
УДК 621.3:538.3

О. Я. Коновалов, В. М. Михайлов, д-р техн. наук
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический ин-т»
(Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,
тел.: (057) 7076052, E-mail: Oleg_ARem@mail.ru)

Определение формы электрода по дискретно заданному граничному распределению поля

Использовано аналитическое решение задачи Коши для уравнения Лапласа в случае таблично заданного распределения напряженности электрического поля на плоской граничной поверхности. Исследована сходимость несобственных интегралов решения и описаны алгоритмы их вычисления, построения линий уровня поля, с помощью которых определен профиль электрода. Определено расхождение заданного и создаваемого распределений поля с помощью решения прямой задачи.

Використано аналітичний розв'язок задачі Коші для рівняння Лапласа у випадку таблично заданого розподілу напруженості електричного поля на плоскій граничній поверхні. Досліджено збіжність невластних інтегралів розв'язку й описано алгоритми їхнього обчислення, побудови ліній рівня поля, за допомогою яких визначено профіль електрода. Визначено розбіжність заданого та створюваного розподілів поля за допомогою розв'язку прямої задачі.

К л ю ч е в ы е с л о в а: профиль электрода, электрическое поле, задача Коши для уравнения Лапласа, эквипотенциальные линии.

В технике сильных электрических и магнитных полей, электронной оптике возникает необходимость определения формы электродов, обеспечивающих заданное распределение поля на граничной поверхности. Один из способов решения этой проблемы состоит в постановке и решении задачи продолжения потенциала или силовой функции поля над границей (граничной поверхностью) — задачи Коши, последующих построения и «металлизации» линий уровня [1—6]. При использовании явных разностных методов решения этой задачи наблюдается возрастание погрешностей в случае удаления от граничной поверхности [1, 2, 4], в то время как аналитические решения обеспечивают достаточно устойчивые числовые данные [5, 6]. В работах [1, 2, 4—6] заданное распределение поля на границе является известной аналитической функцией.

На практике часто бывает необходимо создать некоторое распределение напряженности поля на граничной поверхности, заданное таблично. Представляет интерес исследование возможности использования ранее полученных аналитических решений [5, 6] для таблично заданного распределения поля на плоской граничной поверхности.

Формулировка и решение задачи продолжения поля. Для определенности рассмотрим задачу нахождения профиля металлического электрода, создающего на плоской металлической граничной поверхности таблично заданное распределение нормальной составляющей напряженности электрического поля. Поле над граничной поверхностью полагаем плоским, причем ось x декартовой системы координат лежит на граничной плоскости, а ось y нормальна к ней. Среда имеет постоянные электрофизические характеристики. Задача Коши для уравнения Лапласа в этом случае имеет такой вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0; \quad (1)$$

$$\varphi(x, 0) = U_0; \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = -E_y(x, 0), \quad (3)$$

где φ — потенциал электрического поля; U_0 — потенциал поля на границе $y = 0$; $E_y(x, 0)$ — нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля на границе (заданная функция).

Полагая, что $E_y(x, 0)$ — четная аналитическая функция, решение задачи (1) — (3) представляем в следующем виде [5]:

$$\varphi(x, y) = U_0 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [F(\lambda)/\lambda] \cos(\lambda x) \operatorname{sh}(\lambda y) d\lambda, \quad (4)$$

где $F(\lambda)$ — косинус-преобразование Фурье заданного распределения $E_y(x, 0)$.

Косинус-преобразование Фурье заданного распределения нормальной проекции вектора напряженности поля имеет вид [7]

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} E_y(x, 0) \cos(\lambda x) dx. \quad (5)$$

Пусть формульное выражение граничного распределения неизвестно, а даны только его значения в узловых точках оси x , т. е. нормальная проекция вектора напряженности электрического поля на границе задана

таблично. Полагая и в этом случае функцию $E_y(x, 0)$ аналитической, утверждаем, что в соответствии с теоремой Ковалевской [8] решение задачи (1) — (3) существует и единственно.

