

УДК 534.3+611.539

# ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛЯ ТЕЧІЇ І АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ У ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З ЛОКАЛЬНИМ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ЗВУЖЕННЯМ. ЧАСТИНА 2. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 10.09.2004

Проведені розрахунки гідродинамічних і акустичних характеристик течії за локальним звуженням каналу, отриманих на основі розробленого в роботі [1] методу. Результати розрахунків добре узгоджуються з відповідними літературними даними. Це дає підстави говорити про успішну апробацію розробленого методу й можливість його подальшого застосування для розв'язання відповідних задач механіки й акустики.

Проведены расчеты гидродинамических и акустических характеристик течения за локальным сужением канала, полученных на основе разработанного в работе [1] метода. Результаты расчетов хорошо согласуются с соответствующими литературными данными. Это дает основания говорить об успешной апробации разработанного метода и возможности его дальнейшего применения для решения соответствующих задач механики и акустики.

The hydrodynamic and acoustic characteristics of the flow past a channel's local narrowing, obtained on the basis of the method developed in work [1], are estimated. The estimation results correlate well with the corresponding data reported in scientific literature. This indicates a successful testing of the developed method and allows applying it to solving the appropriate mechanical and acoustical problems.

## ВСТУП

У попередній статті [1] був розроблений аналітично-чисельний метод розв'язання задач генерації звуку течіями у каналах з локальними геометричними неоднорідностями. У рамках цього методу знайдені поля гідродинамічних параметрів використовуються для описання джерел звуку, а для знаходження поля течії та акустичного поля застосовуються методи функцій Гріна і власних функцій, а також методи кореляційно-спектрального аналізу.

На основі розробленого у [1] методу було розв'язано задачу генерації звуку стаціонарною течією у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням і отримано аналітичні вирази для розрахунку гідродинамічних і акустичних характеристик течії.

У даній статті проводяться розрахунки цих характеристик для типових значень параметрів течії, каналу й локального звуження. Порівняння результатів розрахунків з відповідними літературними даними дозволяє зробити висновок про можливість подальшого застосування розробленого методу для розв'язання відповідних задач механіки і акустики.

Стаття складається зі вступу, двох розділів, ви-

сновків, списку літератури й додатку. У першому розділі коротко нагадується постановка задачі (див. роботу [1]) і наводяться вирази для гідродинамічних і акустичних характеристик течії. У другому розділі проводяться розрахунки цих характеристик і аналізуються отримані результати. Далі формулюються висновки проведеного дослідження, наводяться списки цитованої літератури та прийнятих позначень.

## 1. ПОСТАНОВКА І ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Перш ніж переходити до розрахунку і аналізу отриманих у роботі [1] гідродинамічних і акустичних характеристик течії у каналі за його локальним звуженням, коротко нагадаємо постановку самої задачі, а також наведемо розрахункові вирази для цих характеристик.

Розглядається нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу радіуса  $a$  (див. [1, рис. 1]) з локальним осесиметричним звуженням довжини  $l$ , яке описується функцією  $r_s(z) = a - \delta_s \cos(\pi z/l)$  ( $\delta_s < a$ ,  $-l/2 < z < l/2$ ). У каналі з осередненою осью швидкості  $U$  тече рідина з густиною  $\rho$  і в'язкістю  $\nu$ . Течія характеризується малим числом Маха  $M \ll 1$ . Звуження збурює течію, яка, у свою чергу, створює у каналі

акустичне поле. Необхідно дослідити поле збуреної течії і акустичне поле, а також встановити зв'язок між їхніми характеристиками та параметрами звуження, каналу і незбуреного потоку.

Розв'язання сформульованої задачі починається з її розділення на гідродинамічну і акустичну частини, зв'язані між собою через гідродинамічні джерела звуку [1]. Підставою для такого кроку служить класична теорія Лайтхіла [2, 3], яка дає право без втрат загальності вважати, що:

- в'язкість рідини відіграє суттєву роль лише в області збуреної звуженням течії;
- згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі.

