УДК 519.876.2

А. А. Дячук, аспирант
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел.: +38 (044) 4243541, E-mail: oadyachuk@ukr.net)

Аппроксимационные алгоритмы понижения размерности дифференциальной модели динамического объекта

(Статью представил д-р техн. наук А. Ф. Верлань)

Рассмотрены аппроксимационные алгоритмы понижения размерности дифференциальной модели динамического объекта на базе моделей Девисона.

Розглянуто апроксимаційні алгоритми пониження розмірності диференціальної моделі динамічного об'єкта на основі моделей Девісона.

Ключевые слова: динамический объект, алгоритм, модель Девисона.

Существует много методов моделирования динамических систем приближенными системами с пониженной размерностью, с помощью которых основные свойства исходной системы высшей размерности воспроизводятся в полученной модели достаточно точно, но ряд второстепенных характеристик могут быть потеряны. Такой подход называется понижением размерности моделирования.

Для линейных систем методы, понижающие размерность моделирования [1, 2], можно разделить на две группы. К первой относятся способы приближенного моделирования уравнений состояния системы, независимой переменной которых есть время. К ним относятся метод возбуждений [3], метод агрегаций [4], метод выделения доминантных собственных значений и др. Вторую группу составляют методы частотных характеристик исходной системы, т. е. функции от частоты. Из них наиболее известны методы моментов, метод разложения в цепную дробь, приближения Рауса, приближения Паде и др.

Хорошо известными методами выделения доминантных собственных значений исходной системы есть первый (или просто метод Девисона) и второй методы Девисона [5, 6], метод Маршала. Будем рассматривать второй метод Девисона и модифицированный второй метод Девисона, с единой точки зрения. Введем цепочку последовательных преобразований: исходная система $\rightarrow$ каноническая система $\rightarrow$ приближенная каноническая система $\rightarrow$ приближенная исходная система $\rightarrow$ модель с пониженной размерностью.

Постановка задачи. Рассмотрим процесс построения алгоритмов понижения размерности дифференциальной модели динамического объекта, основанный на первой, второй и модифицированной моделях Девисона.

Исходная система для моделей Девисона задается дифференциальной n-мерной линейной системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$x(0) = x^0, \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния; $u(t)$ — r-мерный вектор управления; A и B — постоянные матрицы.

Будем считать, что все собственные значения матрицы A попарно отличаются и их действительные части отрицательные. Кроме того, предположим, что действительные части $n-m$ собственных значений матрицы намного меньше оставшихся действительных частей m собственных значений, т. е.

$$\operatorname{Re}[\lambda(A_a)] >> \operatorname{Re}[\lambda(A_b)], \tag{2}$$

где A_a — диагональная матрица размерности m, диагональными элементами которой является m собственных значений матрицы A; A_b — диагональная матрица размерности $n-m$, диагональными элементами которой есть $n-m$ собственных значений матрицы A.

Алгоритм на основе модели Девисона. Образуем матрицу U, строками которой являются собственные векторы матрицы A. Между матрицами A, U, A_a, A_b устанавливается следующее соотношение:

$$AU = U\begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{bmatrix}, \ \det U \neq 0.$$

С помощью матрицы U преобразуем вектор состояния:

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_a(t) \\ z_b(t) \end{bmatrix} = U^{-1}x(t) = [U_a U_b]^{-1} x(t),$$

где $z_a(t)$ — m-мерный вектор состояния; $z_b(t)$ — $(n-m)$-мерный вектор; U_a и U_b — $n \times m$ и $n \times (n-m)$ матрицы.

Перепишем теперь уравнения исходной системы (1) для вектора состояния $z(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_a(t) \\ \dot{z}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a(t) \\ z_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u(t),$$
$$B_a = [I_m 0]U^{-1}B, \ A_b = [0\, I_{n-m}]U^{-1}B. \tag{3}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2007. V. 29. № 2

Назовем полученную систему (3) канонической системой. Здесь I_m и I_{n-m} — единичные матрицы размерности соответственно $n \times m$ и $(n-m)\times$ $\times(n-m)$; 0 — нулевые матрицы соответствующей размерности.

Согласно предположения (2) все собственные векторы подсистемы $z_b(t)$ отрицательные и большие по модулю. Это значит, что на оси s характеристические корни подсистемы $z_b(t)$ находятся далеко слева. Поэтому элементы переходного процесса, соответствующие $z_b(t)$, будут уменьшатся значительно быстрее и ими можно пренебречь.

