УДК 621.311.001.57

И. А. Головинский, канд. физ.-мат. наук
Открытое акционерное общество
«Всесоюзный научно-исследовательский ин-т электроэнергетики»
(Россия, 115201, Москва, Каширское шоссе, д. 22, корп. 3,
тел.: (095) 1138911, E-mail: expert@vniie.ru)

Непротиворечивость операций в многоуровневых дискретных моделях электрических сетей. II

Рассмотрены графы дискретных многоуровневых моделей. Установлены достаточные условия непротиворечивости операций в многоуровневых иерархических графовых моделях. Теоретические результаты использованы для проверки непротиворечивости информационных запросов и операций переключений в дискретных многоуровневых моделях электрических сетей. Приведены примеры информационных запросов и операций переключения в многоуровневой модели электрической сети, подтверждающие применимость доказанных теорем.

Розглянуто графи дискретних многорівневих моделей. Установлено достатні умови несуперечності операцій у многорівневих ієрархічних графових моделях. Теоретичні результати використано для перевірки несуперечності інформаційних запитів та операцій перемикань у дискретних многорівневих моделях електричних мереж. Наведено приклади інформаційних запитів та операцій перемикання у многорівневій моделі електричної мережі, що підтверджують застосовність доведених теорем.

Ключевые слова: алгебра, граф, гомоморфизм, предикат, электросеть.

Перестановочность операции обобщения с операциями алгебры графов. В [1] сформулирована задача определения условий непротиворечивости операций в многоуровневых иерархических графовых моделях. Непротиворечивость понимается как перестановочность операций, выполняемых на разных уровнях модели, с переходами между этими уровнями. Операция обобщения, посредством которой выполняется переход модели к более общему уровню, математически формализуется как стягивание графа. Для формализации условий непротиворечивости операций в многоуровневых иерархических графовых моделях введено понятие относительной связности графов [1]. Установлено, что при стягивании графа посредством его подграфа d стягиваются корректно (с сохранением наличия или отсутствия связности между вершинами) те и только те подграфы, которые связны в стягивающем подграфе d. Граф A называется связным в графе d, если каждая связная компонента графа d либо принадлежит графу A, либо не пересекается с ним.

Перестановочность операции обобщения, как стягивания графов, с операциями объединения, пересечения и разности графов, а также с операцией семантической селекции, при условии, что графы — аргументы этих операций связны в стягивающем графе, свидетельствует о непротиворечивости операций, выражаемых через объединение, пересечение и разность графов, а также через операцию семантической селекции. Сформулируем и докажем достаточные условия этой перестановочности.

Операция разности графов $A - B$ обычно понимается как удаление из графа A всех вершин, принадлежащих графу B, а также всех инцидентных им ребер. Эту операцию будем называть разностью (вычитанием) 1-го рода. При вычислениях графов иногда требуется другой вариант операции вычитания: удаление из графа A всех ребер графа B, а также всех вершин, у которых все инцидентные им ребра принадлежат графу B. Эту операцию будем называть разностью (вычитанием) 2-го рода и обозначим ее символом $\ominus$. При вычитании 1-го рода из графа A сначала следует удалить все вершины графа B, а затем — все ребра, у которых оказался удален хотя бы один конец. При вычитании 2-го рода, наоборот, сначала из графа A следует удалить все ребра графа B, а затем — все вершины графа B, которые вследствие этого оказались неинцидентными оставшимся ребрам графа A.

Разность 1-го рода $X = A - B$ есть максимальный подграф графа A, удовлетворяющий равенству $X \,\&\, B = 0$. Разность 2-го рода $Y = A \ominus B$ есть минимальный подграф графа A, удовлетворяющий равенству $Y + B = A + B$.

Вычитание 2-го рода применяется для удаления из графа множества ребер, концы которых удалять специально не требуется. При этом множество удаляемых ребер задается как граф, являющийся объединением их как графов. Этот граф предварительно вычисляется.

Теорема 1. Если графы A и B связны в d, то графы $A + B$, $A \,\&\, B$ и $A - B$ связны в d.

Доказательство. Если графы A и B связны в d, то каждая связная компонента графа d является подграфом графа A или подграфом графа B, либо не пересекается ни с графом A, ни с графом B. Значит, каждая связная компонента графа d либо является подграфом графа $A + B$, либо не пересекается с графом $A + B$, т. е. граф $A + B$ связен в d.

Если графы A и B связны в d, то каждая связная компонента графа d, принадлежащая графу A, либо является подграфом графа B, либо не пересекается с графом B. В первом случае эта связная компонента принадлежит графу $A\&B$, во втором — не пересекается с графом $A\&B$. Если связная компонента графа d не пересекается с графом A, то она не пересекается и с графом $A\&B$. Поэтому каждая связная компонента графа d либо является подграфом графа $A\&B$, либо не пересекается с графом $A\&B$. Значит, граф $A\&B$ связен в d.

Разность $A-B$ можно записать в виде $A-B = A \,\&\, (U-B)$. В [1] отмечено, что если граф B связен в d, то граф $U-B$ тоже связен в d. Выше показано, что пересечение любых двух графов, связных в d, есть граф, связный в d. Поэтому граф $A \,\&\, (U-B) = A-B$ связен в d.

Теорема доказана.

Теорема 1 означает, что множество всех подграфов графа-универсума, связных в графе d, замкнуто относительно операций «+», «&» и «–», т.е. что это множество образует алгебру с тремя бинарными операциями. Граф $A \ominus B$ может не быть связным в d, когда графы A и B связны в d.

