_\lambda = \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty,$$

так как существует конечный момент $m_{sk} < \infty$ и $\rho < 1$. Лемма 3 доказана.

Обозначим

$$\Delta(z) = \{(x_1, ..., x_{sk}) : 0 < x_1 < ... < x_{sk} < z\} \text{ и}$$

$$|\Delta(z)| = \int\limits_{\Delta(z)} ... \int dx_1 ... dx_{sk} = \frac{z^{sk}}{(sk)!}.$$

Лемма 4. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\left| J_N(j_1, ..., j_{sk}) - E \int\limits_{\Delta} ... \int B^{j_1, j_2, ..., j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}, \xi)\, dx_1 dx_2 ... dx_{sk} \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Согласно лемме 3 для выбранного $\varepsilon > 0$ существует $z = z(\varepsilon)$ такое, что для любого $z > z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta\setminus\Delta(z)} \cdots \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Из неравенства $1-\exp(-aN^{-1}) < 1$ при $a > 0$ и леммы 2 следуют неравенства

$$[1-\exp(-aN^{-1})]\, B^{j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_{sk}}(x_1, x_2, \ldots, x_{sk}, \xi) <$$

$$< B^{j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_{sk}}(x_1, x_2, \ldots, x_{sk}) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}). \tag{6}$$

Из (5), (6) и монотонности интеграла следует неравенство

$$\int_{\Delta\setminus\Delta(z)} \cdots \int [1-\exp(-aN^{-1})]\, B^{j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_{sk}}(x_1, \ldots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

По определению $a \le \lambda x_{sk} < \lambda z$. Для выбранного $z \ge z(\varepsilon)$ существует такое $N = N(z(\varepsilon))$, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$

$$0 \le 1-\exp(-aN^{-1}) < 1-\exp(-\lambda z N^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2\,|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и из неравенства $0 \le B^{j_1 \ldots j_{sk}}(x_1, \ldots, x_{sk}) \le 1$ следует, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\int_{\Delta(z)} \cdots \int [1-\exp(-aN^{-1})]\, B^{j_1,\, \ldots,\, j_{sk}}(x_1, \ldots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что для всех $N > N(z(\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\left(J_N(j_1, \ldots, j_{sk}) - E \int_{\Delta} \cdots \int B^{j_1, \ldots, j_{sk}}(x_1, \ldots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right) < \varepsilon.$$

Лемма 4 доказана.

Пусть $\lambda_- = \lambda\left(1-\dfrac{k}{N}\right)$, $\lambda(0)_- = \lambda(0)\left(1-\dfrac{k}{N}\right)$, $B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) = P\{\varsigma_0^- > x_1,$ $v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi\}$ и $B_0^{j_1}(x_1,\, x_{sk}, \xi) = P\{\varsigma_0 > x_1, v_0^j(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi\}$ — соответственно условные вероятности того, что начавшись в момент времени $x = 0$ период регенерации в комплексах $\mathrm{N}_{\lambda(0)_-, G_0}$ и $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$ не закончится к моменту времени x_1 и возникшее в момент времени x_1 в РО требование, тип которого совпадает с номером элемента j_1, обозначаемого через j, не завершит свое обслуживание в РО до момента времени $x_{sk} + \xi$, если период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в момент времени x_1 в РО возникло требование с номером j элемента

$j_1 (0 < x_1 < x_{sk})$; $v_0^{j-}(x_1)$ и $v_0^{j}(x_1)$ — соответственно времена пребывания требования j-го типа, поступившего в момент времени x_1 в РО комплексов $\mathrm{N}_{\lambda(0)_-, G_0}$ и $\mathrm{N}_{\lambda(0), G_0}$. Обозначим $\Pi_\lambda(t)$ число требований пуассоновского потока с параметром λ, возникших на промежутке времени $(t_1, t]$ в комплексе $\mathrm{N}_{1,\lambda,G}^0$.

Лемма 5. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\left| E \int_\Delta \dots \int B^{j_1, \dots, j_{sk}}(x_1, \dots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \dots dx_{sk} - E \int_\Delta \dots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \dots dx_{sk} \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon > 0$. Из леммы 3 следует, что существует такое положительное число $z = z(\varepsilon)$, что для любого $z > z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta \setminus \Delta(z)} \dots \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 \dots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{9}$$

Из леммы 2 вытекают неравенства

$$B^{j_1, \dots, j_{sk}}(x_1, \dots, x_{sk}, \xi) \le B_\lambda(x_1,\ x_{sk}),\ \ B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) \le B_\lambda(x_1,\ x_{sk}). \tag{10}$$

Из (9), (10) и монотонности интеграла следует, что

$$\begin{gathered} E \int_{\Delta \setminus \Delta(z)} \dots \int B^{j_1, \dots, j_{sk}}(x_1, \dots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \dots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}, \\ E \int_{\Delta \setminus \Delta(z)} \dots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \dots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}. \end{gathered} \tag{11}$$

Из аксиомы непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l = l(\varepsilon)$, что для любого $l \ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_\lambda(z) > l) < \frac{\varepsilon}{6\,|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и неравенства $x_1 < x_{sk} < z$ следует, что

$$P(\Pi_{\lambda_-}(x_1) > l) < P(\Pi_\lambda(x_1) > l) < P(\Pi_\lambda(z) > l) \frac{\varepsilon}{6\,|\Delta(z)|}.$$