Такий підхід у сукупності з прийняттям ряду фізично обґрунтованих припущень дозволяє застосовувати методи функцій Гріна і власних функцій, а також методи кореляційно-спектрального аналізу до кожної з одержаних задач [1]. Виконання передбачених вказаними методами операцій дає вирази для гідродинамічних і акустичних характеристик течії. Наприклад, вираз для гідродинамічного тиску  $p$  в області

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad l/2 \leq z \leq z_e$$

збуреної за локальним звуженням каналу течії має вигляд

$$p(r, z, t) = \frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m}r)}{J_0^2(\beta_{0m}a)} \frac{1}{\beta_{0m}} \times \left[ \int_{l/2}^{z_e} e^{-\beta_{0m}|z-z_0|} dz_0 \int_0^a J_0(\beta_{0m}r_0) \times s(r_0, z_0, t) r_0 dr_0 + a J_0(\beta_{0m}a) \times \int_{l/2}^{z_e} \left. \frac{\partial p(r_0, z_0, t)}{\partial r_0} \right|_{r_0=a} e^{-\beta_{0m}|z-z_0|} dz_0 \right]. \quad (1)$$

Тут  $J_0$  – циліндричні функції Бесселя першого роду нульового порядку;  $\beta_{0m} = \zeta_{0m}/a$  – радіальні хвильові числа;  $\zeta_{0m}$  – табличні корені рівняння  $J_0'(\zeta_{0m}) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;

$$s(r, z, t) = \frac{\rho_0}{r} \left[ \frac{\partial^2(ru_r^2)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2(ru_r u_z)}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2(ru_z^2)}{\partial z^2} \right];$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a} = \rho_0 \left[ \nu \nabla_{(r,z)}^2 u_r - \frac{\partial u_r}{\partial t} \right]_{l/2 \leq z \leq z_e}.$$

Окрім того,  $\rho_0$  – густина незбуреного середовища, а  $u_r$  та  $u_z$  – компоненти швидкості середовища у радіальному та осьовому напрямках відповідно (вони визначаються зі співвідношень (5) роботи [1] після розв'язання системи рівнянь (7), (8) відносно функції течії та завихореності).

Вираз для акустичного тиску  $p_a$  за локальним звуженням каналу в області  $z > z_e$  є таким:

$$p_a(r, z, t) = -\frac{i}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_{0m}r)}{J_0^2(\alpha_{0m}a)} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ e^{-i\omega t} \frac{1}{k_{0m}} \left[ \int_{l/2}^{z_e} e^{ik_{0m}(z-z_0)} dz_0 \times \int_0^a \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(r_0, z_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} J_0(\alpha_{0m}r_0) r_0 dr_0 + \right. \right. \quad (2)$$

$$\left. \left. + a J_0(\alpha_{0m}a) \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial \tilde{F}_i(a, z_0, \omega)}{\partial y_i} e^{ik_{0m}(z-z_0)} dz_0 \right] \right\}.$$

Згенерована на частоті  $\omega$  акустична енергія  $\Pi(\omega)$  в області  $z > z_e$  має вигляд

$$\Pi(\omega) = \frac{\pi}{a^2 \rho_0 \omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\alpha_{0m}a)} \frac{1}{k_{0m}} \times \left\{ \int_0^a \int_{l/2}^{z_e} J_0(\alpha_{0m}r_0) r_0 dr_0 dz_0 \times \int_0^a \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(r_0, z_0, r'_0, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \times J_0(\alpha_{0m}r'_0) e^{-ik_{0m}(z'_0-z_0)} r'_0 dr'_0 dz'_0 + \right. \quad (3)$$

$$\left. + a^2 J_0^2(\alpha_{0m}a) \int_{l/2}^{z_e} dz_0 \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(a, z_0, a, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \times e^{-ik_{0m}(z'_0-z_0)} dz'_0 + 2a J_0(\alpha_{0m}a) \times \right.$$

$$\left. \times \text{Re} \left[ \int_0^a \int_{l/2}^{z_e} J_0(\alpha_{0m}r_0) r_0 dr_0 dz_0 \times \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(r_0, z_0, a, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k} \times e^{-ik_{0m}(z'_0-z_0)} dz'_0 \right] \right\}.$$