Пусть U — граф-универсум, d — стягивающий граф операции обобщения $\Omega : \Omega(U) = U/d$. Если подграфы A и B графа-универсума U связны в d, то стягивание Ω перестановочно с тремя операциями алгебры графов: «+», «&» и «–».

Теорема 2. Если графы A и B связны в d, то справедливы тождества

$$(A+B)/d = (A/d)+(B/d), \tag{1}$$

$$(A\&B)/d = (A/d)\&(B/d), \tag{2}$$

$$(A-B)/d = (A/d)-(B/d). \tag{3}$$

Если, кроме того, граф $A \ominus B$ связен в d, то справедливо тождество

$$(A \ominus B)/d = (A/d)\ominus(B/d). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стягивание Ω: $U \to U/d$ равносильно последовательности (произведению) стягиваний по каждому из ребер любого остова графа d в произвольном порядке. Поэтому тождества (1) — (3) достаточно доказать для стягивания по одному ребру, т. е. для случая, когда стягивающий граф d состоит из двух вершин и соединяющего их ребра.

Если один конец графа-ребра d принадлежит графу A, то и другой его конец принадлежит графу A в силу связности графа A в d. То же самое верно для графа B.

Пусть граф-ребро d принадлежит графу $A+B$. Тождество (3) выражает тот факт, что стягивание графа $A+B$ по ребру d равносильно выполнению по отдельности стягиваний графов A и B по ребру d и последующему объединению полученных графов. Истинность этого утверждения легко проверяется по отдельности для случаев, когда ребро d принадлежит только одному из графов A или B, и когда оно принадлежит обоим графам. Точно так же проверяются тождества (2) и (3).

Докажем тождество (4), предполагая связность в графе d графов A, B и $A \ominus B$. Для разности 2-го рода справедливо тождество $(A \ominus B) + (A \,\&\, B) = A$. Оно проверяется непосредственно, исходя из определения операции «$\ominus$».

Графы $A \ominus B$, $A\&B$ и A связны в d. Согласно доказанному операция объединения графов, связных в d, перестановочна со стягиванием $/d$:

$$(A \ominus B) / d + (A \,\&\, B) / d = A / d \,.$$

Операция пересечения графов, связных в d, перестановочна со стягиванием:

$$(A \ominus B) / d + ((A/d) \,\&\, (B/d)) = A / d \,.$$

К обеим частям последнего равенства применим операцию вычитания 2-го рода графа B/d:

$$((A \ominus B) / d + ((A/d) \,\&\, (B/d))) \ominus (B / d) = (A / d) \ominus (B / d) \,.$$

В левой части этого равенства прибавление графа (A/d) & (B/d) к графу $(A \ominus B)/d$ компенсируется вычитанием 2-го рода графа B/d, так как графы $(A \ominus B)/d$ и B/d не имеют общих ребер. Поэтому левая часть равенства равна $(A \ominus B)/d$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Согласно теореме 2 из работы [1], если подграфы A и B графа-универсума U связны в d, то стягивание графа-универсума графом d является сильным гомоморфизмом графов A и B. Алгебраические тождества (1) — (3) означают, что этот сильный гомоморфизм перестановочен с операциями объединения, пересечения и разности 1-го рода. Доказанная выше теорема 1 означает, что этот сильный гомоморфизм есть также гомоморфизм алгебры графов с тремя бинарными операциями, «+», «&» и «–», определенными на всех подграфах графа-универсума, связных в графе d — ядре сильного гомоморфизма.

Перестановочность операции обобщения с операцией семантической селекции. Рассмотрим, инвариантна ли относительно стягивания графов операция семантической селекции.

Операция семантической селекции — это функция семантической границы $L(g, e, \sigma, \mu)$, где g — граф-контекст; e — исходный элемент; σ — ограничивающее множество; μ — контролируемое множество. Пусть Ω — отображение стягивания посредством графа d графа-универсума U на граф $\Omega(U) = U/d$. Граф $\Omega(g)$ выражается формулой $\Omega(g) = g/d$. Вершина e графа U отображается в вершину $\Omega(e)$ графа U/d. Образ любого подмножества X вершин графа U при отображении можно записать как X/d. Множество $\Omega(\sigma)$ есть подмножество множества вершин графа U/d, являющееся образом множества вершин σ графа U. Аналогично множество $\Omega(\mu)$ есть образ множества вершин μ графа U.

Для инвариантности операции семантической селекции $\lambda = L(g, e, \sigma, \mu)$ относительно стягивания необходимо на аргументы этой функции наложить некоторые естественные ограничения: стягивание не должно нарушать «целостности» аргументов. Сохранение целостности графа при стягивании — это сохранение связей между его вершинами. Связи между вершинами подграфа G графа-универсума сохраняются при связном гомоморфизме этого графа, т. е. при стягивании графа-универсума таким графом, в котором связен граф G. Поэтому наложим условие связности в стягивающем графе d на граф-контекст g.

Сохранение целостности множества вершин при стягивании будем понимать как сохранение в установленном выше смысле целостности графа, порожденного этим множеством. Если X — какое-либо подмножество вершин графа-универсума U и G — подграф графа U, то графом, порожденным множеством X в графе G, будем называть подграф графа G, множеством вершин которого является $X\&G$, а множеством ребер — все ребра графа G, у которых оба конца принадлежат множеству X. Этот граф обозначим через $G(X)$. Если V — множество вершин графа-универсума, то $G = G(V)$ [2, с. 17; 3, с. 27].

