



УДК 519.816

Е. А. Егорова

Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. М.Шпака, 2,
тел.: (044) 4542140, E-mail: elena_stud@yahoo.com),

Т. Г. Сигал

Учебно-научный комплекс «Ин-т прикладного системного анализа»
Национального технического университета Украины «КПИ»
(Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 37, корп. 14,
E-mail: lunareclipse@yandex.ru),

В. Г. Тоценко, д-р. техн. наук

Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. М.Шпака, 2,
тел.: (044) 4542137, E-mail: vgt@cki.ipri.kiev.ua)

Экспериментальное исследование феномена реверса рангов

(Статью представил канд. техн. наук В. В. Аристов)

Описана методика и результаты экспериментального исследования феномена реверса рангов при использовании различных методов экспертного оценивания (непосредственного оценивания, парных сравнений «линия»). Получены экспериментальные графики зависимостей частоты появления реверса рангов от числа альтернатив и критериев. Выполненные экспериментальные исследования полностью подтвердили теоретические результаты относительно условий возникновения феномена реверса рангов.

Описано методику та результати експериментального дослідження феномена реверса рангів при використанні різних методів експертного оцінювання (безпосереднього оцінювання, парних порівнянь «лінія»). Отримано експериментальні графіки залежностей частоти появи реверса рангів від кількості альтернатив і критеріїв. Виконані дослідження повністю підтвердили теоретичні результати щодо умов виникнення феномена реверсу рангів.

К л ю ч е в ы е с л о в а: реверс рангов, методы экспертного оценивания, альтернатива, критерий.

Большинство разрабатываемых в наше время систем поддержки принятия решений основано на методах мультикритериального оценивания альтернатив. Одной из наиболее распространенных систем является Expert Choice, разработанная на основе метода аналитических иерархических процессов [1—4]. Однако, как показали исследования [5, 6], при применении этих методов возникает феномен реверса рангов. В работе [7] вы-

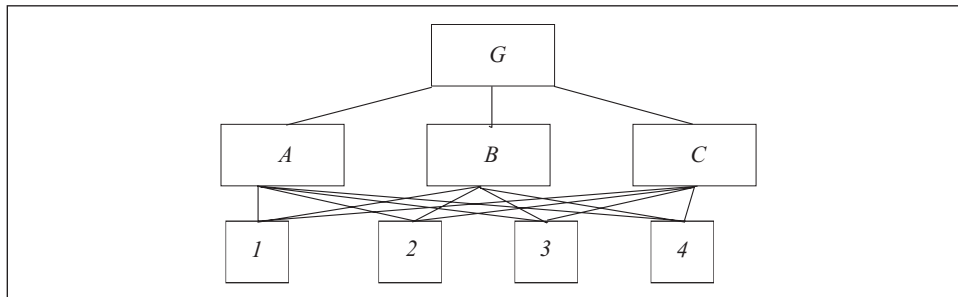


Рис. 1. Иерархия критериев

полнено теоретическое исследование условий возникновения реверса рангов и определены достаточные условия отсутствия этого феномена.

Здесь рассмотрим методику и результаты экспериментального исследования феномена реверса рангов при использовании для экспертного оценивания альтернатив метода непосредственного оценивания и метода парных сравнений «линия».

Суть феномена реверса рангов заключается в следующем. При изменении числа альтернатив (добавлении или удалении альтернативы) в условиях сохранения матрицы парных сравнений и постоянности относительных весов критериев может возникнуть изменение рангов альтернатив по отношению к ранжированию без добавления или удаления альтернативы.

Сохранение рангов альтернатив является свойством, которое можно представить в следующем виде:

$$\forall(1 < i, j \leq n) [\{ (r_i > r_j) / |A| = n \} \rightarrow \{ (r_i > r_j) / |A'| = n + 1 \}],$$

где $A = \{a_i\}, i = \overline{1, n}$ — множество альтернатив; $A' = A \cup a_{n+1}$; r_i, r_j — ранги альтернатив соответственно a_i, a_j , т.е. соотношение рангов альтернатив не зависит от их числа.

Возникновение феномена реверса рангов рассмотрим на примере, приведенном в [6], где по трем равнозначным критериям ($w_A = w_B = w_C = 0,333$) оцениваются сначала три альтернативы, a_1, a_2, a_3 , а затем добавляется еще одна (рис. 1). Результаты сравнения альтернатив a_1, a_2, a_3 и a_4 по критериям A, B, C в виде матриц парных сравнений приведены в табл. 1. Добавив альтернативу a_4 , сравним ее со всеми другими по тем же критериям (см. табл. 1).