Видим, что реализация решения (4) сводится к вычислению несобственных интегралов в формулах (4), (5). При этом необходимо исследовать сходимость этих интегралов и составить алгоритм их вычисления.

Сходимость и алгоритм вычисления несобственных интегралов. Рассмотрим вначале сходимость несобственного интеграла (5). Подынтегральное выражение в нем представляет собой произведение двух функций, причем из соображений физики $E_y(x, 0)$ — ограниченная функция с распределением, локализованным на относительно небольшом участке оси x , вне которого ее значения близки к нулю. Тогда, учитывая, что

$$|\cos(\lambda x)| \leq 1, \quad (6)$$

устанавливаем сходимость несобственного интеграла $\int_0^{\infty} |E_y(x, 0) \cos(\lambda x)| dx$, из которой следует сходимость несобственного интеграла (5) [9].

Пусть в несобственном интеграле решения (4) при $\lambda > 0$ выполняется условие

$$\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda} \right| \leq C_\lambda \exp(-\lambda \alpha), \quad (7)$$

где $\alpha > 0$, $C_\lambda \geq 1$ — некоторые числа. Поскольку $sh(\lambda y) < \exp(\lambda y)$, с учетом (6), (7) получаем

$$\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda} \cos(\lambda x) sh(\lambda y) \right| < C_\lambda \exp[-(\alpha - y)\lambda]. \quad (8)$$

Правая часть неравенства (8) при условии

$$y < \alpha \quad (9)$$

есть интегрируемая на сегменте $\lambda[0, \infty)$ функция. Тогда на основании признака сравнения [9] утверждаем, что при выполнении условий (7) и (9) интеграл в решении (4) равномерно сходится.

Составим алгоритм вычисления несобственных интегралов решения. Полагаем, что массив значений $E_y(x, 0)$ задан в равноотстоящих точках оси x . Особенностью рассматриваемых несобственных интегралов является осциллирование значений подынтегральных функций, обусловленная множителем $\cos(\lambda x)$ (такие свойства преобразований Фурье исследованы в [10]). Частота осцилляций подынтегральной функции в (4) в случае отсутствия или при относительно низкой частоте осцилляций $F(\lambda)$ определяется координатой точки наблюдения поля x (см. пример расчета), а в (5) — текущим значением λ .

В работе [11] рекомендуется составлять алгоритмы, реализующие вычисления при малой частоте осцилляций по классическим квадратурным формулам (например, формулам прямоугольников, трапеций, парабол), а при высокой частоте — по квадратурным формулам для быстро осциллирующих функций (например, на формуле Филона). Такой алгоритм позволяет учесть изменение частоты подынтегральных выражений в широких пределах. Полагая частоту осцилляций изменяющейся в относительно небольшом интервале, вычисляем несобственные интегралы при помощи квадратурной формулы Симпсона [12]. Для исключения погрешностей, обусловленных осцилляциями, вызванными чрезмерно большим шагом интегрирования, необходимо, чтобы произведения $h_\lambda x$, $h_x \lambda$ (где h_λ , h_x — шаги численного интегрирования по параметру преобразования λ и координате x) были значительно меньше соответствующих расстояний между двумя соседними нулями подынтегральных выражений, т. е. $h_\lambda x \ll \pi$, $h_x \lambda \ll \pi$.

Из последних неравенств следуют соотношения для выбора шагов:

$$h_\lambda \ll \frac{\pi}{x}, \quad h_x \ll \frac{\pi}{\lambda}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что шаг интегрирования по λ обратно пропорционален координате, ось которой лежит на граничной поверхности. Конечные значения верхних пределов интегрирования λ_m , x_m подбираем с помощью оценки погрешностей, вносимых исключением участков интегрирования $[\lambda_m, \infty)$, $[x_m, \infty)$.