Будем предполагать связными в стягивающем графе d графы $g(\sigma)$ и $g(\mu)$. Все вершины графа $g(\sigma)$ принадлежат множеству σ; все ребра графа g, оба конца которых инцидентны этим вершинам, принадлежат графу $g(\sigma)$, и других ребер в графе $g(\sigma)$ нет. То же самое справедливо для графа g(μ). В алгоритме вычисления функции семантической границы, приведенном в [4], множество σ можно заменить графом $g(\sigma)$, а множество μ — графом $g(\mu)$. Результат вычислений не изменится. В качестве варианта функции семантической границы можно ввести функцию $L(g, e, g(\sigma), g(\mu))$, полагая ее по определению тождественно равной функции $L(g, e, \sigma, \mu)$.

Функция семантической границы оказывается перестановочной со стягиванием посредством графа d, если ее аргументы g, $g(\sigma)$ и $g(\mu)$ связны в графе d. Определения семантических параметров, выражаемые функцией семантической границы, при этих условиях будут инвариантны относительно операции обобщения (стягивания).

Далее везде предполагается, что исходный элемент e не включается в ограничивающее множество σ, а контролируемое множество μ является подмножеством ограничивающего множества $\sigma : \mu \subseteq \sigma$.

Теорема 3. Пусть d — стягивающий граф преобразования $\Omega : U \to U/d$ графа-универсума U; $L(g, e, \sigma, \mu)$ — функция семантической границы, $e \notin \sigma$ и $\mu \subseteq \sigma$. Если графы g, $g(\sigma)$ и $g(\mu)$ связны в d, то

$$L(g, e, \sigma, \mu)/d = L(g/d, \Omega(e), \sigma/d, \mu/d)\,. \qquad (5)$$

Доказательство. Поскольку $\mu \subseteq \sigma$, справедливо равенство $\sigma + \mu = \sigma$.

Стягивание графа-универсума U по графу d можно осуществить как последовательность стягиваний по каждому ребру любого остова графа d. Ребра остова графа d для стягивания можно выбирать в любом порядке. Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассмотреть стягивание по одному произвольно выбранному ребру графа d.

Поскольку графы g и $g(\sigma)$ связны в d, в силу теоремы 1 граф $g - g(\sigma)$ связен в d. Вместе с тем, $A = g - (\sigma + \mu) = g - \sigma = g - g(\sigma)$. Поэтому граф A связен в d.

Поскольку граф A связен в d, то любое ребро графа d либо принадлежит графу A, либо неинцидентно графу A. Рассмотрим эти два случая.

1. Если ребро x принадлежит графу A, то стягивание по нему не затрагивает множество вершин выделенного подмножества семантической границы. В этом случае равенство (5) выполняется, так как обе его части равны $L(g, e, \sigma, \mu)$.

2. Если ребро x неинцидентно графу A, то оно принадлежит графу $g(\sigma)$, так как $g(\sigma) = g–A$. Рассмотрим три случая с различным расположением ребра x, принадлежащего графу $g(\sigma)$, относительно семантической границы $b(g, e, \sigma)$:

1) ребро x не инцидентно множеству $b(g, e, \sigma)$;

2) один конец ребра x принадлежит множеству $b(g, e, \sigma)$, другой — не принадлежит этому множеству;

3) оба конца ребра x принадлежат множеству $b(g, e, \sigma)$.

В случае 1 стягивание по ребру x не затрагивает выделенное подмножество семантической границы $L(g, e, \sigma, \mu)$. Поэтому утверждение теоремы очевидно.

В случае 2 число точек множества $b(g, e, \sigma)$ при стягивании не меняется, но к одной из точек множества $b(g, e, \sigma)$ «приклеивается» точка множества σ, не принадлежащая множеству $b(g, e, \sigma)$. Оба конца стягиваемого ребра одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат контролируемому множеству μ, так как граф $g(\mu)$ связен в d. Поэтому распределение точек семантической границы $b(g, e, \sigma)$ между контролируемым множеством μ и его дополнением не изменится при стягивании по такому ребру.

В случае 3 возможны три варианта расположения ребра x относительно множества μ:

а) ребро x принадлежит графу $g(\mu)$;

б) один конец ребра x принадлежит графу $g(\mu)$, другой — нет;

в) ребро x неинцидентно графу $g(\mu)$.

В случае 3а число точек выделенного подмножества семантической границы $\lambda = L(g, e, \sigma, \mu)$ при стягивании уменьшается на единицу. Мно-

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2007. V. 29. № 1

жество λ/d получается из множества λ совмещением двух точек множества λ. Но множество $\gamma = L(g/d, \Omega(e), \sigma/d, \mu/d)$ получается из множества λ совмещением тех же двух точек, так как аргументы функции $\gamma = L(g/d, \Omega(e), \sigma/d, \mu/d)$ отличаются от аргументов функции $\lambda = L(g, e, \sigma, \mu)$ только совмещением этих двух точек при стягивании ребра x. Отсюда $\lambda/d = \gamma$. При этом не меняется множество $b(g, e, \sigma) - \lambda$. Для этого случая утверждение теоремы справедливо.

Случай 3б невозможен в силу связности графа $g(\mu)$ в графе d.

В случае 3в число точек множества $b(g, e, \sigma) - \lambda$ при стягивании уменьшается на единицу. При этом число точек контролируемого множества μ, принадлежащих $b(g, e, \sigma)$, не изменяется. Это означает, что при стягивании не меняется множество $\lambda = L(g, e, \sigma, \mu)$. Множество $\gamma = L(g/d, \Omega (e), \sigma/d, \mu/d)$ тоже не меняется при этом стягивании, так как аргументы этой функции отличаются от аргументов функции $\lambda = L(g, e, \sigma, \mu)$ только совмещением двух точек множества $b(g, e, \sigma) - \lambda$. В этом случае утверждение теоремы тоже имеет силу. Теорема доказана.