Предположим, что критерии оценки альтернатив независимы по предпочтениям [8]. Тогда рейтингами альтернатив r_i , по которым определяются их ранги, будут значения аддитивной функции полезности [1]. Для

трех альтернатив $\rho_i^3 = \sum_{h=1}^3 w_h v_{ih}$, соответственно для четырех альтернатив

$\rho_i^4 = \sum_{h=1}^3 w_h \psi_{ih}$, где w_h — относительный вес h -го критерия; v_{ih} и ψ_{ih} —

относительный вес альтернативы a_i по h -му критерию при трех и четырех альтернативах.

Результаты оценивания и ранжирования трех и четырех альтернатив приведены в табл. 2, из которой получаем следующие ранжирования: для трех альтернатив — $a_2 \succ a_1 \succ a_3$, для четырех альтернатив — $a_1 \succ (a_2 = a_4) \succ a_3$. Таким образом, при сравнении четырех альтернатив получаем: $a_1 \succ a_2$, в то время как при сравнении трех альтернатив получили $a_2 \succ a_1$, несмотря на то, что преимущества альтернатив при их парном сравнении сохранились. Следовательно, наблюдается реверс рангов.

Достаточные условия отсутствия реверса рангов. Как доказано в [7] достаточным условием отсутствия реверса рангов является следующее:

$$\forall (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n) [\psi_{ij} = \alpha^\lambda v_{ij} + \beta], \lambda \geq 0. \quad (1)$$

Это условие можно сформулировать таким образом: при увеличении числа альтернатив веса всех альтернатив относительно всех критериев должны умножаться на один и тот же коэффициент и иметь один и тот же сдвиг относительно значений весов альтернатив, которые они имели до увеличения их числа.

Таблица 1

Альтернатива	Критерий А				Критерий В				Критерий С			
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1,000	0,111	1,000	0,111	1,000	9,000	9,000	9,000	1,000	0,889	8,000	0,889
a_2	9,000	1,000	9,000	1,000	0,111	1,000	1,000	1,000	1,125	1,000	9,000	1,000
a_3	1,000	0,111	1,000	0,111	0,111	1,000	1,000	1,000	0,125	0,111	1,000	0,111
a_4	9,000	1,000	9,000	1,000	0,111	1,000	1,000	1,000	1,125	1,000	9,000	1,000

Таблица 2

Альтернатива	v_{iA}	v_{iB}	v_{iC}	ρ_i^3	Ψ_{iA}	Ψ_{iB}	Ψ_{iC}	ρ_i^4
a_1	0,0909	0,8182	0,4444	0,4512	0,0500	0,7500	0,2963	0,3654
a_2	0,8182	0,0909	0,5000	0,4697	0,4500	0,0833	0,3333	0,2889
a_3	0,0909	0,0909	0,0556	0,0791	0,0500	0,0833	0,0371	0,0568
a_4	—	—	—	—	0,4500	0,0833	0,3333	0,2889

Следует заметить, что (1) является достаточным условием, т. е. выполнение его гарантирует отсутствие реверса рангов, но невыполнение его не является достаточным условием наличия реверса рангов. Таким образом, можно предположить, что существуют матрицы парных сравнений, применение к которым метода собственного вектора [1] вычисления относительных весов альтернатив не приводит к появлению реверса рангов.

Методика проведения экспериментальных исследований при различных методах экспертного оценивания альтернатив. Для проверки выполнения (невыполнения) достаточных условий отсутствия реверса рангов были рассмотрены следующие методы получения экспертных оценок: метод непосредственной оценки и метод парных сравнений «линия».

Параметры эксперимента:

число альтернатив и число критериев варьировалось от 3 до 7;

критерии были равнозначными: $w_j = 1/m$, где m — число критериев; добавлялась одна альтернатива;

число исследований — 1000, 10 000, 100 000.

Такие границы изменения параметров эксперимента определяются психофизиологическими ограничениями человека по обработке информации [9].

Метод непосредственной оценки. 1. Случайным образом генерируется n оценок v_{ij} альтернатив a_i , $i = \overline{(1, n)}$, по каждому из m критериев.