Сравнение аналитического и разностного решений задачи. При решении задачи разностным методом [1, 2, 4] вблизи граничной поверхности выделяют область, где погрешность решения не превосходит заданной величины (область допустимой погрешности [4]). Явная разностная схема задачи (1) — (3), построенная на основе конечно-разностной аппроксимации уравнения Лапласа на шаблоне «крест» с погрешностью $O(h_x^2 + h_y^2)$, имеет такой вид [13]:

$$\varphi_{i,k+1} = 2 \frac{h_x^2 + h_y^2}{h_x^2} \varphi_{i,k} - \frac{h_y^2}{h_x^2} \varphi_{i-1,k} - \frac{h_y^2}{h_x^2} \varphi_{i+1,k} - \varphi_{i,k-1},$$

$$\varphi_{i,0} = U_0; \quad \varphi_{i,1} = U_0 - h_y E_y|_{i,0},$$

где $\varphi_{i,k}$ — сеточная функция потенциала электрического поля; i и k — дискретные аргументы функции $\varphi_{i,k}$, соответствующие значениям x и y на сетке; h_x и h_y — шаги сетки по координатам x и y .

Оценим влияние параметров разностной схемы на ее устойчивость, а также сравним размеры областей допустимой погрешности в разностном

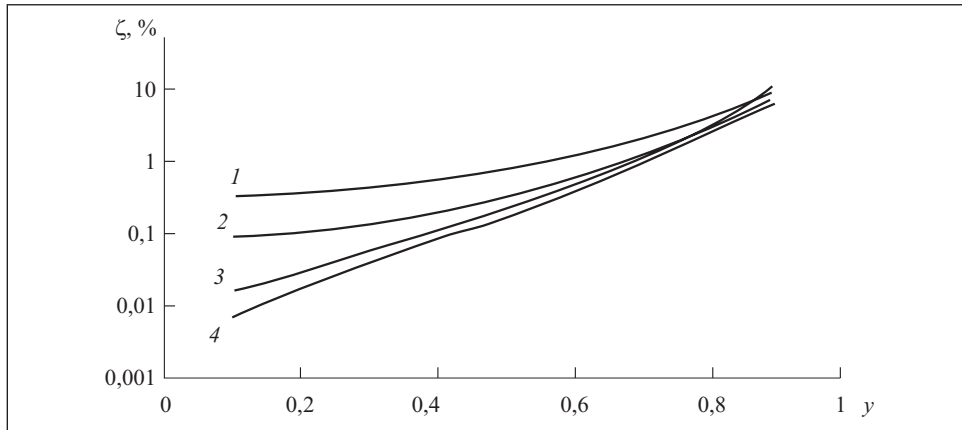


Рис. 1. Кривые относительного расхождения разностного и точного решений при $U_0 = 0$, $a = 1$, $h_x = 0,1$: 1 — $h_y = 0,1$; 2 — $h_y = 0,05$; 3 — $h_y = 0,02$; 4 — $h_y = 0,01$; для оси ζ использован логарифмический масштаб

методе и сходимости решения (4) для заданного «колоколообразного» распределения, при котором

$$E_y(x, 0) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad (11)$$

где a — постоянная. Для распределения (11) интеграл (4) при $x = 0$ известен [14]:

$$\varphi(0, y) = U_0 - \frac{1}{2a} \ln \frac{a+y}{a-y}. \quad (12)$$

Все величины в формулах (11), (12) безразмерные. Относительные расхождения значений ζ в процентах соответствующих значений $\varphi(0, y)$ и $\varphi_{0,k}$, вычисленные по формуле $\zeta = \left| \frac{\varphi(0, y) - \varphi_{0,k}}{\varphi(0, y)} \right| 100\%$, показаны на рис. 1.

