
УДК 519.859

Л. Г. Евсеева, канд. физ.-мат. наук
Полтавский университет потребительской кооперации Украины
(Украина, 36014, Полтава, ул. Ковалю, 3,
тел.: (0532) 668286, E-mail: yevseeva@satel.com.ua),

О. В. Панкратов, канд. техн. наук
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(Украина, 61046, Харьков, ул. Пожарского, 2/10,
тел.: (0572) 959536, E-mail: pankratov@ipmach.kharkov.ua)

Задача упаковки интервальных параллелепипедов

Построена интервальная математическая модель оптимизационной задачи упаковки интервальных параллелепипедов. Осуществлен переход к двухкритериальной задаче в евклидовом пространстве. Предложена стратегия решения, основанная на использовании метода оптимизации по группам переменных и модифицированного метода сужающихся окрестностей.

Побудовано інтервальну математичну модель оптимізаційної задачі упакування інтервальних паралелепіпедів. Здійснено перехід до двохкритеріальної задачі в евклідовому просторі. Запропоновано стратегію розв'язання, яка базується на використанні методу оптимізації за групами змінних і модифікованого методу околів, що звужуються.

К л ю ч е в ы е с л о в а: интервальный параллелепипед, интервальное Φ -отображение, интервальная математическая модель, двухкритериальная оптимизационная задача, стратегия решения.

Задачи упаковки параллелепипедов 3DBP (3D Bin Packing) принадлежат классу задач геометрического проектирования [1] и занимают особое место в классе задач Cutting & Packing (3D C&P) [2], что обусловлено их актуальностью и широким спектром приложений. В работе [2] указаны наиболее известные подходы к решению задач трехмерной упаковки, а именно подходы, основанные на генетическом алгоритме, алгоритме «имитационного обжига», использовании различных эвристических подходов. Большинство современных методик решения данного класса задач являются эвристическими (см., например, [3, 4]) и рассматриваются в контексте конкретного практического применения задачи. Поэтому полученные решения, в общем случае, представляют собой лишь некоторые приближения к оптимальным.

Эффективные методы решения оптимизационных задач размещения разработаны научной школой Ю.Г. Стояна [1, 5, 6]: модификации методов локальной и глобальной оптимизации. Однако, как правило, математи-

ческое моделирование и решение задач размещения осуществлялось без учета погрешностей исходных данных, т. е. в идеализированной форме. Развитие геометрического проектирования как научного направления требует учета погрешностей для построения адекватных математических моделей оптимизационных задач размещения и разработки методов их решения.

В рамках развития концепции учета погрешностей при моделировании и решении задач размещения геометрических объектов предлагается подход к учету погрешностей на основе использования приложения интервального анализа [7] в геометрическом проектировании [1], интервальной геометрии [8]. Применение при моделировании оптимизационной задачи таких понятий интервальной геометрии, как интервальная гиперплоскость, интервальный параллелепипед, интервальное касание геометрических объектов, интервальное расстояние между выпуклыми интервальными многогранниками, интервальное направленное множество, дает возможность, с одной стороны, рациональным образом учитывать погрешности исходных данных, а с другой, — представить математическую модель задачи в виде, позволяющем реализовать ее современными эффективными методами оптимизации.

Постановка задачи. Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в такой постановке. Пусть в евклидовом пространстве R^3 имеется конечное множество параллелепипедов P_i с метрическими характеристиками

$$m_i^v = 2(a_i \pm v_{a_i}, b_i \pm v_{b_i}, c_i \pm v_{c_i}), \quad (1)$$

$$a_i \in R^+, v_{a_i} \in R^+, b_i \in R^+, v_{b_i} \in R^+, c_i \in R^+, v_{c_i} \in R^+, \quad (2)$$

$$a_0 \geq a_i, b_0 \geq b_i, c_0 \geq c_i,$$

$$v_{a_i} < \varepsilon a_i, v_{b_i} < \varepsilon b_i, v_{c_i} < \varepsilon c_i, \varepsilon \in (0,1) \subset R^1, i \in \{0\} \cup J_n,$$

где $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — индексное множество. Значение ε зависит от конкретного смысла прикладной или научной задачи и характеризует точность задания исходных данных.

В данном исследовании для упаковки параллелепипедов $P_i, i \in J_n$, в параллелепипед P_0 используется трансляция P_i на векторы:

$$u_i \pm v_{u_i} = (x_i \pm v_{x_i}, y_i \pm v_{y_i}, z_i \pm v_{z_i}) \in R^3, \quad (3)$$

где $v_{x_i} \in R^1, v_{y_i} \in R^1, v_{z_i} \in R^1$. Параллелепипед P_i с параметрами размещения (3) обозначим $P_i(u_i \pm v_{u_i})$.

Задача. Необходимо найти вектор параметров размещения $u \pm v_u = (u_1 \pm v_{u_1}, u_2 \pm v_{u_2}, u_n \pm v_{u_n}) \in R^{3n}$ такой, чтобы параллелепипеды $P_i(u_i \pm v_{u_i})$, $i \in J_n$, принадлежали $P_0(u_0 \pm v_{u_0})$ без взаимных пересечений и чтобы при этом высота h^* занятой части параллелепипеда $P_0(u_0 \pm v_{u_0})$ и ее погрешность v_h^* достигали минимальных значений.