Если в качестве стягивающего графа взять граф $d = g - \sigma$, то производимое им стягивание реализует описанную в [1] «редукцию» семантической границы к тривиальному случаю — множеству вершин, смежных с исходной вершиной. Таким образом, общее обоснование принципа семантической границы, данное в [1], оказывается следствием теоремы 3. Инвариантность операции семантической селекции относительно стягивания дополнительно подтверждает адекватность ее применения при вычислении семантических параметров.

Результатом операции семантической селекции есть некоторое множество λ вершин графа-универсума. Граф $g(\lambda)$, порожденный множеством λ в граф-контексте g, также можно рассматривать как результат операции семантической селекции. В отличие от операций объединения, пересечения и разности графов, результат $g(\lambda)$ операции семантической селекции может не быть связным в графе d, в котором связны аргументы этой операции. Простое дополнительное ограничение гарантирует связность графа $g(\lambda)$ в графе d.

Следствие теоремы 3. Если граф d, в котором связны аргументы g, $g(\sigma)$ и $g(\mu)$ функции семантической границы, не пересекается с ограничивающим множеством σ, то граф $g(\lambda)$ связен в d.

Доказательство. Выделенное подмножество семантической границы $\lambda = L(g, e, \sigma, \mu)$ есть подмножество множества σ. Поэтому множество λ не пересекается с графом d. Следовательно, граф $g(\lambda)$ связен в d.

Этот критерий можно применять в случае, когда требуется, чтобы относительно стягивания было инвариантно определение семантического параметра, выраженное не только посредством операций объединения, пересечения и разности графов, но и посредством операции семантической селекции.

Не всякое определение семантического параметра, выраженное топологически в терминах одного уровня модели, может иметь соответствие на более общем ее уровне. Определение семантического параметра может содержать такие термины (типы элементов), которые при переходе к более общему уровню «стираются» и не имеют эквивалентов на более высоком уровне обобщения. Например, если в некоторое определение семантического параметра на уровне подробной коммутационной схемы входит понятие «разъединитель», то на уровне упрощенной оперативной схемы, не содержащей разъединителей, такое определение не будет иметь прямого соответствия.

Однако всякое определение семантического параметра, выражаемое операцией семантической селекции, имеет прообраз (относительно стягивания) на любом более подробном уровне описания предметной области. Для того чтобы получить из первого определения (выраженного на более общем уровне) второе, нужно построить полные прообразы относительно стягивания всех составляющих первого определения: граф-контекста, ограничивающего множества, контролируемого множества и элемента привязки.

Лемма. Пусть d — стягивающий граф преобразования $\Omega : U \to U/d$ графа-универсума U; H — произвольный подграф графа U/d. Тогда полный прообраз графа H при отображении Ω есть граф, связный в d.

Доказательство. Пусть G — подграф графа-универсума U, являющийся полным прообразом графа H при стягивании Ω. Связность графа G в графе d означает, что любое ребро графа d либо является ребром графа G, либо не пересекается с графом G.

Для доказательства леммы допустим противное: пусть ребро x графа d не принадлежит графу G, но хотя бы один конец ребра x принадлежит графу G. Поскольку при отображении Ω ребро x стягивается, оба его конца отображаются в вершину графа H. Следовательно, оба конца ребра x принадлежат графу G, так как он является полным прообразом графа H. Поскольку ребро x соединяет две вершины полного прообраза графа H, это ребро тоже должно принадлежать полному прообразу графа H. Это противоречит сделанному выше допущению, что и доказывает лемму.

Поскольку полный прообраз граф-контекста, а также графы, порожденные полными прообразами ограничивающего и контролируемого множеств, связны в стягивающем графе, согласно теореме 3 определение, выраженное на более подробном уровне, при стягивании будет корректно (перестановочно с этим стягиванием) превращаться в определение, выраженное на более общем уровне.

Теорема 4. Пусть d — стягивающий граф преобразования $\Omega : U \to U/d$ графа-универсума U. Пусть $L(g', e', \sigma', \mu')$ — функция семантической границы в графе-универсуме $\Omega(U) = U/d$, $\mu' \subseteq \sigma'$. Пусть граф g —полный прообраз при отображении Ω графа g', вершина e графа g — любая из вершин- прообразов элемента привязки e', а множества σ и μ — полные прообразы множеств соответственно σ' и μ': $g = \Omega^{-1}(g')$, $e \in \Omega^{-1}(e')$, $\sigma = =\Omega^{-1}(\sigma')$, $\mu = \Omega^{-1}(\mu')$. Тогда функция семантической границы $L(g, e, \sigma, \mu)$ при отображении Ω преобразуется в функцию семантической границы $L(g', e', \sigma', \mu')$, так что выполняется равенство $\Omega(L(g, e, \sigma, \mu)) = L(g', e', \sigma', \mu')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения теоремы вытекает из того, что графы g, $g(\sigma)$ и $g(\mu)$ связны в d. Эти графы связны в d потому, что в силу леммы полный прообраз, относительно стягивания Ω: $U \to U/d$, любого подграфа графа U/d связен в d.

Теоремы 1— 4 отвечают на вопрос о том, какие условия обеспечивают непротиворечивость операций в многоуровневой иерархической графовой модели.