Приведенные на рис. 1 кривые подтверждают известный факт возрастания погрешностей расчета с помощью явной разностной схемы при удалении от границы $y = 0$ [1, 2, 4]. Кроме того, наблюдается уменьшение значения ζ при уменьшении отношения h_y/h_x . При существенном удалении от границы ($y = 0,8$) влияние этого отношения на величину ζ ослабевает. Результаты вычислений свидетельствуют о том, что вблизи границы области сходимости несобственного интеграла решения (4) ($y = 1$) погрешности разностного метода при всех рассмотренных соотношениях h_y/h_x существенно возрастают, достигая катастрофических значений. Например, для кривой 4 на рис. 1 при $y = 0,99$ погрешность составляет $\zeta \approx 52\%$.

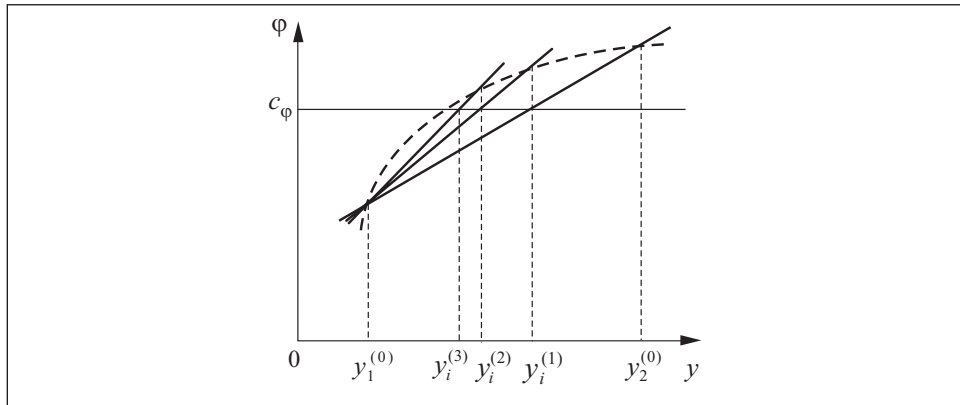


Рис. 2. Схема итерационного процесса нахождения ординат точек $y_i^{(s)}$ эквипотенциальной линии

Следует заметить, что решение (4) позволяет в пределах области сходимости выполнить расчеты с любой заданной точностью. К недостаткам разностного метода можно отнести также необходимость расширения расчетной области вдоль оси x при увеличении координаты y точки наблюдения поля.

Алгоритм построения линий поля и определения формы электродов. Уравнение эквипотенциальной линии представляем в виде

$$\varphi(x, y) = c_\varphi, \quad (13)$$

где c_φ — известная постоянная, равная потенциалу эквипотенциальной линии. Идея алгоритма построения эквипотенциальных линий состоит в следующем. Задаемся последовательно значениями абсцисс x_i точек эквипотенциальной линии и подставляем их в выражение (13) с учетом (4). Для каждого фиксированного значения x_i из (13) получаем уравнение для нахождения неизвестной ординаты y_i рассматриваемой эквипотенциальной линии, которое решаем методом хорд [15].

В итерационном алгоритме предусмотрен блок локализации корней y_i . В этом блоке с помощью (4) находим сегмент $(y_1^{(s)}, y_2^{(s)})$, внутри которого находится значение $y_i^{(s)}$, где s — номер приближения, $s = 0, 1, 2, \dots$. При $s = 0$, используя уравнение прямой, проходящей через точки $(y_1^{(0)}, \varphi(x_i, y_1^{(0)}))$, $(y_2^{(0)}, \varphi(x_i, y_2^{(0)}))$, находим первое приближение корня $y_i^{(1)}$. В зависимости от соотношения $\varphi(x_i, y_i^{(1)})$ и c_φ уточняем границы сегмента с искомым значением корня и находим следующее его приближение. Итерационная формула имеет такой вид:

$$y_i^{(s+1)} = \frac{(y_2^{(s)} - y_1^{(s)})(c_\varphi - \varphi(x_i, y_1^{(s)}))}{\varphi(x_i, y_2^{(s)}) - \varphi(x_i, y_1^{(s)})} + y_1^{(s)}.$$

Итерационный процесс (рис. 2) прекращается при выполнении условия $|y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}| \leq \xi$, где $\xi > 0$ — заданная погрешность.