2. Для каждой альтернативы i , $i = \overline{(1, n-1)}$ вычисляется значение функции рейтинга по формуле

$$S_i = \sum_{j=1}^m w_j v_{ij}.$$

3. Фиксируется ранжирование R_{n-1} альтернатив согласно значениям функции рейтинга.

4. Выполняются пункты 2, 3 для n альтернатив.

5. Фиксируется ранжирование R_n альтернатив согласно значениям функции рейтинга.

6. Сравниваются ранжирования R_n и R_{n-1} и делается вывод о наличии или отсутствии реверса рангов альтернатив.

Метод «линия». Отличие данного алгоритма от алгоритма непосредственного оценивания заключается в том, что генерируются оценки степеней превосходства d_{ie} альтернатив a_i над эталонной альтернативой a_e ($i \neq e$), а веса v_{ij} альтернатив вычисляются согласно алгоритму, описанному в [8]. После этого выполняются п. 2—6 алгоритма, описанного в разделе 4.1 работы [8].

Результаты экспериментального исследования. В ходе эксперимента последовательно генерируются оценки трех, четырех, пяти, шести и

семи альтернатив по каждому из трех критериев. Для каждой альтернативы подсчитывается рейтинг для случаев, когда

оценки альтернатив v_{ij} не нормируются;

оценки альтернатив нормируются по сумме: $v_{ij}^* = v_{ij} / \sum_{i=1}^n v_{ij}$;

оценки альтернатив нормируются по максимуму: $v_{ij}^* = v_{ij} / \max v_{ij}$.

Вначале была исследована зависимость частоты возникновения реверса рангов от числа альтернатив по алгоритму, приведенному выше. Частота возникновения реверса рангов есть отношение числа экспериментов, в которых наблюдался реверс рангов, к общему числу проведенных экспериментов. После проведения 10 000 экспериментов установлено, что при подсчете рейтинга альтернатив по ненормированным оценкам, как в методе непосредственного оценивания так и в методе «линия», реверс рангов не выявлен ни в одном из испытаний. Для нормированных весов были выявлены случаи возникновения феномена реверса рангов. Частота появления реверса рангов при проведении 10 000 экспериментов по трем критериям приведена в табл. 3.

По данным табл. 3 построен график зависимости частоты появления реверса рангов от числа альтернатив (рис. 2).

Следующим этапом было определение зависимости частоты появления реверса рангов от числа критериев при фиксированном числе альтернатив, равном трем. Исследования, аналогичные описанным выше, показали, что при подсчете рейтинга альтернатив по ненормированным оценкам как методом непосредственного оценивания, так и методом «линия», реверс рангов не наблюдается. В то же время, для нормированных весов были выявлены случаи возникновения феномена реверса рангов.

Таблица 3

Число альтернатив	Частота появления реверса рангов при оценивании по трем критериям методом			
	непосредственного оценивания		методом «линия»	
	по максимуму	по сумме	по максимуму	по сумме
3	0,0602	0,0886	0,1266	0,1591
4	0,0527	0,1007	0,1280	0,1664
5	0,0468	0,1057	0,1166	0,1657
6	0,0428	0,11	0,1047	0,1710
7	0,0391	0,1126	0,0853	0,1711