Перестановочность операции обобщения с предикатами семантической границы. На основании принципа семантической границы формализуются различные логические условия, используемые в правилах переключений в электрических сетях. Эти условия выражаются операциями логики высказываний через элементарные предикаты семантической границы [4]. Четыре элементарных предиката семантической границы выражают условия равенства либо неравенства выделенного множества семантической границы пустому множеству либо множеству всех вершин семантической границы.

Теорема 5. В условиях теоремы 3 значения четырех элементарных предикатов семантической границы, а именно: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda = b(g, e, \sigma)$, $\lambda < b(g, e, \sigma)$, где $\lambda = L(g, e, \sigma, \mu)$, и 0 — пустое множество (пустой граф), не изменяются при стягивании по графу d.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В доказательстве теоремы 3 значения четырех элементарных предикатов семантической границы не изменяются при стягивании ни в случае 3а, ни в случае 3в, так как не изменяются свойства пустоты и непустоты множеств λ и $b(g, e, \sigma) - \lambda$.

Теорема доказана.

В теореме 5, устанавливающей инвариантность при стягивании свойств пустоты и непустоты множеств λ и $b(g, e, \sigma) - \lambda$, ничего не сказано о том, сохраняется ли при стягивании число элементов этих множеств. Существуют определения семантических параметров, в которых существенны не только свойства пустоты или непустоты множеств λ и $b(g, e, \sigma) - \lambda$, но и число элементов этих множеств. Условия инвариантности этих чисел при стягивании нетрудно получить из доказательства теоремы 3.

Число элементов множества M обозначим через $|M|$. Из доказательства теоремы 3 видно, что число $|\lambda|$ изменяется только в том случае, когда до стягивания хотя бы две точки выделенного подмножества семантической границы λ принадлежали одной связной компоненте стягивающего графа d. Из того же доказательства видно, что $|b(g, e, \sigma) - \lambda|$ изменяется только в том случае, когда до стягивания хотя бы две точки множества $b(g, e, \sigma) - \lambda$ принадлежали одной связной компоненте стягивающего графа d.

Примеры верификации соответствий при операциях на разных уровнях модели электросети. Установленные критерии непротиворечивости операций в многоуровневых иерархических графовых моделях рассмотрим на примерах запросов и переключений в моделях электрических сетей.

В качестве модели первичных цепей используем графовую модель *Prim*, описанную в [4—6]. Она образована объединением двух графов: графа соединений многополюсников первичных устройств *Net* и графа-классификатора свойств и состояний устройств *Class*. Граф *Prim* является графом-универсумом. Он описывает структуру электрической сети и состояние переключаемых устройств.

Пример 1. ***Переключения выключателя при удалении смежных с ним разъединителей.*** Рассмотрим инвариантность относительно обобщения операций переключения, выражаемых через объединение и разность графов.

Одним из типовых фрагментов, часто встречающихся в подробных коммутационных схемах, является цепь из трех последовательно соединенных устройств: разъединитель — выключатель — разъединитель. Разъединители в этой тройке называются разъединителями выключателя. Согласно технологии переключений, положение разъединителя выключателя («включен» или «отключен») должно, как правило, совпадать с положением выключателя. Отступления от этого правила допускаются только кратковременные в ходе выполнения переключений, а также в некоторых особых случаях.

Ограничимся основным случаем и будем считать, что положение обоих разъединителей одного выключателя всегда дублирует положение выключателя. Тогда изображение разъединителей выключателя на схеме становится излишним. Удаление их является одним из шагов по преобразованию подробной коммутационной схемы в оперативную. Рассмотрим соответствие операций переключения выключателей между подробной коммутационной схемой и схемой, которая получается из нее удалением разъединителей выключателя.

Удаление разъединителей выключателя в подробной схеме состоит в том, что двухполюсник каждого такого разъединителя стягивается в точку, а перед этим удаляются все ребра графа-классификатора *Class*, которые соединяют центральную вершину этого двухполюсника с вершинами графа *Class*, представляющими типы и состояния устройств.

Операция отключения выключателя в модели подробной схемы выполняется следующим образом. В графе-классификаторе *Class* удаляется ребро x, соединяющее вершину *br*, представляющую этот выключатель, с вершиной *On*, представляющей в графе-классификаторе состояние «включено». Затем добавляется ребро y, соединяющее вершину *br* с вершиной *Off*, представляющей в графе-классификаторе состояние «отключено». Операция включения состоит в удалении второго ребра и добавлении первого.

Операции отключения и включения выключателя перестановочны с операциями удаления разъединителей любого выключателя (не только переключаемого). Это почти очевидно из рассмотрения графа *Prim*, поскольку в нем переключение любого выключателя означает преобразование подграфа, не пересекающегося с подграфом, преобразуемым при удалении любого разъединителя. Более строгое рассуждение состоит в следующем.

Удаление ребра x означает его вычитание 2-го рода из полного графа модели первичных цепей $Prim = Net + Class$, поскольку концы ребра не подлежат удалению: $Prim \ominus x$.

Добавление ребра y означает его объединение с полученной разностью: $Prim \ominus x + y$. Эта формула выражает операцию отключения выключателя.

Выберем любой разъединитель и обозначим центральную вершину его двухполюсника через *isol*. Объединение всех ребер (как графов), соединяющих вершину *isol* с вершинами графа *Class*, представляющими типы и состояния, обозначим через *IsolAttr*. Граф *IsolAttr* вычисляется по формуле $IsolAttr = isol * Class$.

Операция переключения выключателя перестановочна с операцией удаления всех ребер графа *IsolAttr* любого разъединителя (не только разъединителя переключаемого выключателя). Это следует из того, что ребра x и y не инцидентны графу *IsolAttr*, поэтому удаление и добавление ребер x и y в графе-универсуме можно произвольно чередовать с удалением ребер графа *IsolAttr*.