Очевидно, задание метрических характеристик объектов в виде (1), (2), а параметров размещения в виде (3) позволяет естественным образом создать пары вида $(\alpha, v_\alpha) \in R^2$, характеризующие некоторую величину $\alpha \in R^1$ и погрешность $v_\alpha \in R^1$ задания этой величины. Тогда вещественное число α с учетом погрешности его задания можно представить двумя числами — оценкой снизу и оценкой сверху, образующими интервальное число $\langle \alpha, v_\alpha \rangle = \langle A \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, где $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — расширенное пространство центрированных интервалов [8].

Интервальная математическая модель. На основе гомеоморфизма [8] пространств $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ и R^2 зададим биекцию между исходными данными и элементами пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} R^2 \ni (a_i, v_{a_i}) &\leftrightarrow \langle a_i, v_{a_i} \rangle = \langle A_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, R^2 \ni (b_i, v_{b_i}) \leftrightarrow \langle b_i, v_{b_i} \rangle = \langle B_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \\ R^2 \ni (c_i, v_{c_i}) &\leftrightarrow \langle c_i, v_{c_i} \rangle = \langle C_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, R^2 \ni (a_x, v_{a_x}) \leftrightarrow \langle a_x, v_{a_x} \rangle = \langle X_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \\ R^2 \ni (y_i, v_{y_i}) &\leftrightarrow \langle y_i, v_{y_i} \rangle = \langle Y_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, R^2 \ni (z_i, v_{z_i}) \leftrightarrow \langle z_i, v_{z_i} \rangle = \langle Z_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \\ &i \in \{0\} \cup J_n. \end{aligned}$$

Тогда условию (2) соответствуют интервальные неравенства [8] вида

$$\begin{aligned} \langle A_i \rangle \geq 0, \langle B_i \rangle \geq 0, \langle C_i \rangle \geq 0, i \in \{0\} \cup J_n, 0 = \langle 0, 0 \rangle, \\ \langle A_0 \rangle = \langle A_i \rangle, \langle B_0 \rangle = \langle B_i \rangle, \langle C_0 \rangle = \langle C_i \rangle, i \in J_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим интервальное отображение [8] $\mathbf{f} : \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ вида

$$\mathbf{f}(U_i) = \max_{k=1,2,\dots,6} \{\mathbf{f}_i^k(U_i)\}, i \in \{0\} \cup J_n. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^1(U_i) &= (\langle X \rangle - \langle \bar{X}_i \rangle) - \langle \bar{A}_i \rangle, \mathbf{f}_i^2(U_i) = -(\langle X \rangle - \langle \bar{X}_i \rangle) - \langle \bar{A}_i \rangle, \\ \mathbf{f}_i^3(U_i) &= (\langle Y \rangle - \langle \bar{Y}_i \rangle) - \langle \bar{B}_i \rangle, \mathbf{f}_i^4(U_i) = -(\langle Y \rangle - \langle \bar{Y}_i \rangle) - \langle \bar{B}_i \rangle, \\ \mathbf{f}_i^5(U_i) &= (\langle Z \rangle - \langle \bar{Z}_i \rangle) - \langle \bar{C}_i \rangle, \mathbf{f}_i^6(U_i) = -(\langle Z \rangle - \langle \bar{Z}_i \rangle) - \langle \bar{C}_i \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где $U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$; $\langle \bar{X} \rangle = \langle x, v_x \rangle = \langle x, -v_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ — элемент, сопряженный элементу $\langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [9].

Максимум в (4) здесь и далее понимаем так:

$$\langle X^* \rangle = \langle x^*, v_x^* \rangle = \langle X_j \rangle = \max \{ \langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle \}, j \in J_n.$$

Отсюда с учетом отношения линейного порядка в $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [8] получаем

$$\langle X^* \rangle = \begin{cases} \langle x^* = x_j = \max_{i=1,2,\dots,n} \{x_i\}, v_x^* = v_{x_j} \rangle, x_i \neq x_j, i \neq j, i \in J_n, \\ \langle x^* = x_j, v_x^* = v_{x_j} = \max_{i=1,2,\dots,n} \{v_{x_i}\} \rangle, x_1 = x_2 = \dots = x_n = x^*, \\ \langle x^* = x_j, v_x^* = v_{x_j} = \max_{i=1,2,\dots,m} \{v_{x_{i_t}}\} \rangle, x_{i_1} = \dots = x_{i_m} = x^*, i_t \in J_n, m \leq n. \end{cases}$$

Интервальным параллелепипедом $\mathbf{P}_i \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ с центром собственной системы координат $U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle)$ называется точечное интервальное множество вида

$$\mathbf{P}_i(U_i) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$\mathbf{P}_i(U_i) = \text{int } \mathbf{P}_i(U_i) \cup \text{fr } \mathbf{P}_i(U_i), i \in \{0\} \cup J_n,$$

интервальная граница $\text{fr } \mathbf{P}_i(U_i)$ которого определяется уравнением $\mathbf{f}(U_i) = \mathbf{0}, \mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$. При этом $\mathbf{f}_i^k(U_i) = \mathbf{0}, k \in J_6$ являются уравнениями интервальных гиперплоскостей [8], принимающими участие в формировании $\text{fr } \mathbf{P}_i(U_i)$.