Строим семейство эквипотенциальных линий, участок одной из которых выбираем в качестве главной части профиля электрода (обращенной к граничной поверхности). Следует заметить, что протяженность эквипотенциальной линии вдоль ox должна быть достаточна для того, чтобы ограничение реальных размеров электрода, выполненного по линии поля, незначительно влияло на распределение $E_y(x, 0)$ под центральной частью профиля. Другие участки профиля достраиваем из конструктивных соображений.

Для проверки правильности определения профиля электрода необходимо найти распределение $E_y(x, 0)$, создаваемое сконструированным электродом на граничной поверхности, и сравнить его с заданным распределением. Для этого вначале находим поверхностную плотность заряда $\sigma(M)$ на электроде и плоской граничной поверхности в результате численного решения интегрального уравнения первого рода [16]

$$\int_l \sigma(M) \ln \frac{1}{r_{MP}} dl_M = \begin{cases} 2\pi\epsilon U_1, & P \in l_1; \\ 2\pi\epsilon U_0, & P \in l_2, \end{cases} \quad (14)$$

где l_1 и l_2 — контуры поперечного сечения электрода и граничной поверхности; l — суммарный контур, $l = l_1 + l_2$; dl_M — элемент суммарного контура с центром в текущей точке M ; U_1 — потенциал электрода; ϵ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды; r_{MP} — расстояние между точкой M и точкой наблюдения поля P .

Интегральное уравнение (14) преобразуем в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на сетке, нанесенной на суммарный контур системы l . Используем квадратурную формулу прямоугольников и стандартную подпрограмму LSARG математической библиотеки FORTRAN IMSL для решения СЛАУ, основанную на вычислении LU -разложения матрицы и итерационном уточнении решения [17]. Определив $\sigma(M)$, напряженность электрического поля на граничной поверхности рассчитываем по формуле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_l \sigma(M) \ln \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}^2} dl_M,$$

где \mathbf{r}_{MP} — вектор, начало которого находится в точке M , а конец — в точке P . Затем определяем относительное расхождение между заданным и полученным распределениями поля и, при необходимости, корректируем форму электрода.

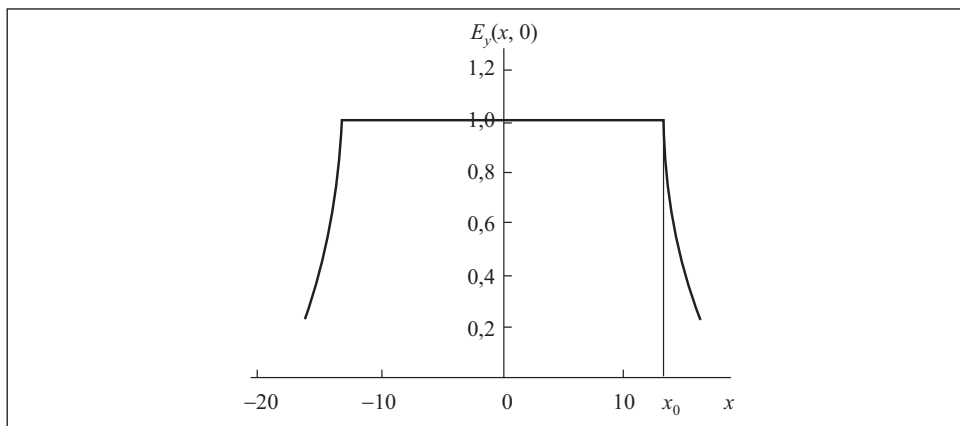


Рис. 3. Функция заданного распределения нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля

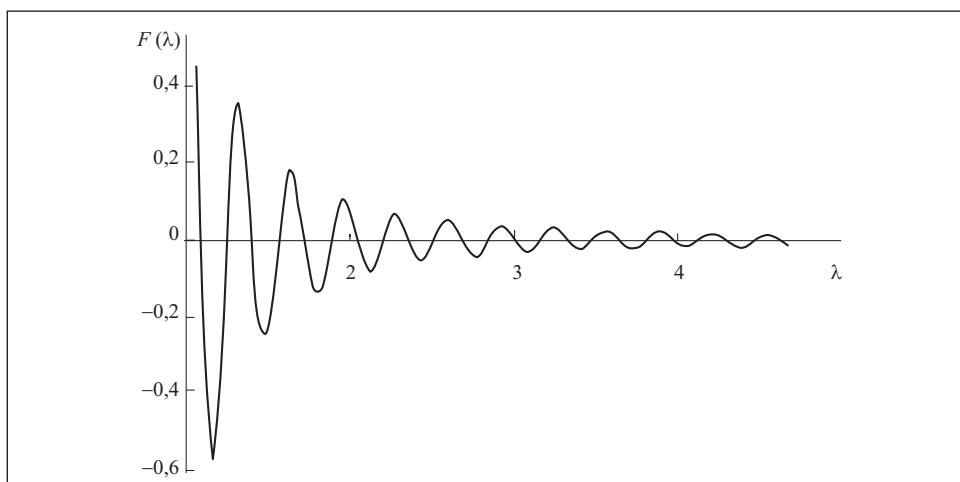


Рис. 4. График функции, полученной в результате применения косинус-преобразования Фурье к заданному распределению поля

Пример расчета. Пусть требуется на плоской металлической граничной поверхности с потенциалом $U_0 = 0$ создать таблично заданное распределение $E_y(x, 0)$ (рис. 3). Это распределение имеет два характерных участка: область однородного поля размером $2x_0$ и область уменьшения поля до значений, близких к нулю при $|x| > x_0$.

На рис. 4 графически изображено рассчитанное по формуле (5) косинус-преобразование Фурье $F(\lambda)$ рассматриваемого распределения. Как видим, $F(\lambda)$ — осциллирующая функция с частотой, приблизительно равной x_0 . Шаг интегрирования h_λ выбран с помощью первого соотношения (10), а в

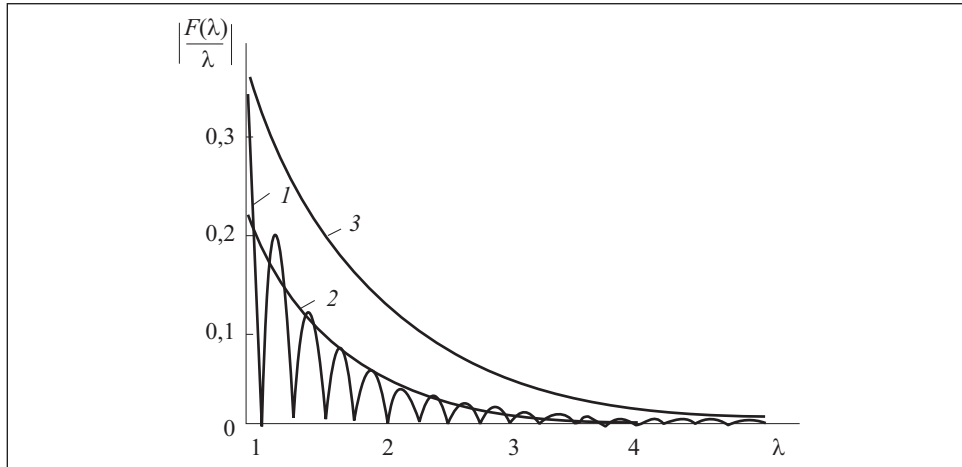


Рис. 5. Графики функций $\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda} \right|$ (кривая 1) и $C_\lambda \exp(-\alpha\lambda)$ (кривые 2, 3): 2 — $\alpha = 1,5$; 3 — $\alpha = 1$