Обозначим через *IsolG* граф-двухполюсник, представляющий какой-либо разъединитель выключателя. Граф *Prim* как граф-универсум, связен в графе *IsolG*. Граф x (ребро как граф) связен в графе *IsolG*, так как эти два графа не пересекаются. По той же причине граф y связен в графе *IsolG*.

Граф $Prim \ominus x$ связен в графе $IsolG$, так как граф $Prim$ содержит граф $IsolG$, а ребро x не инцидентно графу $IsolG$. Согласно теореме 2 получаем

$$(Prim \ominus x + y)/IsolG = (Prim \ominus x)/IsolG + y/IsolG =$$

$$= Prim/IsolG \ominus x/IsolG + y/IsolG .$$

Следовательно, операция переключения выключателя $Prim \ominus x + y$ перестановочна со стягиванием по графу $IsolG$. Эта операция перестановочна также с удалением всех ребер графа $IsolAttr$.

Таким образом, доказана перестановочность отключения любого выключателя с удалением из схемы любого разъединителя. Точно так же доказывается перестановочность операции включения любого выключателя с удалением из схемы разъединителя. При этом не используется свойство разъединителя быть разъединителем выключателя. Оно существенно для того, чтобы при удалении разъединителя не нарушались отношения электрической связности между элементами схемы. При удалении разъединителя выключателя сохранение отношений электрической связности в модели гарантируется, если положение этого разъединителя предполагается всегда совпадающим с положением смежного выключателя.

Пример 2. ***Определение нарушения транзита.*** Рассмотрим инвариантность операции семантической селекции относительно обобщения.

В [4, пример 6] рассмотрено определение нарушения транзита на уровне подробной коммутационной схемы. Аналогичное определение можно сформулировать на уровне схемы узлов и ветвей для расчета режима.

Сначала рассмотрим случай, когда линии, входящие на данную подстанцию, не имеют параллельных. Тогда нарушением транзита между двумя линиями одного класса напряжения, входящими на одну подстанцию, считается отсутствие на данной подстанции электрической связи между этими линиями через устройства того же класса напряжения (шины и коммутационные аппараты). Обычно речь идет о классе напряжения, высшем для данной подстанции, и предполагается, что распределительное устройство этого класса напряжения на подстанции единственно.

На подстанции выбирается какая-либо линия $line$ и определяется множество M_1 линий того же класса напряжения, входящих на распределительное устройство, к которому присоединена линия $line$. Определяется также подмножество M_2 множества M_1, образованное линиями, электрически связанными при текущих коммутациях с линией $line$ через данное распределительное устройство.

Можества M_1 и M_2 определяются с помощью функции семантической границы. На уровне подробной коммутационной схемы для определения множества M_1 задается граф-контекст Net, исходный элемент — заданная линия L, ограничивающее множество σ_1 — вершины всех трансформаторов и всех линий, контролируемое множество μ — вершины всех линий. Тогда

$$M_1 = line\,(Net, L, \sigma_1, \mu)\,. \qquad (6)$$

Для определения множества M_2 задаются все те же самые значения аргументов функции семантической границы, только к ограничивающему множеству σ_1 добавляются вершины всех отключенных коммутационных аппаратов. Это ограничивающее множество обозначим через σ_2. Тогда

$$M_2 = line\,(Net, L, \sigma_2, \mu)\,. \qquad (7)$$

По линии *line* транзит через данную подстанцию нарушен тогда и только тогда, когда разность $M_1 - M_2$ есть непустое множество: $M_1 - M_2 > 0$. Эта разность есть множество тех линий (одного класса напряжения с линией *line*), для которых отсутствует транзит с линией *line* через данную подстанцию.

Если линия *line* имеет параллельную линию *line*′, то последняя должна быть исключена из множества $M_1 - M_2$, если она в него попала, т. е. если между линиями *line* и *line*′ отсутствует электрическая связь на данной подстанции через устройства того же класса напряжения. Вычисление параллельных линий посредством функции семантической границы рассматривается в [4, пример 7].

Преобразование подробной коммутационной схемы в схему узлов и ветвей для расчета режима осуществляется стягиванием графа подробной схемы [6]. Затем полученный граф подвергается дополнительным преобразованиям для приведения его в соответствие с принятым стандартом представления режимных схем [7]. Основой преобразования является стягивание. Стягиванию подлежат многополюсники всех секций шин и всех включенных коммутационных аппаратов в графе *Net*.

Ограничим преобразование подробной коммутационной схемы в режимную только этим стягиванием. Дополнительные преобразования выполнять не будем, чтобы не отвлекаться на несущественные технические подробности. Обозначим граф, полученный описанным стягиванием, через *Flow*.

При стягивании первый аргумент *Net* функций (6) и (7) преобразуется в *Flow*. Второй аргумент *line* не изменяется: он не пересекается со стягивающим графом. Аргументы σ_1, σ_2 и μ не изменяются по той же причине. На уровне графа *Flow* для множества N_1 входящих на даное распределительное устройство линий класса напряжения, одинакового с линией *line*, получаем формулу

$$N_1 = line\,(Flow, L, \sigma_1, \mu)\,, \qquad (8)$$

а для множества N_2 всех линий, электрически связанных при текущих коммутациях с линией *line* через данное устройство, — формулу

$$N_2 = line\,(Flow, L, \sigma_2, \mu). \tag{9}$$

Проверим корректность этого преобразования. Стягивающий граф d есть объединение многополюсников всех секций шин и всех включенных коммутационных аппаратов. Граф d есть подграф графа *Net*, поэтому граф *Net* связен в d. Графы $Net(\sigma_1)$, $Net(\sigma_2)$ и $Net(\mu)$ связны в d, так как множества σ_1, σ_2, и μ не пересекаются с d. Поэтому к функциям семантической границы (6) и (7) при стягивании по d применима теорема 3. Она удостоверяет корректность соответствия между определениями (6) и (8), (7) и (9), выражаемую формулами $N_1 = M_1/d$, $N_2 = M_2/d$. Поскольку множества вершин линий M_1 и M_2 не пересекаются со стягивающим графом d, получаем равенства $N_1 = M_1$, $N_2 = M_2$. Отсюда $N_1 - N_2 = M_1 - M_2$.