Проанализируем это. Рассмотрим преобразования координат

$$\bar{x}(t) = Ez(t), \tag{4}$$

где E — $n \times m$-матрица, $E = [I_m 0]$. Тогда для вектора $\bar{z}(t)$ дифференциальное уравнение (3) примет вид

$$\dot{\bar{z}}(t) = A_a \bar{z}(t) + B_a u(t), \;\; \bar{z}(0) = Ez(0). \tag{5}$$

Систему (5) назовем приближением канонической системы. Она имеет меньшую размерность, которая составляет m. Для того, чтобы исследовать преобразования (4) в пространстве $x(t)$, умножим левую часть (4) на матрицу UE^T. Тогда получим

$$\bar{x}(t) = UE^T \bar{z}(t) = U_a \bar{z}(t). \tag{6}$$

Вектор $\bar{x}(t)$ имеет ту же размерность, что и $x(t)$, но в нем отсутствуют те компоненты, которые быстро уменьшаются.

Систему уравнений для $\bar{x}(t)$ назовем приближением исходной системы. Для того, чтобы из n-мерной системы $\tilde{x}(t)$ получить (для заданного m) m-мерную систему переменных $x(t)$, преобразуем $(n \times m)$-мерную матрицу R:

$$\tilde{x}(t) = R\bar{x}(t), \;\; rang\, RU_a = m. \tag{7}$$

Тогда с учетом (5) — (7) получим m-мерную систему уравнений

$$\dot{\tilde{x}}(t) = RU_a(A_a \bar{z}(t) + B_a u(t)) = RU_a A_a U_a^{-1} \bar{x}(t) + RU_a B_a u(t) =$$

$$= RU_a A_a U_a^{-1} R^{-1} \tilde{x}(t) + RU_a B_a u(t) = RU_a A_a (RU_a)^{-1} \tilde{x}(t) + RU_a B_a u(t). \tag{8}$$

Система (8) пониженной размерности и есть модель Девисона.

Эффективность модели Девисона состоит в том, что имея значительно меньшую размерность, чем исходная система, она достаточно полно отображает низкочастотные элементы переходных процессов исходной системы. Однако к числу ее недостатков можно отнести то обстоятельсто, что режимы, которые установились в модели Девисона, не всегда совпадают с режимами исходной системы.

Алгоритм на основе второй модели Девисона [6] различен для случаев скалярного и векторного управления.

Скалярное управление. Запишем систему уравнений (8) в виде

$$\dot{\hat{x}}^*(t) = A^* \hat{x}^*(t) + B^* u(t), \tag{9}$$

где $A^* = RU_a A_a (RU_a)^{-1}$, $B^* = RU_a B_a$. Преобразование

$$\hat{x}(t) = D\hat{x}^*(t), \tag{10}$$

переводит систему (9) в систему $\dot{\hat{x}}(t) = DA^* D^{-1}\hat{x}(t) + DB^* u(t)$, которая является второй моделью Девисона. Матрица преобразования D имеет вид:

$$D = \begin{bmatrix} d'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & d'_j & \vdots \\ 0 & \cdots & d'_m \end{bmatrix}, \; d'_j = [A^{-1}B]_j / [A^{*-1}B^*]_j . \tag{11}$$

Если $[A^{*-1}B^*]_j = 0$, то d'_j считается равным единице. В случае, когда $[A^{-1}B]_j = 0$, как видно из соотношений (10) и (11), j-я компонента вектора $x(t)$ становится тождественно равной нулю. Таким образом, в данной модели полностью отсутствует одна из компонент переходного процесса, что не желательно.

Векторное управление. Пусть вектор управления $u(t)$ имеет размерность r. Для каждого $u_i(t)$ рассмотрим соответствующую ему модель Девисона (8):

$$\dot{\hat{x}}_i^*(t) = A^* \hat{x}_i^*(t) + B_i^* u_i(t), \; i = 1, 2, ..., r. \tag{12}$$

Здесь величины B_i^* и $u_i(t)$ являются соответственно компонентами B^* и $u(t)$, которые входят в уравнение (9), $[B_1^*, ..., B_r^*] = B^*$, $[u_1(t), ..., u_r(t)]^r = u(t)$. Линейное преобразование $\hat{x}_i(t) = D^i \hat{x}_i^*(t)$ переводит (12) в систему $\dot{x}_i(t) = D^i A^* (D^i)^{-1} x_i(t) + D^i B_i^* u_i(t)$. Просуммировав r компонентов $x_i(t)$, получим