Исходя из биекции между исходными данными и элементами $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ с учетом (3) интервальное направленное множество [9]

$$U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R},$$

$$\langle X_i \rangle = \langle x_i, v_{x_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \langle Y_i \rangle = \langle y_i, v_{y_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$\langle Z_i \rangle = \langle z_i, v_{z_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, i \in \{0\} \cup J_n,$$

назовем интервальными параметрами размещения интервального объекта \mathbf{P}_i . Объект \mathbf{P}_i , транслируемый на интервальное направленное множество U_i , обозначим $\mathbf{P}_i(U_i)$. Тогда оптимизационную задачу размещения объектов $\mathbf{P}_i(U_i)$, метрические характеристики (1), (2) и параметры размещения (3) которых заданы с некоторыми погрешностями, можно представить как оптимизационную задачу размещения интервальных параллелепипедов

$$\mathbf{P}_i(U_i) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}, i \in J_n,$$

в интервальной области $\mathbf{P}_0(U_0) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Математическую модель оптимизационной задачи размещения интервальных параллелепипедов в интервальный параллелепипед назовем интервальной математической моделью задачи 3DBIP (3D Bin Interval Packing). Для аналитического описания взаимодействия объектов трехмерного интервального пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ на основе определения Φ -функции пары объектов евклидова пространства [10] введено понятие интервального Φ -отображения пар объектов интервального пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Интервальное отображение [8] $\Phi: \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ называется интервальным Φ -отображением объектов $\mathbf{T}_1(U_1) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}_2(U_2) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \Phi(U_1, U_2) &> \mathbf{0}, \text{ если } \mathbf{T}_1(U_1) \cap \mathbf{T}_2(U_2) = \emptyset, \\ \Phi(U_1, U_2) &= \mathbf{0}, \text{ если } \begin{cases} \text{int}\mathbf{T}_1(U_1) \cap \text{int}\mathbf{T}_2(U_2) = \emptyset, \\ \text{fr}\mathbf{T}_1(U_1) \cap \text{fr}\mathbf{T}_2(U_2) = \emptyset, \end{cases} \\ \Phi(U_1, U_2) &< \mathbf{0}, \text{ если } \text{int}\mathbf{T}_1(U_1) \cap \text{int}\mathbf{T}_2(U_2) = \emptyset. \end{aligned}$$

Понятие интервального Φ -отображения позволяет сформулировать задачу размещения интервальных объектов как задачу математического программирования. Условием размещения интервального объекта $\mathbf{P}_i(U_i)$, $i \in J_n$, в интервальной области $\mathbf{P}_0(U_0)$ есть выполнение интервального неравенства

$$\Phi_{0i}(U_0, U_i) \geq \mathbf{0}.$$

Здесь

$$\Phi_{0i}(U_0, U_i) = \min_{k=1,2,\dots,6} \{ \mathbf{f}_{0i}^k(U_0, U_i) \}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{0i}^1(U_0, U_i) &= -(\langle X_i \rangle - \langle \bar{X}_0 \rangle) + \langle A \rangle + \langle v_{a_0} - v_{a_i}, v_{a_0} - v_{a_i} \rangle, \\ \mathbf{f}_{0i}^2(U_0, U_i) &= \langle X_i \rangle - \langle \bar{X}_0 \rangle + \langle A \rangle + \langle -v_{a_0} - v_{a_i}, v_{a_0} - v_{a_i} \rangle, \\ \mathbf{f}_{0i}^3(U_0, U_i) &= -(\langle Y_i \rangle - \langle \bar{Y}_0 \rangle) + \langle -v_{b_0} - v_{b_i}, v_{b_0} - v_{b_i} \rangle, \\ \mathbf{f}_{0i}^4(U_0, U_i) &= \langle Y_i \rangle - \langle \bar{Y}_0 \rangle + \langle B \rangle + \langle -v_{b_0} - v_{b_i}, v_{b_0} - v_{b_i} \rangle, \\ \mathbf{f}_{0i}^5(U_0, U_i) &= -(\langle Z_i \rangle - \langle \bar{Z}_0 \rangle) + \langle B \rangle + \langle -v_{c_0} - v_{c_i}, v_{c_0} - v_{c_i} \rangle, \\ \mathbf{f}_{0i}^6(U_0, U_i) &= \langle Z_i \rangle - \langle \bar{Z}_0 \rangle + \langle C \rangle + \langle -v_{c_0} - v_{c_i}, v_{c_0} - v_{c_i} \rangle, \\ \langle A \rangle &= \langle A_0 \rangle - \langle A_i \rangle, \langle B \rangle = \langle B_0 \rangle - \langle B_i \rangle, \langle C \rangle = \langle C_0 \rangle - \langle C_i \rangle, \end{aligned}$$

$\Phi_{0i}(U_0, U_i)$, $i \in J_n$, — интервальное Φ -отображение объектов $\mathbf{P}_i(U_i)$ и $\mathbf{P}_0^*(U_0)$.