Пример 3. ***Определение числа присоединений трансформатора, указанных на схеме.*** В данном случае при рассмотрении инвариантности операции семантической селекции относительно обобщения обеспечивается не только соответствие множеств, являющихся значениями функции семантической границы, но и сохраняется число элементов этого множества.

В подробных коммутационных схемах силовые двух- и трехобмоточные трансформаторы изображаются соответственно с двумя и тремя присоединениями. Трансформаторы собственных нужд изображаются (когда схема собственных нужд не представлена) с одним присоединением со стороны высшего напряжения. Автоматическое распознавание числа присоединений трансформатора, имеющихся в модели, осуществляется перед применением правил переключений для определения типа трансформатора и его роли в схеме. Число присоединений трансформатора может быть определено по чертежу коммутационной схемы или на уровне графа подробной коммутационной схемы.

В тренажерах оперативных переключений типа ОПТИМЭС и КОРВИН [8, 9] используется формат представления схем, называемый символьным [10]. Изображение схемы в этом формате складывается как мозаика из прямоугольных графических элементов одинакового размера, представляющих собой графические примитивы. Множество таких прямоугольных элементов — символов — образует алфавит двумерного языка чертежей коммутационных схем. Мозаичное представление схем удобно тем, что позволяет рисовать схемы с помощью клавиатуры аналогично печатанию текста при вспомогательной роли мыши. Это существенно повышает скорость рисования.

В мозаике символов каждый значимый (непустой) символ соединяется с каждым смежным значимым символом, т.е. с имеющим общую с ним сторону. Один символ может иметь от одного до четырех смежных значимых символов. Математически система всех этих соединений каждого мозаичного чертежа описывается неориентированным графом. Вершины графа представляют значимые символы мозаики, ребра графа — соединения смежных значимых символов. Обозначим этот граф через *Mos*.

Построим на уровне мозаичного чертежа определение числа присоединений трансформатора на основе принципа семантической границы. В качестве графа-контекста примем граф мозаики *Mos*. Определение множества символов любого заданного типа строится с помощью соответствующего графа-классификатора символов. Пусть *e* — вершина графа мозаики, представляющая трансформатор. Символ трансформатора может непосредственно соединяться с символами коммутационных аппаратов или соединительных линий. Примем в качестве ограничивающего множества σ множество всех вхождений символов коммутационных аппаратов и соединительных линий. Это же множество примем в качестве контролируемого μ: $\mu = \sigma$. Тогда значением функции семантической границы $\lambda_1 = L(Mos, e, \sigma, \sigma)$ будет множество присоединений трансформатора *e*, а число элементов этого множества будет равно числу присоединений трансформатора *e*.

Некоторым стягиванием граф мозаичного чертежа *Mos* преобразуется в граф соединений элементов подробной коммутационной схемы *Net*. Основное стягивание состоит в замене цепочки символов каждой соединительной линии одним ребром графа коммутационной схемы, представляющим эту соединительную линию. Стягиваются также группы символов, изображающие одно устройство, например секцию шин или трансформатор. Ограничимся рассмотрением стягивания цепочек символов соединительных линий.

Стягивающий граф *d* в этом случае образован объединением (как графов) всех тех и только тех ребер графа *Mos*, оба конца которых представляют символы соединительных линий. Символ *e* трансформатора преобразуется в вершину e' многополюсника, представляющего в подробной коммутационной схеме трансформатор. Ограничивающее множество σ преобразуется в множество σ', являющееся объединением всех соединительных вершин многополюсников в графе *Net* и всех центральных вершин многополюсников коммутационных аппаратов. Это же множество будет контролируемым множеством. Получаем функцию семантической границы $\lambda_2 = L\ (Net, e', \sigma', \sigma')$, представляющую множество присоединений трансформатора на уровне подробной коммутационной схемы. Аргумент σ' в этой функции равен $Conn + ComSet$, где *Conn* — множество всех вершин соединения многополюсников в графе *Net*, вычисляемое по формуле $Conn = Net - Class$, так как каждая вершина графа *Net*, представляющая элемент схемы (центральная вершина соответствующего многополюсника) соединена хотя бы с одной вершиной графа *Class*, представляющей тип элемента. Множество центральных вершин многополюсников всех коммутационных аппаратов *ComSet* вычисляется методом, описанным в [4, пример 1].

Проверим, является ли при рассматриваемом стягивании корректным преобразование первого определения семантического параметра $\lambda_1 = L(Mos, e, \sigma, \sigma)$ во второе $\lambda_2 = L(Net, e', \sigma', \sigma')$. Теорема 3, удостоверяющая инвариантность функции семантической границы относительно стягивания, будет в этой ситуации применима, если графы $g = Mos$, $Mos(\sigma)$ и $Mos(\mu)$ связны в d.