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} D^i A^* (D^i)^{-1} \hat{x}_i(t) + [D^1 B_1^*, ..., D^r B_r^*] u(t) . \tag{13}$$

Система (13) является второй моделью Девисона для векторного случая. Матрица преобразования D имеет следующий вид:

$$D^i = \begin{bmatrix} d_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & d_j^i & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m^i \end{bmatrix}, \; d_j^i = [A^{-1}B_i]_j / [A^{*-1}B_i^*]_j . \tag{14}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2007. V. 29. № 2

Если d_j^i элементы оказываются равными нулю, то величины d_j^i считаются равными единице, а B_i есть компоненты величины B, которые входят в соотношение (9). Если $[A^{-1}B_i]_j = 0$, то d_j^i, входящие в (14), также преобразуются в нуль. Тогда для матриц D^i, входящих в (13), не существует обратных. В этом случае вторая модель Девисона не может быть представлена в виде (13).

Алгоритм на основе модифицированной модели Девисона. Как показано выше, вторая модель Девисона [6], улучшает стационарные характеристики модели Девисона. Предлагаемая модификация второго метода Девисона представляется дальнейшим шагом в этом направлении. Свойства модели модифицированного метода Девисона одинаковые для случая скалярного управления и для многомерного входа. В случае скалярного управления, а также когда размерность модели равна единице, модифицированный метод совпадает со вторым методом Девисона.

Алгоритм построения модели, понижающие размерность, почти совпадает с соответствующей процедурой для модели Девисона. Отличие состоит лишь в том, что вместо преобразования (6) выполняется замена переменных

$$\bar{x}(t) = D_n U E^T \bar{z}(t) = D_n U_a \bar{z}(t), \tag{15}$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = D_n U E^T \dot{\bar{z}}(t) = D_n U_a \dot{\bar{z}}(t) \tag{16}$$

для определения векторов $\bar{x}(t)$ и $\dot{\bar{x}}(t)$. Здесь D_n — $n \times n$-матрица

$$D_n = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & d_j & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}, \; d_j = [U_a \bar{z}(\infty) + U_b z_b(\infty)]_j / [U_a \bar{z}(\infty)]_j, \tag{17}$$

которая вводится для того, чтобы откорректировать стационарные значения модели Девисона. (Если числитель или знаменатель дроби d_j равен нулю, то будем считать d_j равным единице).

Полагаем, что на достаточно больших промежутках времени правые части уравнений (3) и (5) приближаются к нулю, т. е.

$$\dot{\bar{z}}(t)\big|_{t\to\infty} = 0, \; \dot{z}_b(t)\big|_{t\to\infty} = 0. \tag{18}$$

Тогда стационарные решения уравнений (3) и (5) имеют вид

$$\bar{z}(\infty) = -A_a^{-1} W_a u(t) = z_b(\infty), \; z_b(\infty) = -A_a^{-1} W_b u(t). \tag{19}$$

Если предположение (18) справедливо, то величина $U_a \bar{z}(\infty) + U_b z_b(\infty)_j$ является j-й компонентой стационарного решения уравнений состояния исходной системы. Величина $U_a \bar{z}(\infty)_j$ есть j-я компонента стационарного решения вектора состояния $\bar{x}(t)$, определенного соотношением (6). С учетом соотношений (5), (7) и (9) получим модель пониженной размерности

$$\dot{\hat{x}}(t) = RD_nU_aA_a(RD_nU_a)^{-1}\dot{\hat{x}}(t) + RD_nU_aW_au(t),\ \hat{x}(0) = R\bar{x}(0). \quad (20)$$

Назовем эту модель модифицированной моделью Девисона. Если входные управления являются не ступенчатыми, а непрерывно переменными функциями времени, то, как вытекает из определения (17), производная по времени вектора $\bar{x}(t)$ (15) отличается от вектора $\dot{\bar{x}}(t)$, определенного соотношением (16). Действительно, если продифференцировать $\bar{x}(t)$ (23), то останутся компоненты $\dot{D}_n$. Откуда, следует, что дифференциальные уравнения модифицированной модели Девисона (20) и дифференциальные уравнения вектора $z(t)$ (5) — два безусловно разные дифференциальные уравнения. Векторы $\hat{x}(t)$ и $\bar{z}(t)$ не связаны один с другим каким-либо простым преобразованием координат.