Условием непересечения интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i(U_i)$ и $\mathbf{P}_j(U_j)$, $i \in J_n, j \in J_n, i < j$, есть выполнение интервального неравенства

$$\Phi_{ij}(U_i, U_j) \geq \mathbf{0}.$$

Здесь

$$\Phi_{ij}(U_i, U_j) = \max_{k=1,2,\dots,6} \{ \mathbf{f}_{ij}^k(U_i, U_j) \}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ij}^1(U_i, U_j) &= \langle X_j \rangle - \langle X_i \rangle - \langle A' \rangle - \langle v_{a_i} - v_{a_j}, v_{a_i} - v_{a_j} \rangle, \\ \mathbf{f}_{ij}^2(U_i, U_j) &= -(\langle X_j \rangle - \langle X_i \rangle) - \langle A' \rangle - \langle v_{a_i} + v_{a_j}, v_{a_i} - v_{a_j} \rangle, \\ \mathbf{f}_{ij}^3(U_i, U_j) &= \langle Y_j \rangle - \langle Y_i \rangle - \langle B' \rangle - \langle v_{b_i} + v_{b_j}, v_{b_i} - v_{b_j} \rangle, \\ \mathbf{f}_{ij}^4(U_i, U_j) &= -(\langle Y_j \rangle - \langle Y_i \rangle) - \langle B' \rangle - \langle v_{b_i} + v_{b_j}, v_{b_i} - v_{b_j} \rangle, \\ \mathbf{f}_{ij}^5(U_i, U_j) &= \langle Z_j \rangle - \langle Z_i \rangle - \langle C' \rangle - \langle v_{c_i} + v_{c_j}, v_{c_i} - v_{c_j} \rangle, \\ \mathbf{f}_{ij}^6(U_i, U_j) &= -(\langle Z_j \rangle - \langle Z_i \rangle) - \langle C' \rangle - \langle v_{c_i} + v_{c_j}, v_{c_i} - v_{c_j} \rangle, \\ \langle A' \rangle &= \langle A_i \rangle + \langle A_j \rangle, \langle B' \rangle = \langle B_i \rangle + \langle B_j \rangle, \langle C' \rangle = \langle C_i \rangle + \langle C_j \rangle, \end{aligned}$$

$\Phi_{ij}(U_i, U_j)$ — интервальное Φ -отображение пары объектов $\mathbf{P}_i(U_i)$ и $\mathbf{P}_j(U_j)$; $\langle X_j \rangle - \langle X_i \rangle$, $\langle Y_j \rangle - \langle Y_i \rangle$, $\langle Z_j \rangle - \langle Z_i \rangle$ — координаты интервального направленного множества $U_{ij} = U_j - U_i$, $U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle)$, $i < j, \forall i, j \in J_n$.

В соответствии с постановкой задачи, на основании гомеоморфизма пространств $\mathbf{I}_s \mathbf{R}$ [8] и R^2 , за интервальное целевое отображение принимаем «интервальную высоту» $\langle H \rangle = \langle h, v_h \rangle$ занятой части интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_0(U_0)$ как результат размещения в нем интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i(U_i)$, $i \in J_n$. Очевидно,

$$\langle H \rangle = \max_{j \in J_n} \rho(\Pi_0, \Pi_j),$$

где $\rho(\Pi_0, \Pi_j)$ — интервальное расстояние [11] между интервальной гиперплоскостью вида $\Pi_0: \mathbf{f}_0^6(U_0) = \mathbf{0}$, интервально параллельной координатной плоскостью $\langle X \rangle O \langle Y \rangle$ и той, которая принимает участие в формировании интервальной границы $\mathbf{fr} \mathbf{P}_0(U_0)$, и интервальными гиперплоскостями $\Pi_j: \mathbf{f}_j^5(U_j) = \mathbf{0}$, $j \in J_n$, принимающими участие в формировании $\mathbf{fr} \mathbf{P}_i(U_i)$.

На основе введенных выше понятий и соотношений интервальную математическую модель оптимизационной задачи упаковки интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i(U_i), i \in J_n$, в интервальной области $\mathbf{P}_0(U_0)$ представим в следующем виде:

найти

$$\inf_{(U \langle H \rangle) \in \mathbf{D} \subset \mathbf{I}_s^{3n+1} \mathbf{R}} \langle H \rangle, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{D} : \begin{cases} \Phi_{0i}(U_0, U_i) \geq 0, & i \in J_n, \\ \Phi_{ij}(U_i, U_j) \geq 0, & i \in J_n, j \in J_n, i < j, \end{cases} \quad (9)$$

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_n) \in \mathbf{I}_s^{3n} \mathbf{R}, \quad U = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) \in \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}, \quad i \in J_n,$$

а интервальные отображения $\Phi_{0i}(U_0, U_i)$ и $\Phi_{ij}(U_i, U_j)$ определяются соответственно выражениями (6) и (7).