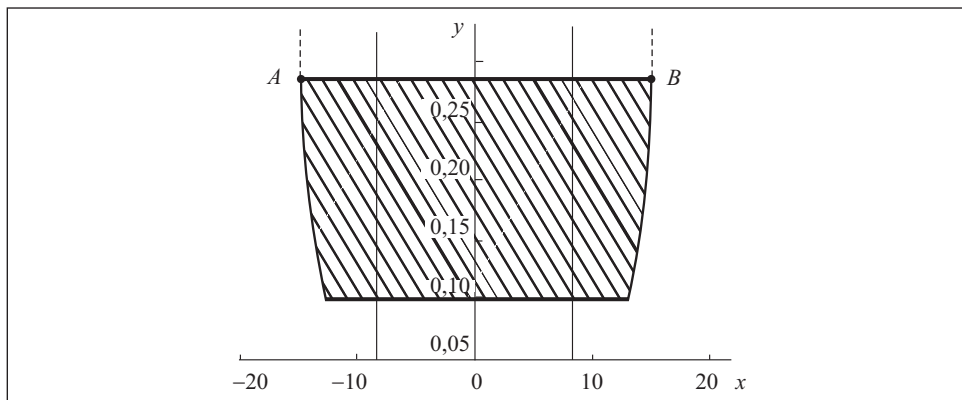


Рис. 6. Профиль электрода, создающего на граничной поверхности таблично заданное распределение $E_y(x, 0)$ (см. рис. 3)

случае $x \ll x_0$ величина x в нем заменена x_0 . Для сравнения на рис. 5 показаны функции $\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda} \right|$ и $C_\lambda \exp(-\lambda\alpha)$. Заметим, что на рис. 4 и 5 части кривых вблизи $\lambda = 0$ не показаны.

Для профиля электрода, создающего заданное распределение поля, выбираем эквипотенциальную линию $\varphi = -0,1$, построенную по описанной выше методике. Точки A и B участка этой линии соединяем прямой, параллельной оси x (рис. 6). Кромки электрода скругляем так, чтобы напряженность поля на них была ограниченной величиной.

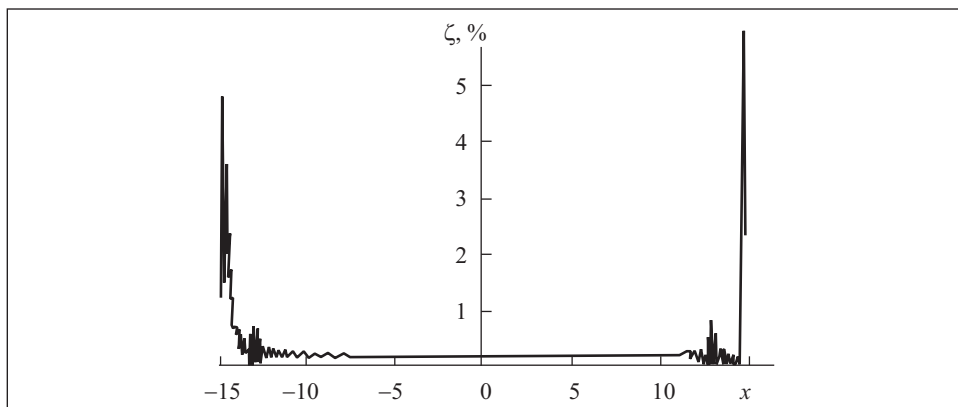


Рис. 7. График относительного расхождения между заданным и полученным распределениями $E_y(x, 0)$

Относительные расхождения между заданным и получаемым распределениями поля (рис. 7) под большей частью профиля составляют менее 1 %, а у краев несколько возрастают. Последнее обусловлено тем, что участок AB профиля не совпадает с эквипотенциальной линией, показанной на рис. 6.

Выводы. 1. Сходимость и точность вычисления несобственных интегралов в аналитическом решении задачи Коши для уравнения Лапласа существенно зависят от координат точки наблюдения поля. Несобственные интегралы этих решений сходятся лишь на некотором сегменте координаты, перпендикулярной граничной поверхности, а шаг сетки с равноотстоящими узлами при вычислении интеграла решения с помощью квадратурных формул определяется координатой, ось которой лежит на граничной поверхности.