Соответственно в решениях уравнений (5) и (15) $z(t)$ не совпадает с вектором $x(t)$, который получен в результате преобразования (7) и является решением модифицированной модели Девисона (20). Более того, поскольку в этом случае предположение (18) не выполняется, стационарные решения системы (20) не обязательно совпадают со стационарными решениями исходной системы.

Рассмотрим теперь случай, когда в каждой строке матрицы R есть один ненулевой элемент, а все другие элементы строки равны нулю:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & r(1,k_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & r(j,k_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r(m,k_m) & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где $r(j,k_j)$ — k-й элемент j-й строки матрицы R. Условие (7), очевидно выполнено. В этом случае уравнение (9) преобразуется в уравнение (6), а уравнение (7) — в систему

$$\hat{x}(t) = D_mR\bar{x}(t),\ \dot{\hat{x}}(t) = D_mR\dot{\bar{x}}(t). \quad (22)$$

В результате получаем систему уравнений, аналогичную системе (20), с матрицей

$$D_m = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & d_j & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix},\ d_j = [RU_a\bar{z}(\infty) + RU_bz_b(\infty)]_j / [RU_a\bar{z}(\infty)]_j. \quad (23)$$

Из соотношений (5), (6) и (22) получаем модель пониженной размерности

$$\dot{\hat{x}}(t) = D_m R U_a A_a (D_m R U_a)^{-1} \hat{x}(t) + D_m R U_a W_a u(t),$$

$$\hat{x}(0) = D_m R \bar{x}(0). \tag{24}$$

Следовательно, можно выделить такие особенности модифицированного метода Девисона:

1. Если матрица R удовлетворяет условию (21), то уравнения модифицированной модели Девисона (20) и (24) совпадают.

2. Относительно формы матриц D_n и D_m система уравнений модели (24), очевидно, является упрощенной по сравнению с системой (20).

3. В случае $R = [I_m 0]$ и если управление — скалярное, либо для модели пониженной размерности $m = 1$, то модифицированный метод Девисона совпадает со второй моделью Девисона.

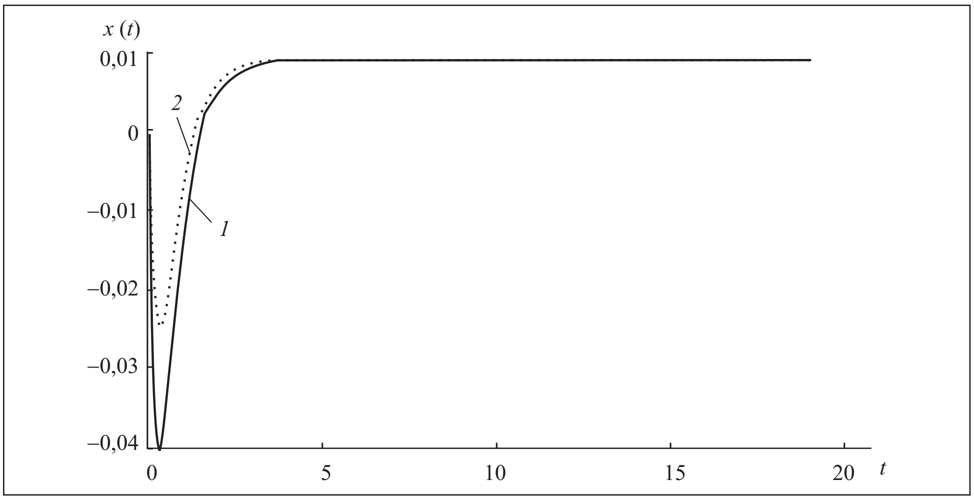
4. Представление модели остается неизменным и в случае скалярного, и в случае векторного управления. Однако, так как $u(t)$ входит в выражения для элементов матриц D_n и D_m, в матрицу коэффициентов $\hat{x}(t)$ также входит $u(t)$ в случае, когда $r \wedge m \neq 1$. Поэтому модифицированная модель Девисона становится нелинейной по отношению к $u(t)$.

5. В случае, когда $d_j \neq 1$ для всех j, или когда $[U_b z_b(\infty)]_j = 0$ для всех j, стационарные значения реакций на ступенчатые возбуждения совпадают для исходной системы и для модифицированной модели Девисона.

Сравнение алгоритмов. Как следует из изложенного, процесс построения алгоритма на основе модифицированной модели Девисона полностью совпадает с процедурой получения обычной модели Девисона, за исключением уравнений (9) для скалярного управления и (23) для обычной модели.