Если все погрешности исходных данных положить равными нулю, то (8), (9) будет математической моделью идеализированной задачи упаковки параллелепипедов в параллелепипед.

Метод решения. Осуществим погружение интервальной математической модели (8), (9) в евклидово пространство с помощью интервального отображения вида

$$\Psi : \mathbf{I}_s \mathbf{R} \rightarrow R^2, \quad \Psi(\langle X \rangle) = \mathbf{H}(\langle X \rangle) = (x, v_x),$$

где \mathbf{H} — гомеоморфизм [8]. В результате получим векторную функцию цели $\Psi(\langle H \rangle) = \mathbf{H}(\langle H \rangle) = (h, v_h)$ и множество $D = \mathbf{H}_{3n+1}(\mathbf{D}) \subset R^{6n+2}$, которое, исходя из операций и отношения порядка в интервальных пространствах, можно представить в виде структуры линейных уравнений и неравенств:

$$D = \bigcap_{t=1}^6 \left(\left(\bigcap_{i=1}^n \chi_{0i}^k \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \chi_{ij}^k \right) \right), \quad (10)$$

$$\chi_{ij}^1 : \begin{cases} -(x_j - x_i) - (a' + v_{a_j} + v_{a_i}) > 0, \\ -(x_j - x_i) - (a' + v_{a_j} + v_{a_i}) = 0, \\ -(v_{x_j} - v_{x_i}) - (v_{a_j} + v_{a_i}) \geq 0, \end{cases} \quad \chi_{ij}^2 : \begin{cases} (x_j - x_i) - (a' + v_{a_i} + v_{a_j}) > 0, \\ (x_j - x_i) - (a' + v_{a_i} + v_{a_j}) = 0, \\ (v_{x_j} - v_{x_i}) - (v_{a_i} + v_{a_j}) \geq 0, \end{cases}$$

$$\chi_{ij}^3 : \begin{cases} -(y_j - y_i) - (b' + v_{b_j} + v_{b_i}) > 0, \\ -(y_j - y_i) - (b' + v_{b_j} + v_{b_i}) = 0, \\ -(v_{y_j} - v_{y_i}) - (v_{b_j} + v_{b_i}) \geq 0, \end{cases} \quad \chi_{ij}^4 : \begin{cases} (y_j - y_i) - (b' + v_{b_i} + v_{b_j}) > 0, \\ (y_j - y_i) - (b' + v_{b_j} + v_{b_i}) = 0, \\ (v_{y_j} - v_{y_i}) - (v_{b_j} + v_{b_i}) \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{ij}^5: & \begin{cases} -(z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) > 0, \\ -(z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) = 0, \\ -(v_{z_j} - v_{z_i}) - (v_{c_i} + v_{c_j}) \geq 0, \end{cases} & \chi_{ij}^6: & \begin{cases} (z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) > 0, \\ (z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) = 0, \\ (v_{z_j} - v_{z_i}) - (v_{c_i} + v_{c_j}) \geq 0, \end{cases} \\
 \chi_{0i}^1: & \begin{cases} (x_i - x_0) - a - v_{a_0} + v_{a_i} > 0, \\ (x_i - x_0) - a + v_{a_0} - v_{a_i} = 0, \\ (v_{x_i} - v_{x_0}) + v_{a_0} - v_{a_i} \geq 0, \end{cases} & \chi_{0i}^2: & \begin{cases} -(x_i - x_0) - a - v_{a_0} - v_{a_i} > 0, \\ -(x_i - x_0) + a - v_{a_0} - v_{a_i} - a_i = 0, \\ -(v_{x_i} - v_{x_0}) + v_{a_0} - v_{a_i} \geq 0, \end{cases} \quad (11) \\
 \chi_{0i}^3: & \begin{cases} (y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} > 0, \\ (y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} = 0, \\ (v_{y_i} - v_{y_0}) + v_{b_0} - v_{b_i} \geq 0, \end{cases} & \chi_{0i}^4: & \begin{cases} -(y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} > 0, \\ -(y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} = 0, \\ -(v_{y_i} - v_{y_0}) + v_{b_0} - v_{b_i} \geq 0, \end{cases} \\
 \chi_{0i}^5: & \begin{cases} (z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} > 0, \\ (z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} = 0, \\ (v_{z_i} - v_{z_0}) + v_{c_0} - v_{c_i} \geq 0, \end{cases} & \chi_{0i}^6: & \begin{cases} -(z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} > 0, \\ -(z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} = 0, \\ (v_{z_i} - v_{z_0}) + v_{c_0} - v_{c_i} \geq 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

где $a = a_0 - a_i$, $b = b_0 - b_i$, $c = c_0 - c_i$, $a' = a_i + a_j$, $b' = b_i + b_j$, $c' = c_i + c_j$. Используя соотношения (10), (11), далее вместо задачи (8), (9) будем рассматривать двухкритериальную оптимизационную задачу вида

$$\inf_{(U_n, h, v_h) \in D \subset R^{6n+2}} (h, v_h), \quad (12)$$

$$U_n = (x_1, v_{x_1}, y_1, v_{y_1}, z_1, v_{z_1}, x_2, v_{x_2}, \dots, x_n, v_{x_n}, y_n, v_{y_n}, z_n, v_{z_n}) \in R^{6n},$$

где область D определяется выражениями (10), (11).