Пусть R_l^- — случайное событие, состоящее в том, что первые l требований пуассоновского потока с параметром λ_- все будут из различных систем. Из леммы 2 [1] следует, что для выбранного ε существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, при котором для любого $N \geq N(\varepsilon)$

$$P(R_l^-) > 1 - \frac{\varepsilon}{6\,|\Delta(z)|}.$$

Пусть $A = \{\Pi_{\lambda\_}(x_1) \leq l\}\, R_l^-$ и $I(A)$ — случайное событие A. Тогда

$$B^{j_1,\, j_2,\, \dots,\, j_{sk}}(x_1, x_2, \dots, x_{sk}, \xi) = P\{\varsigma > x_1, v^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi\} =$$

$$= P\{\varsigma\, I(A) > x_1, v^j(x_1)\, I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi\} +$$

$$+ P\{\varsigma I(\overline{A}) > x_1, v^j\,(x_1)\, I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi\}. \tag{12}$$

Аналогично

$$B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) = P\{\varsigma_0^- > x_1, v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi\} =$$

$$= P\{\varsigma_0^-\, I(A) > x_1, v_0^{j-}(x_1)\, I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi\} +$$

$$+ P\{\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi\}. \tag{13}$$

Из леммы 4 [1] следует, что

$$\{\varsigma(\omega,\alpha)\, I(A) > x_1, v^j(x_1)\, I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi\} =$$

$$= \{\varsigma_0^-(\omega,\alpha)\, I(A) > x_1, v_0^{j-}(x_1)\, I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi\}. \tag{14}$$

Поскольку

$$P(\varsigma I(\overline{A}) > x_1, v^j(x_1)\, I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi) \leq P(\overline{A}) \leq (\Pi_\lambda(x_1) > l) + P(\overline{R}_l) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|},$$

$$P(\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi) \leq P(\overline{A}) < \frac{\varepsilon}{3\,|\Delta(z)|}, \tag{15}$$

из (12)—(15) находим

$$\left| B^{j_1 \dots j_{sk}}(x_1, \dots, x_{sk}, \xi) - B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) \right| < \frac{2\varepsilon}{3\,|\Delta(z)|}. \tag{16}$$

Из свойства интеграла и (16) следует

$$\left| E \int_{\Delta(z)} \!\!\dots\! \int B^{j_1,\, \dots,\, j_{sk}}(x_1, \dots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \dots dx_{sk} - E \int_{\Delta(z)} \!\!\dots\! \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \dots dx_{sk} \right| <$$

$$< E \int_{\Delta(z)} \!\!\dots\! \int \left| B^{j_1,\, \dots,\, j_{sk}}(x_1, \dots, x_{sk}, \xi) - B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) \right| dx_1 \dots dx_{sk} <$$

$$< \int_{\Delta(z)} \!\!\dots\! \int \frac{2\varepsilon}{3\,|\Delta(z)|}\, dx_1 \dots dx_{sk} = \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Из (11) и (17) следует, что для любого $N \geq N(\varepsilon)$

$$\left| E\int_{\Delta}\!\ldots\!\int B^{j_1,\ldots,j_{sk}}(x_1,\ldots,x_{sk},\xi)\,dx_1\ldots dx_{sk} - E\int_{\Delta}\!\ldots\!\int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\ldots dx_{sk} \right| \leq$$

$$\leq \left| E\int_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\ldots\!\int B^{j_1,\ldots,j_{sk}}(x_1,\ldots,x_{sk})\,dx_1\ldots dx_{sk} \right| + \left| E\int_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\ldots\!\int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)dx_1\ldots dx_{sk} \right| +$$

$$+\left| E\int_{\Delta(z)}\!\ldots\!\int B^{j_1,\ldots,j_{sk}}(x_1,\ldots,x_{sk},\xi)\,dx_1\ldots dx_{sk} - E\int_{\Delta(z)} B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\ldots dx_{sk} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Лемма 5 доказана.

Asymptotic time distribution of failure-free work of complexes is found from the serviceability moment for all elements of all complex systems. It obtains for the sets of complicate reducible systems, which are linked into a complex, and have a float time, a Markov's flow of element faults. Individual function of elements service time distribution are intrinsic for these systems too. At that the elements number increase inversely proportional of their fault intension so that a summary load on a service system is bounded above by a value less than one. Demands service discipline is by way of their appearance.

1. *Макаричев А. В.* Асимптотические оценки периода регенерации комплексов сложных восстанавливаемых систем при различных дисциплинах обслуживания//Электрон. моделирование. — 2003. — **25**, № 2. — С. 83—97.
2. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М. : Наука, 1967. — 244 с.
3. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М. : Сов. радио, 1967. — 299 с.

Поступила 23.06.06

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского государственного автомобильно-дорожного технического университета. В 1981 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — теория вероятностей и математическая статистика и их применение, теория массового обслуживания, математическая теория надежности, теория оптимизации характеристик случайных процессов, расширяющиеся комплексы сложных восстанавливаемых систем.