Сравним реакции обеих моделей на ступенчатые возбуждения. Для модели Девисона в случае $[U_b z_b(\infty)]_j \neq 0$ стационарные значения модели отличаются от стационарных значений исходной системы. В случае модифицированной модели Девисона достаточные условия, при которых стационарные значения модели совпадают со стационарными значениями исходной системы, задаются следующим предположением: для всех j, $d_j \neq 1$, или для всех j $[U_b z_b(\infty)]_j = 0$. Если для всех $j d_j = 1$, то очевидно матрица D_n становится равной I_m.

Численный эксперимент. Используем программу Davison, написанную в среде Matlab и предназначенную для понижения размерности дифференциальной модели динамического объекта, основанной на модели



Девисона. Рассмотрим пример:

$$\dot{x}_1 = -6x_1 - 0{,}8x_2 - 0{,}6x_3 + 0{,}05x_4 - u_1;$$

$$\dot{x}_2 = 8x_1 - 0{,}6x_2 - x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}1u_2;$$

$$\dot{x}_3 = -0{,}6x_1 - x_2 - 6x_3 + 1{,}1x_4 - 0{,}1u_3;$$

$$\dot{x}_4 = -0{,}05x_1 - 0{,}1x_2 - 1{,}1x_3 - 4{,}5x_4 - 0{,}008u_4.$$

Алгоритм работы программы.

1. Проверяем правильность задания исходных данных, т. е. выполнение условия, что все собственные значения матрицы A попарно отличаются и их действительные части — отрицательные. В случае невыполнения условия на экран выводится сообщение об ошибке.

2. Задаем элементы матриц A, B и вектор управления u:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -0{,}8 & -0{,}6 & 0{,}05; \\ 8 & -0{,}6 & -1 & 0{,}1; \\ -0{,}6 & -1 & -6 & 1{,}1; \\ -0{,}05 & 0{,}1 & -1{,}1 & -4{,}5 \end{bmatrix};$$

$$B = [-1 \quad 0{,}1 \quad -0{,}1 \; - 0{,}008]';$$

$$u = [0{,}381,\; 0{,}1,\; 0{,}2,\; 0{,}4]'.$$

3. Задаем размерность модели, которую необходимо получить (параметр $m = 2$).

4. Запускаем программу на выполнение.

После окончания программы получаем модель пониженной размерности, новые матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5{,}7012 & -0{,}6382 \\ 8{,}4676 & -0{,}3334 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -0{,}3433 \\ -0{,}8110 \end{pmatrix}.$$

Графики решения исходной (*1*) и аппроксимационной (*2*) моделей представлены на рисунке.

Выводы. Предложенные аппроксимационные алгоритмы понижения размерности дифференциальной модели динамического объекта основаны на первой, второй и модифицированной моделях Девисона. Модифицированная модель Девисона улучшает известный второй метод Девисона и модификация касается только формы представления модели. Последовательность процедур построения алгоритмов на основе обоих методов полностью совпадает в случае скалярного управления и в случае, когда порядок модели с уменьшенной размерностью равен единице. Программа Davison для понижения размерности динамической модели доказывает, что модель Девисона корректна и эффективна при использовании. Эта программа экономична и реализуется с малыми затратами машинного времени и объема вычислений.

Approximation algorithms of lowering the dimension of the differential model of dynamic object are considered on the basis of Davison models.

1. *Aoki M.* Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation// IEEE Trans. Automatic Control. — 1968. — Vol. AC-13, № 3. — P. 246—253.
2. *Kokotovic P.V., O'Malley R.E., Jr. Sannuti, Sannuti P.* Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory-An Overview // Automatica. — 1976. — Vol. 12, № 2. — P. 123—132.
3. *Davison E.J* A New Method for Simplifying Large Linear Dynamic Sysytems // IEEE Trans. Automatic Control. — 1966. —Vol. AC-13, № 2. — P. 214—215.
4. *Davison E.J.* A Method for Simplifying Linear Dynamic Sysytems // Ibid.— 1966. — Vol. AC-11, № 1. — P. 93—101.
5. *Маэда* Структура многомерной линейной системы и методы понижения её размерности // Сисутему то сэйгё. — 1978. —22, № 11. — С.655—664.

Поступила 15.09.06

ДЯЧУК Александр Анатольевич, аспирант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2005 г. окончил Каменец-Подольский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование динамических систем.