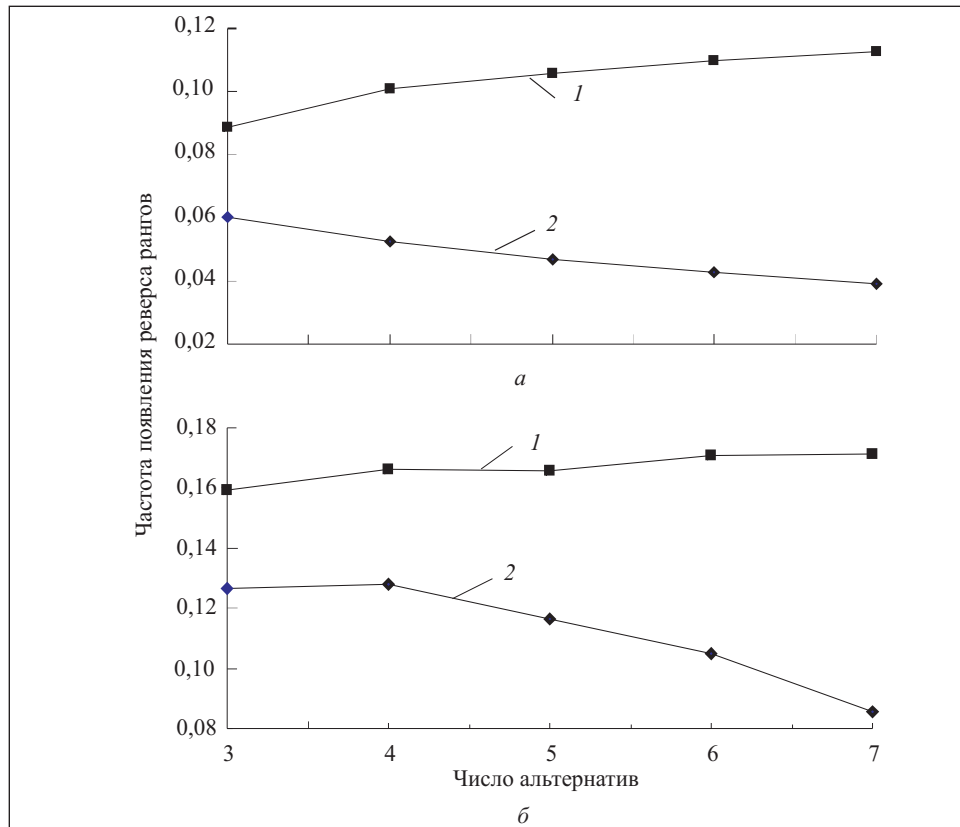


Рис. 2. Зависимость частоты появления реверса рангов от числа альтернатив: *a* — метод непосредственного оценивания по трем критериям; *б* — метод «линия» оценивания по трем критериям; 1 — нормирование по сумме; 2 — нормирование по максимуму

Таблица 4

Число критериев	Частота появления реверса рангов для трех альтернатив			
	при непосредственном оценивании		при оценивании методом «линия»	
	по максимуму	по сумме	по максимуму	по сумме
3	0,0602	0,0886	0,1266	0,1591
4	0,0605	0,0983	0,1532	0,1702
5	0,0726	0,1084	0,1659	0,1798
6	0,0757	0,1148	0,1734	0,1817
7	0,0768	0,1073	0,1819	0,1919

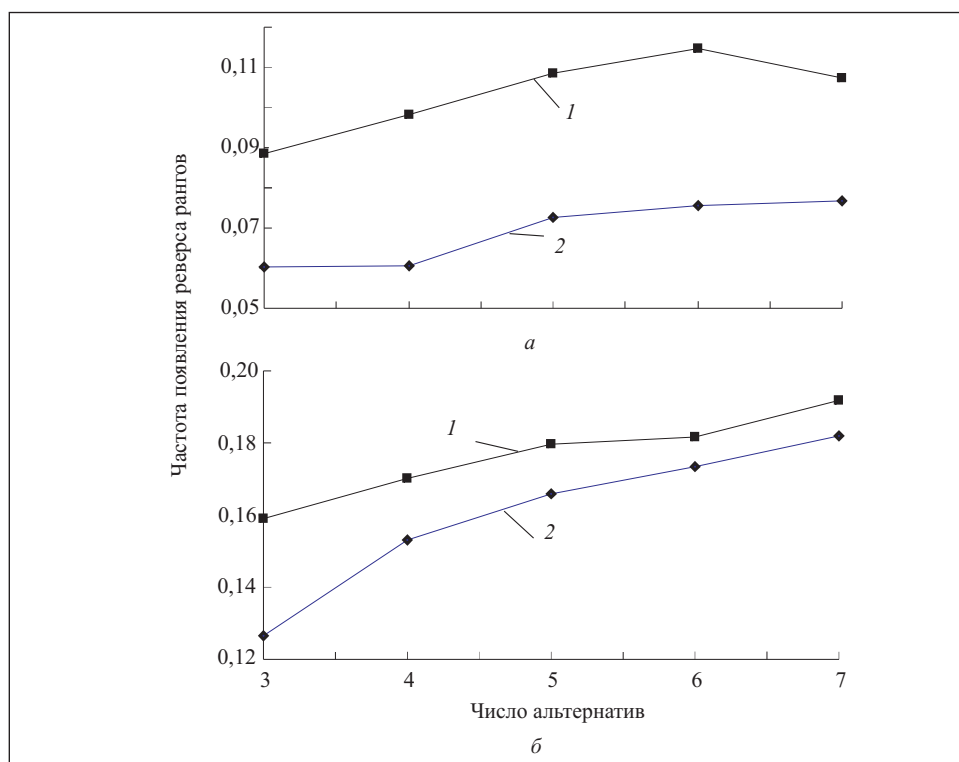


Рис. 3. Зависимость частоты появления реверса рангов от числа критериев: *а* — метод непосредственного оценивания для трех альтернатив; *б* — метод «линия» при трех альтернативах; 1 — нормирование по сумме; 2 — нормирование по максимуму