Граф Mos связен в d, потому что граф d есть подграф графа Mos. Граф d является подграфом графа $Mos(\sigma)$, так как все вершины графа d (символы соединительных линий) являются вершинами графа $Mos(\sigma)$ и все ребра графа d являются ребрами графа $Mos(\sigma)$. Поэтому граф $Mos(\sigma)$ связен в d. Поскольку $\mu = \sigma$, справедливо равенство $Mos(\mu) = Mos(\sigma)$, поэтому граф $Mos(\mu)$ связен в d.

Таким образом, условия теоремы 3 выполнены. Этим удостоверяется корректность соответствия определений числа обмоток трансформатора, сформулированных на уровне мозаичного чертежа и на уровне подробной коммутационной схемы. Это соответствие выражается равенством $\lambda_2 = \lambda_1/d$.

Вершины выделенного множества семантической границы λ_1, представляющие символы соединительных линий, принадлежат стягивающему графу d. Но поскольку каждая связная компонента стягивающего графа содержит не более одной вершины множества λ_1, при стягивании число элементов этого множества не изменяется. Поэтому число присоединений трансформатора $|\lambda_1|$ и $|\lambda_2|$ на двух разных уровнях модели получается одинаковым.

Выводы. 1. Автоматизация обобщения информации в системах диспетчерского управления электроэнергетики требует применения специальных математических методов.

2. Замена реляционной модели графовой моделью позволяет свести логический анализ системы отношений между элементами дискретной модели к анализу топологии графов.

3. В графовой модели логическая операция абстрагирования формализуется как переход от графа модели к его подграфу, логическая операция обобщения — как стягивание графа модели по подграфу.

4. Принцип семантической границы, как принцип анализа топологии графовых моделей, обосновывается его редукцией посредством формализованных операций абстрагирования и обобщения к просмотру состава множества вершин графа, смежных с исходной вершиной.

5. Для формулировки условий непротиворечивости операций в многоуровневых графовых моделях следует использовать понятие относительной связности графов. Для сохранения отношений связности между элементами модели при ее стягивании необходимо и достаточно, чтобы подграфы, представляющие эти отношения, были связны в стягивающем графе.

6. Установлена связь понятия относительной связности графов с понятием сильного гомоморфизма графов. Стягивающий граф обобщающего преобразования графа-универсума является ядром сильных гомоморфизмов, индуцированных этим стягиванием, для всех подграфов графа-универсума, связных в стягивающем графе, и только для таких подграфов.

7. Понятие сильного гомоморфизма графов является адекватной формализацией операции обобщения, преобразующей любой (кроме самого верхнего) уровень иерархической графовой модели в вышестоящий уровень с сохранением отношений связности.

8. Условия, гарантирующие непротиворечивость операций в многоуровневой иерархической графовой модели, следующие:

сильный гомоморфизм графов является гомоморфизмом алгебры графов (с операциями объединения, пересечения и разности), связных в ядре этого гомоморфизма, что означает инвариантность операций объединения, пересечения и разности графов относительно операции обобщения;

операция семантической селекции инвариантна относительно операции обобщения — стягивания графов, если это стягивание является сильным гомоморфизмом графов — операндов семантической селекции.

9. Инвариантность операции семантической селекции относительно операции обобщения подтверждает адекватность принципа семантической границы для определения семантических параметров в графовых моделях.

Graphs of discrete multilevel models are considered. Sufficient conditions of operation consistency in multilevel hierarchical graph models are determined. Theoretical results are used for testing information queries and switching operation consistency in the discrete multilevel models of electric networks. Some examples of information queries and switching operations in multilevel model of electric network are given which verify the possibility of the above theorems application.

1. *Головинский И. А.* Непротиворечивость операций в многоуровневых дискретных моделях электрических сетей. I//Электрон. моделирование. — 2006. — **28**, № 6.— С. 31— 48.
2. *Лекции* по теории графов/Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. —М. : Наука, 1990. — 384 с.
3. *Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. — СПб. : БХВ-Петербург, 2003. — 1104 с.
4. *Головинский И. А.* Вычисление семантических параметров моделей электросетей: принцип семантической границы//Изв. РАН. Энергетика. — 2005. — № 2. — С. 27— 42.

5. *Головинский И. А.* Объектно-ориентированный подход к разработке программ анализа коммутационных схем электрических сетей//Там же. — 2001. — № 2. — С. 46—56.
6. *Головинский И. А.* Интеграция коммутационной и режимной моделей электрической сети в тренажере оперативных переключений//Там же. — 2003. — № 4. — С. 143— 155.
7. *Окин А. А., Портной М. Г., Шелухин М. М.* Унифицированный состав и структура информации, используемые в системе диспетчерского управления при решении электрических задач//Электричество. — 1997. — № 6. — С. 2—7.
8. *Головинский И. А., Куклев В. И.* Универсальные тренажеры оперативных переключений//Электрические станции. — 2001. — № 11. — С. 2—8.
9. *Головинский И. А., Любарский Ю. Я., Моржин Ю. И.* Противоаварийные тренировки на тренажере оперативных переключений с контролем стационарных режимов//Там же. — 2004. — № 9. — С. 47—56.
10. *Головинский И. А.* Понимание компьютером электрических схем // Вестник ВНИИЭ-2000. — М. : ЭНАС, 2000. — С. 162—168.

Поступила 28.12.05;
после доработки 10.04.06

ГОЛОВИНСКИЙ Илья Абрамович, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Открытого акционерного общества «Всесоюзный научно-исследовательский ин-т электроэнергетики». В 1973 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — автоматизация управления переключениями в электрических сетях.