Как и в работе [12], рассмотрим математические модели таких одно-критериальных задач:

$$h_1 = \min_{(U_n, h, v_h) \in D \subset R^{6n+2}} h, \quad (13)$$

$$v_h^{(1)} = \min_{(U_n, h, v_h) \in D \subset R^{6n+2}} v_h, \quad (14)$$

$$h_2 = \min_{(U_n, h, v_h) \in D^* \subset R^{6n+2}} h, \quad (15)$$

где

$$D^* = \{(U_n, h, v_h) \in D \mid v_h = v_h^{(1)}\}.$$

Как известно, точка множества D тогда и только тогда является решением двухкритериальной задачи (12), когда она является единственным с

точностью до эквивалентности [13] решением следующей оптимизационной задачи:

найти

$$\min_{(U_n, h, v_h) \in D' \subset R^{6n+2}} V_h, \quad (16)$$

где

$$D' = \{(U_n, h, v_h) \in D \mid h \leq h'\}, \quad h' \in [h_1, h_2].$$

В данном исследовании для оптимизационной задачи (16) разработана следующая стратегия решения.

1. Решаем задачу (13):

а) генерируем последовательности объектов, которые размещаются модифицированным методом сужающихся окрестностей [5, 14];

б) строим начальные точки методом оптимизации по группам переменных [1, 6] согласно сгенерированным последовательностям;

в) осуществляем поиск точек локального минимума методом возможных направлений (см., например, [14]);

Таблица 1

i	a_i	b_i	c_i	i	a_i	b_i	c_i	i	a_i	b_i	c_i
0	11,9	10,2									
1	1	2	7	21	2	5	4	41	3	2	8
2	4	1	2	22	1	1	4	42	4	1	3
3	2	1	2	23	4	1	2	43	2	2	2
4	3	1	1	24	2	1	3	44	2	1	1
5	5	1	4	25	1	1	1	45	5	3	4
6	4	1	2	26	2	2	1	46	4	3	2
7	1	1	2	27	1	2	4	47	1	1	1
8	4	2	2	28	7	5	3	48	2	2	2
9	5	4	2	29	1	8	2	49	3	4	3
10	2	3	4	30	4	3	4	50	4	3	4
11	3	2	8	31	1	2	7	51	2	5	4
12	4	1	3	32	4	1	2	52	1	1	4
13	2	2	2	33	2	1	2	53	4	1	2
14	2	1	1	34	3	1	1	54	2	1	3
15	5	3	4	35	5	1	4	55	1	1	1
16	4	3	2	36	4	1	2	56	2	2	1
17	1	1	1	37	1	1	2	57	1	2	4
18	2	2	2	38	4	2	2	58	7	5	3
19	3	4	3	39	5	4	2	59	1	8	2
20	4	3	4	40	2	3	4	60	4	3	4

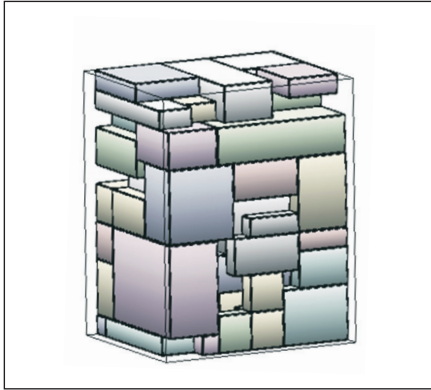


Рис. 1. Результат размещения параллелепипедов с учетом погрешностей

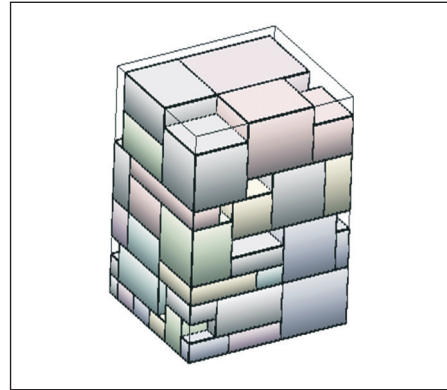


Рис. 2. Результат решения идеализированной задачи

2. Решаем задачу (14) аналогично (13).
3. Находим множество Парето [13] методом прямоугольников.
4. Находим решение задачи (16) методом последовательной оптимизации [12—14].
5. Выбираем минимальное значение векторной функции цели (h^*, v_{h^*}) как приближение к глобальному минимуму задачи.