У співвідношеннях (2) і (3)  $\alpha_{0m} = \zeta_{0m}/a$  – радіальні хвильові числа;  $k_{0m} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{0m}^2}$  – осьові хвильові числа;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $k_0 = \omega/c_0$  –

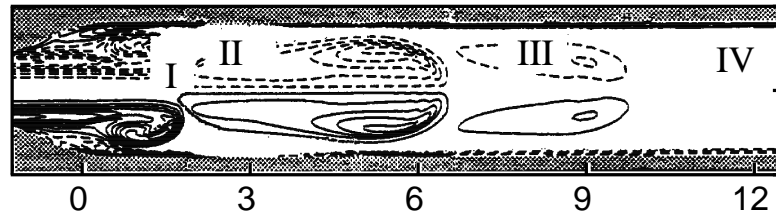


Рис. 1. Поле завихореності  $\Omega$  у перерізі каналу  $\phi = \text{const}$  в області  $z_* > -l/(2D)$ ,  $0 \leq r_* \leq R/a$ , де  $z_* = (z-l/2)/D$ ,  $r_* = r/a$  при  $\text{Re}_D = 990$  ( $U = 0.22$  м/с),  $S = 69\%$  ( $\delta_s = 4a/9$ ),  $l = 4.7a$

акустичне хвильове число;  $c_0$  – швидкість звуку в незбуреному середовищі;  $\partial^2 \tilde{T}_{ij} / \partial y_i \partial y_j$  і  $\partial \tilde{F}_i / \partial y_i$  – образи Фур'є квадрупольних і дипольних джерел звуку відповідно;  $S_{ijkl}^T$  і  $S_{ik}^F$  – взаємні спектри образів Фур'є напружень Лайтхіла  $T_{ij}$  і компонент прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі  $F_k$ ;  $S_{ijk}^{TF}$  – взаємний спектр образів Фур'є напружень Лайтхіла  $T_{ij}$  і сил  $F_k$ ;  $\text{Re}[\cdot]$  означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини. Окрім того, передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

## 2. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

При проведенні обчислень використовувалися такі величини геометричних та фізичних параметрів задачі:  $\rho_0 = 1000$  або  $1050$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-6}$  або  $4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $c_0 = 1500$  м/с,  $a = 9$  мм,  $l = (1 \div 6)a$ ,  $U \leq 0.44$  м/с. Ці значення відповідають фізіологічним межах змін відповідних характеристик течії крові, а також значенням, які використовуються в експериментах *in vitro* [4–12].

Нижче наводяться і аналізуються отримані у цій роботі результати розрахунків характеристик поля течії і акустичного поля в каналі за локальним звуженням.

### 2.1. Поле течії

#### 2.1.1. Завихореність і швидкість

На рис. 1 зображено типове поле завихореності  $\Omega$  у перерізі каналу  $\phi = \text{const}$  за локальним звуженням. Внаслідок осесиметричності задачі (див. [1, розділ 2]), розподіл завихореності в інших перерізах каналу буде таким самим.

Аналіз поля завихореності показує, що за локальним звуженням можна виділити чотири характерні області течії:

I – область збуреної течії безпосередньо за звуженням, в якій спостерігаються відрив потоку у

вигляді струменя і зворотний рух між струменем та стінкою каналу;

II – область збуреної, але вже приєднаної течії;

III – область стабілізації і поступового переходу потоку до режиму, який був перед звуженням  $z < z_i$  (є ній течія ще трохи збурена);

IV – область, у якій збурень потоку вже немає, і він такий, як при  $z < z_i$ .