2. Несобственный интеграл в решении (4) сходится равномерно на сегменте $y(0, \alpha)$, если модуль косинус-преобразования Фурье, заданного в том числе таблично, на граничной поверхности распределения проекции вектора поля $F(\lambda)$ всюду на сегменте $\lambda(0, \infty)$ не превосходит величины $C_\lambda \lambda \exp(-\lambda \alpha)$.

3. Полученные результаты могут быть использованы для определения профилей соленоидов, создающих заданное распределение магнитного поля при резком поверхностном эффекте, а также электродов или полюсных наконечников в случаях аналогичных полей [5, 6].

An analytical solution of Cauchy problem for Laplace equation is used for tabular distribution of electric field intensity on the plane boundary surface. A convergence of improper solution integrals is studied., the algorithms of their calculation, and of the field level lines construction are described. By their means the electrode profile is determined. A divergence of the given and created field distribution is defined by solving direct problem.

1. *Brewer G. R.* Note on the determination of electrode shapes for a Pierce — type electron gun // J. of applied physics. — 1956. — Vol. 28, № 5. — P.6 34.
2. *Гурбанов Г. Г., Касьянков П. П., Таганов И. Н.* Распространение потенциала поля в пространство по заданному его распределению на оси // Радиотехника и электроника. — 1967. — № 4. — С. 659—661.
3. *Шнеерсон Г.А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. — Л. : Энергия, 1981. — 200 с.
4. *Мовмыга И. Н.* Синтез массивных одновитковых соленоидов для получения сильных импульсных магнитных полей: Дис... канд. техн. наук. — Киев, 1991. — 142 с.
5. *Михайлов В. М.* Определение профилей электродов и соленоидов для создания заданных распределений поля // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск «Проблеми сучасної електротехніки». — 2000. — Ч. 6. — С. 13—16.
6. *Михайлов В. М.* Продолжение магнитного потока и потенциала плоскомеридианных полей с плоской поверхности // Электричество. — 2002. — № 10. — С. 58—64.
7. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.* Сборник задач по математической физике. — М. : ГИТТЛ. — 1955. — 420 с.
8. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. — М.—Л. : ГИТТЛ, 1951. — 804 с.
9. *Ильин В. А.* Математический анализ. Продолжение курса (В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов). — М. : Изд. МГУ. — 1987. — 358 с.
10. *Задирака В. К.* Теория вычисления преобразования Фурье. — Киев : Наук. думка. — 1983. — 216 с.
11. *Бахвалов Н. С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). — М. : Наука, 1973. — 632 с.
12. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. — М. : Высш. шк., 1973. — 325 с.
13. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. Учеб. пособие. — М. : Наука, 1977. — 440 с.
14. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. : Наука, 1971. — 1108 с.
15. *Фильчаков П. Ф.* Численные и графические методы прикладной математики. — Киев : Наук. думка. — 1970. — 800 с.
16. *Михайлов В. М.* Теория электрических и магнитных полей в заданиях для курсовых работ. — Харьков : ХГПУ, 1994. — 88 с.
17. *Бартенев О. В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч.1. — М. : Диалог-МИФИ, 2000. — 448 с.

Поступила 03.10.06;
после доработки 09.12.06

КОНОВАЛОВ Олег Ярославович, аспирант кафедры инженерной электрофизики Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т», магистратуру которого окончил в 2006 г. Область научных исследований — методы математического моделирования электрических и магнитных полей, решение некорректных задач математической физики, техника сильных электрических и магнитных полей.

МИХАЙЛОВ Валерий Михайлович, д-р техн. наук, профессор кафедры инженерной электрофизики Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т», который окончил в 1966 г. Область научных исследований — теория электромагнитного поля, математическое моделирование физических полей, физика и техника сильных электрических и магнитных полей.