Частота возникновения реверса рангов при проведении 10 000 экспериментов для трех альтернатив приведена в табл. 4.

По данным табл. 4 построен график зависимости частоты появления реверса рангов от числа критериев (рис. 3).

Выводы. Из приведенных экспериментальных данных видно, что при исследованиях методом непосредственной оценки и методом «линия» с использованием нормированных по сумме и максимуму оценок весов альтернатив наблюдается феномен реверса рангов. Причем при использовании оценок нормированных по сумме реверс рангов возникает чаще, чем при нормировании по максимуму. В то же время, как видно из графиков, увеличение числа критериев при фиксированном числе альтернатив ведет к увеличению частоты появления реверса рангов в обоих случаях. При увеличении числа альтернатив и фиксированном числе критериев в случае нормирования по максимуму частота появления реверса уменьшается, а в случае нормирования по сумме — увеличивается. Метод

непосредственной оценки и метод «линия» с использованием ненормированных весов альтернатив позволяют избежать феномена реверса рангов, что обуславливает более широкое их использование.

Экспериментальные исследования представленных методов экспертного оценивания полностью подтвердили полученные в [7] теоретические результаты относительно условий возникновения феномена реверса рангов.

A technique and results of experimental research of the rank reverse phenomenon are described by using various methods of expert estimation (direct estimation, pair comparisons «line»). Experimental graphs of the relation between rank reverse appearance frequency and the number of alternatives and criteria are obtained. The experimental researches fully confirmed the theoretical results as to the conditions of the rank reverse phenomenon appearance.

1. Saaty T. L. The Analytic hierarchy process. — N.Y. : McGraw-Hill, 1980. — 270 p.
2. Harker P.T. Incomplete pairwise comparisons in the Analytic hierarchy process // Math. modeling. — 1987. — № 11. — P. 837—848.
3. Saaty T. L. Multicriteria decision making: the Analytic hierarchy process. — N.Y.: McGraw-Hill, 1990. — 320 p.
4. Saaty T. L., Vargas L. G. The logic of priorities: applications of the Analytic hierarchy process in business, energy, health & transportation. — Pittsburgh : RWS publications, 1991. — 299 p.
5. Ramanathan R., Ganesh L. S. Group preference aggregation methods employed in AHP: an evaluation and intrinsic process for deriving members' weightages // European J. of Operational Research. — № 79. — P. 249—265.
6. Kumar N. V. , Ganesh L. S. An empirical analysis of the use of the Analytic Hierarchy Process for estimating membership values in a fuzzy set // Fuzzy Sets and Systems. — 1996. — № 82. — P. 1—16.
7. Тоценко В. Г. О проблеме реверса рангов альтернатив при мультикритериальном оценивании // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 25—38.
8. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — Киев : Наук. думка. — 2002. — 382 с.
9. Миллер Г. Магическое число семь плюс или минус два // Инженерная психология. — М. : Прогресс, 1964. — С. 86—101.

Поступила 10.05.06;
после доработки 05.09.06

ЕГОРОВА Елена Александровна, мл. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 2004 г. окончила Учебно-научный комплекс «Ин-т прикладного системного анализа» Национального технического университета Украины «КПИ». Область научных исследований — системы поддержки принятия решений.

СИГАЛ Татьяна Григорьевна, ассистент кафедры математических методов системного анализа Учебно-научного комплекса «Ин-т прикладного системного анализа» Национального технического университета Украины «КПИ», который окончила в 2004 г. Область научных исследований — системы поддержки принятия решений.

ТОЦЕНКО Виталий Георгиевич, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем регистрации информации. В 1958 г. окончил Киевское высшее инженерное авиационное училище военно-воздушных сил. Область научных исследований — системы поддержки принятия решений.