Подальший аналіз рис. 1 засвідчує, що для вибраних при його побудові значень числа Рейнольдса течії  $\text{Re}_D = UD/\nu$ , ступеня  $S = (1 - d_{\min}^2/D^2) \times 100\%$  і довжини  $l$  локального звуження:

- 1) поздовжній розмір  $L_I$  області відривної течії I не перевищує приблизно  $2D$ ;
- 2) довжина  $L_{I+II}$  ділянки найбільш збуреної звуженням течії I+II досягає приблизно  $6.5D$ ;
- 3) осьовий розмір  $L_{I+II+III}$  усєї області збуреної за звуженням течії I+II+III ( $l/2 \leq z \leq z_e$ ) дорівнює приблизно  $10D$ .

Тут  $D = 2a$  і  $d_{\min} = 2(a - \delta_s)$  – діаметри каналу та мінімального поперечного перерізу його звуженої частини відповідно.

Проведені для різних значень параметрів задачі оцінки довжин  $L_I$ ,  $L_{I+II}$  і  $L_{I+II+III}$  показують, що для вибраної форми локального звуження каналу вони загалом не перевищують

$$L_I < 3D, \quad L_{I+II} < 7D, \quad L_{I+II+III} < 12D. \quad (4)$$

Цей результат добре узгоджується з наведеними в роботах [4–13] експериментальними оцінками поздовжніх розмірів відповідних областей течії за локальними геометричними неоднорідностями каналів.

Рис. 2 демонструє осьову змінюваність осередненої швидкості течії  $\langle u \rangle = \langle \sqrt{u_r^2 + u_z^2} \rangle$  на осі каналу  $r = 0$  при  $z \geq 0$  (за умови осьової симетрії тут

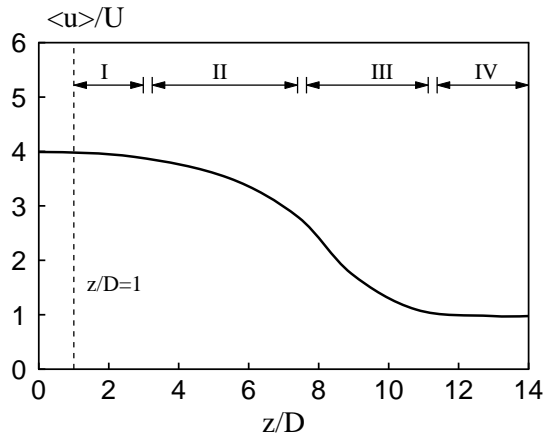


Рис. 2. Осьова змінюваність осередненої швидкості течії  $\langle u \rangle$  на осі каналу  $r=0, z \geq 0$  при  $Re_D = 1350$  ( $U = 0.3$  м/с),  $S = 75\%$  ( $\delta_s = 0.5a$ ),  $l = 4a$

$u_r(0, z, t) = 0, u(0, z, t) = u_z(0, z, t)$  [1]). Для зручності на графіку вказані також області течії I–IV, а саму швидкість  $\langle u \rangle$  пронормовано до швидкості незбуреного потоку  $U$ .

З графіка видно, що у горловині локального звуження (при  $z=0$ ) величина  $\langle u(0, z) \rangle$  досягає максимального значення:

$$\langle u(0, z) \rangle_{\max} = \langle u(0, 0) \rangle.$$

Воно визначається із закону збереження маси на звуженій та незвуженій ділянках каналу:

$$\iint_{A(z)} \vec{u} d\vec{A} = \iint_{A_0} \vec{u} \Big|_{z \leq z_i; z \geq z_e} d\vec{A}.$$

Наближено

$$\langle u(0, z) \rangle_{\max} \approx U \frac{A_0}{A_{\min}} = U \frac{a^2}{(a - \delta_s)^2}, \quad (5)$$

де  $A(z) = \pi r_s^2(z)$  – площа поперечного перерізу локального звуження  $z = \text{const}$ ;  $A_{\min} = \pi(a - \delta_s)^2$  – її мінімальне значення;  $A_0 = \pi a^2$  – площа поперечного перерізу незвуженої ділянки каналу.