Разработанное программное обеспечение «Packing interval parallelepipeds» (INTPAR) реализует данную стратегию упаковки интервальных параллелепипедов.

Рассмотрим пример решения задачи упаковки параллелепипедов в параллелепипед с учетом погрешностей метрических характеристик данных геометрических объектов и параметров их размещения.

Дано $n=60$ параллелепипедов с метрическими характеристиками $2(a_i \pm v_{a_i}), 2(b_i \pm v_{b_i}), 2(c_i \pm v_{c_i})$. Значения $a_i, b_i, c_i, i \in J_{60} \cup \{0\}$ приведены в табл. 1. Погрешности $v_{a_i}, v_{b_i}, v_{c_i}$ принимаем равными 1% значений соответствующих метрических характеристик, т. е. $v_{a_i} = 0,01 a_i, v_{b_i} = 0,01 b_i, v_{c_i} = 0,01 c_i$.

Пусть для параметров размещения

$$u_i \pm v_{u_i} = (x_i \pm v_{x_i}, y_i \pm v_{y_i}, z_i \pm v_{z_i}) \in R^3$$

параллелепипеда $P_i(u_i), i \in J_{60} \cup \{0\}$, справедливы соотношения

$$v_{x_i} = 0,01 a_i, v_{y_i} = 0,01 b_i, v_{z_i} = 0,01 c_i, i \in J_{60} \cup \{0\}.$$

При решении двухкритериальной задачи высота занятой части области

размещения и погрешность высоты принимают минимальные значения, оптимальные значения составляют $h=14,35$, $v_h=0,12$ на перестановке

$\pi^* = (21\ 6\ 43\ 38\ 16\ 59\ 20\ 25\ 56\ 19\ 46\ 37\ 10\ 29\ 41\ 3\ 44\ 52\ 58\ 34\ 30\ 15\ 1\ 55\ 27\ 14\ 57\ 60\ 28\ 23\ 39\ 13\ 9\ 51\ 2\ 45\ 40\ 31\ 12\ 47\ 33\ 36\ 8\ 18\ 11\ 50\ 54\ 49\ 53\ 24\ 48\ 32\ 26\ 4\ 22\ 17\ 35\ 7\ 5\ 42)$.

Таким образом, получен интервал $[14,23\ 14,47]$, в который с учетом погрешностей метрических характеристик и параметров размещения гарантированно попадает значение функции цели поставленной задачи.

На основе изоморфизма [8] данному решению соответствует точка

$$\mathbf{H}^{-1}([14,23\ 14,47]) = (14,35\ 0,24) \in \mathbf{I}_3\mathbf{R}.$$

Соответствующая упаковка изображена на рис. 1. Центры (x_i, y_i, z_i) интервалов $(\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle)$ полюсов параллелепипедов $P_i, i \in J_n$, приведены в табл. 2.

Для анализа точности полученного результата найдены нижняя и верхняя оценки значения функции цели поставленной задачи: верхняя

Таблица 2

n	x	y	z	n	x	y	z	n	x	y	z
21	8,31	3,71	10,79	30	2,19	6,79	14,36	33	4,25	1,64	1,08
6	9,38	8,32	0,56	15	4,24	8,85	3,61	36	2,19	1,65	2,59
43	10,36	3,17	10,78	1	10,40	2,16	2,60	8	5,26	6,26	12,33
38	2,68	7,79	0,56	55	1,67	3,67	6,19	18	3,19	7,79	2,612
16	2,69	7,29	8,74	27	1,651	8,82	0,56	11	9,39	6,78	4,68
59	2,19	8,32	1,59	14	10,36	1,12	10,78	50	6,27	7,32	9,77
20	5,26	7,80	1,57	57	8,31	2,16	9,77	54	3,69	8,83	0,56
25	4,22	1,12	13,35	60	3,71	2,68	9,78	49	5,25	1,13	6,21
56	9,37	6,79	2,11	28	8,32	4,23	6,71	53	5,79	6,29	3,63
19	9,89	2,16	1,07	23	2,19	7,30	10,77	24	9,34	7,31	8,75
46	1,65	4,22	4,16	39	5,76	3,17	13,83	48	9,34	2,68	12,32
37	1,67	6,28	12,81	13	10,35	2,16	9,765	32	3,70	5,249	3,627
10	5,26	3,17	6,21	9	5,27	8,31	0,56	26	9,39	6,26	0,56
29	0,63	8,31	0,56	51	3,69	1,65	3,61	4	5,77	8,85	2,09
41	6,84	2,17	3,66	2	2,69	2,16	11,83	22	2,67	8,82	0,56
3	5,78	5,23	1,08	45	10,40	2,16	3,63	17	1,15	8,31	2,61
44	6,81	7,79	0,56	40	7,81	4,20	0,56	35	10,39	2,15	13,83
52	5,27	8,30	12,33	31	1,14	2,15	13,35	7	3,72	6,80	6,69
58	2,18	1,63	6,68	12	9,32	2,69	8,24	5	6,27	3,19	14,83
34	9,33	7,28	12,81	47	10,42	2,15	5,67	42	2,20	5,24	1,60

оценка $h^+ = 14,93$ получена как результат решения задачи упаковки параллелепипедов $P_i^-, i \in J_n$, в параллелепипед P_0^+ , нижняя оценка $h^- = 11,38$ — как результат решения задачи упаковки параллелепипедов $P_i^+, i \in J_n$, в параллелепипед P_0^- , где P_0^+ и P_0^- — геометрические объекты евклидова пространства, все метрические характеристики которых увеличены на соответствующие погрешности, а P_i^+ и $P_i^-, i \in J_n$ — геометрические объекты с уменьшенными на погрешности метрическими характеристиками. Для идеализированной задачи $h_0 = 12$. Результат упаковки без учета погрешностей изображен на рис. 2.

Длина интервала $[14,23 \ 14,47]$, в который гарантированно попадает решение поставленной задачи, равна $2v_h = 0,48$. Она значительно меньше длины интервала $[h^-, h^+] = [11,38 \ 14,93]$.

Таким образом, использование при моделировании задачи элементов интервального анализа позволяет получить более узкий интервал, в который гарантированно попадает решение поставленной задачи. Решение данной задачи дает возможность по значениям и погрешностям входных данных прогнозировать значения выходных данных.

Выводы. Предложенная стратегия решения задачи основана на комбинации таких методов оптимизации, как метод оптимизации по группам переменных, метод сужающихся окрестностей и метод возможных направлений.

Разработанная программа упаковки параллелепипедов «Packing interval parallelepipeds», предназначенная для автоматизации решения задачи оптимальной упаковки параллелепипедов в параллелепипеде с учетом погрешностей метрических характеристик и параметров размещения, может быть использована при проектировании карт трехмерного раскроя промышленных материалов, при создании малоотходных технологий для прогнозирования результатов упаковки, при решении задач минимизации транспортных расходов грузов и других задач, моделируемых как задачи упаковки параллелепипедов с учетом погрешностей.

The interval mathematical model of optimization problem of packing the interval parallelepipeds is built. Transition is made to the two-criteria problem in Euclidean space. The solution strategy, based on the use of the optimization on the groups of variables and of modified method of narrowing environs, is suggested.

1. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев : Наук. думка, 1986. — 267 с.
2. Dyckhoff H., Scheithauer G., Terno J. Cutting and Packing // Annotated bibliographies in Combinatorial Optimization. Ed. M. Dell'Amico, F. Maffioli and S. Martello. — Chichester: John Wiley & Sons, 1997. — P. 393—412.
3. Fekete S., Guhrer A. Neumann U. van der Veen J., Jan C. Packing a trunk — repeatedly // 3rd Meeting Euro Special Interest Group on Cutting and Packing (ESICUP). Instituto Superior de Engenharla do Porto. Portugal. March. 16/18. — 2006. — P. 3.

4. Moura A., Oliveira H. A heuristic approach to container loading problem with load bearing strength considerations // *Ibed.*—Portugal.March. 16/18. — 2006. — P. 17.
5. Стоян Ю. Г., Соколовский В. З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. — Киев : Наук. думка, 1980. — 208 с.
6. Стоян Ю. Г., Пономаренко Л. Д., Панкратов А. В., Лойко А. Ф. Программная система КТС автоматической компоновки бокса сложной технической системы блочной конструкции: Препр. / НАН Украины. ИПМаш. — Харьков, 1987. — 37 с.
7. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space \mathbb{IR} // *Computing, Supplement.* — 1980. — № 2. — P. 33—49.
8. Стоян Ю. Г. Введення в інтервальну геометрію: Навчальний посібник. — Харків : ХНУРЕ, 2006. — 98 с.
9. Евсеева Л. Г., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б. Интервальные направленные множества в многомерных интервальных пространствах // *Искусственный интеллект.* — 2005. — № 4. — С. 169—176.
10. Stoyan Yu. G. Φ -function and its basic properties // *Докл. НАН Украины. Сер. А.* — 2001. — № 8. — С. 112—117.
11. Евсеева Л. Г. Интервальная метрика на n -мерном множестве центрированных интервалов // *АСУ и приборы автоматизи.* — 2006. — Вып. 136. — С. 50—56.
12. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Сысоева Ю. Г. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников // *Доп. НАН України.* — 1998. — № 9. — С. 114—120.
13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М. : Наука, 1982. — 256 с.
14. Чугай А. М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей // *Радиоэлектроника и информатика.* — 2005. — № 1. — С. 58—63.

Поступила 16.02.08;
после доработки 02.09.08

ЕВСЕЕВА Людмила Григорьевна, канд. физ.-мат. наук, профессор каф. высшей математики и физики Полтавского университета потребительской кооперации Украины. В 1975 г. окончила Харьковский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование, вычислительные методы.

ПАНКРАТОВ Александр Викторович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. В 1983 г. окончил Харьковский ин-т радиоэлектроники. Область научных исследований — математическое моделирование и методы оптимального геометрического проектирования (задачи размещения, раскроя, упаковки и покрытия).