Зі зростанням відстані  $z$  від горловини звуження швидкість  $\langle u(0, z) \rangle$  залишається практично незмінною ( $\langle u(0, z) \rangle \approx \langle u(0, z) \rangle_{\max}$ ) приблизно до середини області приєднаної течії II. Потім вона починає поступово зменшуватись і в кінці області II досягає близько  $0.75 \langle u(0, z) \rangle_{\max}$ . У зоні стабілізації течії III спостерігається швидко зменшення осередненої швидкості  $\langle u(0, z) \rangle$  зі збільшенням  $z$  і її наближення до швидкості незбуреного потоку  $U$  (у кінці зони III). В області IV, як і має бути, спостерігаємо рівність  $\langle u(0, z) \rangle$  і  $U$ .

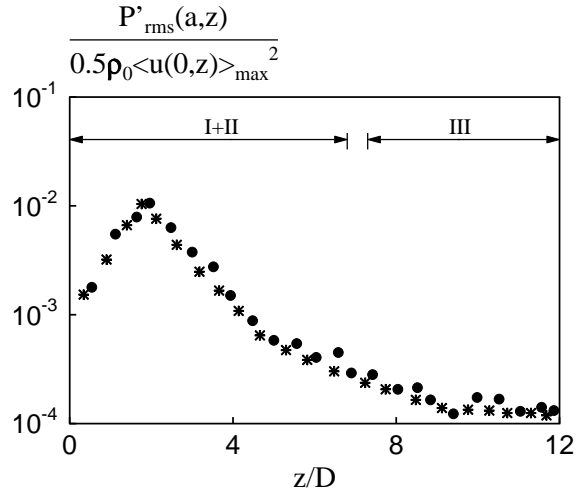


Рис. 3. Осьовий розподіл тиску  $p'_{rms}$  на стінці каналу  $r=a$  у збуреній за звуженням течії при  $Re_D = 1980$  ( $U = 0.11$  м/с),  $S = 96\%$  ( $\delta_s = 4a/5$ ),  $l = 4a$ :  
\* – розрахунок, • – експеримент [8]

Аналогічною була картина і для інших значень параметрів задачі. Відмінність відзначалась лише в розмірах областей потоку I–III і/або відносних значеннях швидкості  $\langle u(0, z) \rangle / U$ . Це добре узгоджується з описаною у статтях [4–13] поведінкою швидкості потоку на осі каналу за його локальним звуженням.

### 2.1.2. Гідродинамічний тиск

На рис. 3 зображено типову осьову змінюваність середньоквадратичного тиску  $p'_{rms} = \sqrt{\langle (p')^2 \rangle}$  на стінці каналу  $r=a$  у збуреній за локальним звуженням течії  $l/2 \leq z \leq z_e$ . Тут  $p' = p - \langle p \rangle$  – пульсації гідродинамічного тиску  $p$  навколо його осередненого значення  $\langle p \rangle$ , а сам тиск  $p$  дається формулою (1). Для порівняння наведено також відповідні експериментальні дані з роботи [8], отримані в жорсткостінній прямій трубі того ж діаметра  $D$  за її локальним осесиметричним звуженням тих самих ступеня  $S$  і довжини  $l$  при однакових значеннях числа Рейнольдса  $Re_D$ . Обидва набори даних (розрахункових та експериментальних) пронормовані до динамічного тиску струменя  $0.5 \rho_0 \langle u(0, z) \rangle_{\max}^2$ , в якому швидкість  $\langle u(0, z) \rangle_{\max}$  знаходилася за формулою (5).

Аналіз рис. 3 засвідчує непогану узгодженість результатів розрахунку з даними експерименту як за якісними (форма кривих), так і за кількісними (амплітуда тиску, положення його максимуму, тощо) показниками. Так, в області найбільш збуреної течії (I і II) функція  $p'_{rms}(a, z)$  спочатку швид-

ко зростає зі збільшенням відстані від локального звуження  $z-l/2$ . Потім, після досягнення максимуму в точці  $z-l/2 = L_{\max}$ , відбувається досить швидко спадання тиску  $p'_{rms}(a, z)$  і поступове його наближення (в області стабілізації течії III) до мінімального значення, яке відповідає значенню тиску  $p'_{rms}(a, z)$  у незбуреній течії перед звуженням каналу  $z < z_i$ .

Проведені оцінки поведінки тиску  $p'_{rms}(a, z)$  за звуженнями різного ступеня  $S$  і/або при різних значеннях числа Рейнольдса  $Re_D$  показують, що:

- тиск досягає максимуму завжди перед точкою приєднання струменя, при цьому відстань  $L_{\max}$  від звуження до точки максимуму тиску  $p'_{rms}(a, z)$  знаходиться у межах  $(1.28 \div 2.5)D$ ;
- збільшення/зменшення  $S$  і/або  $Re_D$  спричиняє загальне збільшення/зменшення локальної енергії збуреної звуженням течії ( $\sim u^2$ ), а відтак загальне зростання/спадання тиску  $p'_{rms}(a, z)$ .

Ці ж тенденції спостерігалися в експериментах [4–8].

Щодо варіацій функції  $p'_{rms}(a, z)$ , спричинених зміною довжини  $l$  локального звуження каналу, то вони зводяться до того, що суттєве (порядку 50 %) збільшення/зменшення  $l$  (при  $S \geq 70$  % і  $Re_D \geq 1500$ ) загалом призводить до:

- незначного (порядку 5 %) зміщення точки максимуму тиску  $z-l/2 = L_{\max}$  вниз/вгору за течією;
- зростання/спадання дисипації енергії потоку у звуженні (через збільшення/зменшення там впливу сил в'язкості), що призводить до незначного (порядку 5 %) зменшення/збільшення амплітуди тиску  $p'_{rms}(a, z)$ .

Вивчення кількісної залежності відстані  $L_{\max}$  від параметрів задачі проводилося шляхом апроксимації даних розрахунку. Як результат, показано, що ця залежність загалом схожа на отриману в роботі [8] відповідну експериментальну тенденцію для  $L_{\max}$  у жорсткостинній трубці:

$$\frac{L_{\max}}{d} \approx \alpha (Re_d)^{0.26} (D/d)^{1.25},$$

$$\frac{L_{\max}}{D} \approx \alpha (Re_d)^{0.26} (D/d)^{0.25}$$
(6)

(тут  $Re_d = \langle u(0, z) \rangle_{\max} d / \nu$  – число Рейнольдса струменя, а швидкість  $\langle u(0, z) \rangle_{\max}$  дається формулою (5)). Відмінність між ними полягає у значен-

нях коефіцієнта  $\alpha$ . Так, у серії експериментів [8] величина  $\alpha$  була слабозмінюваною функцією довжини локального звуження трубки, коефіцієнта калібрування вимірювальної системи, тощо, а її значення коливалось навколо 0.127. У цьому дослідженні параметр  $\alpha$  також слабо залежить від  $l$ , але його величина коливається навколо 0.124. Така відмінність між теоретичними та експериментальними значеннями  $\alpha$  пояснюється насамперед відмінністю форми локальних звужень (у роботі [8] вона була ступінчастою, а у цьому дослідженні – обтічною). Слід також враховувати похибки вимірювання й апроксимації даних експерименту/розрахунку.

Отримана аналогічним чином кількісна оцінка для максимального тиску  $(p'_{rms}(a, z))_{\max}$  у точці  $z-l/2 = L_{\max}$  також загалом схожа на відповідну експериментальну оцінку роботи [8]:

$$\frac{(p'_{rms}(a, z))_{\max}}{0.5\rho_0 \langle u(0, z) \rangle_{\max}^2} \frac{D}{d_{\min}} \approx K, \quad Re_d > 8300. \quad (7)$$

Тут швидкість  $\langle u(0, z) \rangle_{\max}$  в горловині локального звуження каналу знаходилася за формулою (5). Проте слід відзначити дві відмінності. По-перше, розрахунковий тиск  $(p'_{rms}(a, z))_{\max}$  стає пропорційним динамічному тиску струменя  $0.5\rho_0 \langle u(0, z) \rangle_{\max}^2$  і відношенню діаметрів мінімальної звуженої та незвуженої ділянок каналу  $d_{\min}/D$ , починаючи з  $Re_d \approx 8300$  (замість  $Re_d \approx 8500$  у [8]). По-друге, у цьому дослідженні коефіцієнт  $K$ , будучи слабозмінюваною функцією довжини  $l$ , коливався навколо значення 0.049, тоді як в роботі [8] – навколо 0.054. Як і у випадку коефіцієнта  $\alpha$ , така розбіжність розрахункових та експериментальних даних пояснюється в основному відмінністю форми використаних локальних звужень, а також похибками вимірювання та апроксимації даних експерименту/розрахунку.

### 2.1.3. Частотний спектр пульсацій гідродинамічного тиску

На рис. 4 зображено результати розрахунку частотного спектра  $P(r, z; f)$  пульсацій гідродинамічного тиску  $p'(r, z, t)$  [2]:

$$P(r, z; f) = 4\pi P(r, z; \omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle p'(r, z, t) p'(r, z, t + \tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (8)$$

на стінці каналу  $r=a$  в областях відривної I (рис. 4, а) та приєднаної II (рис. 4, б) за звуженням течій. Для порівняння наведено також відповідні

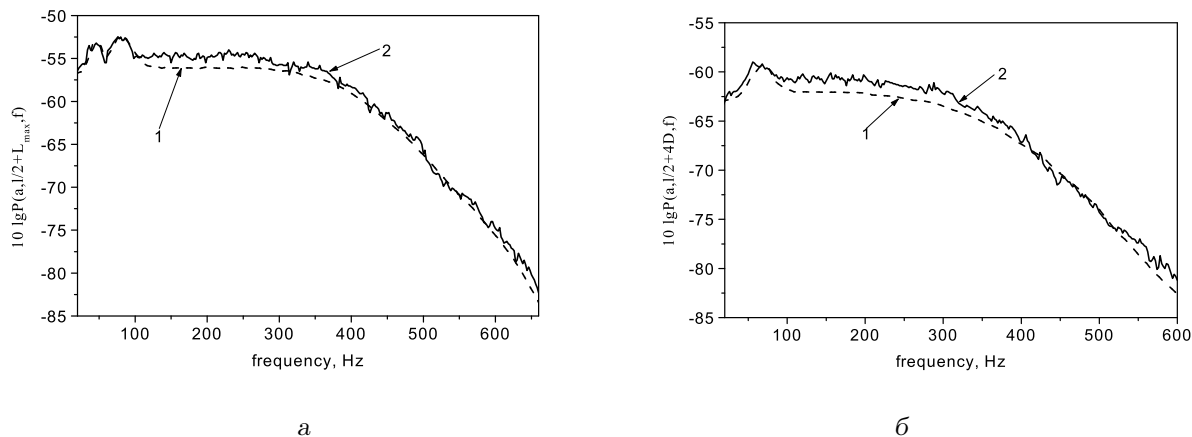


Рис. 4. Частотний спектр пульсацій гідродинамічного тиску на стінці каналу  $r=a$  у точках  $z-l/2=L_{\max}$  (а) і  $z-l/2=4D$  (б) за локальним звуженням при  $Re_D=1800$  ( $U=0.1$  м/с),  $S=69\%$  ( $\delta_s=4a/9$ ),  $l=2a$ :  
1 – розрахунок, 2 – експеримент [8]

експериментальні дані з роботи [8], отримані в тих самих положеннях на стінці жорсткостінної труби того ж діаметра  $D$  при однакових  $Re_D$ ,  $S$  і  $l$ .

Спостерігається непогана узгодженість розрахованих спектрів із вимірними за формою, рівнями та локальними особливостями. Окрім цього, в обох регіонах течії спектр  $P(a, z; f)$  поля  $p'$  загалом схожий на спектр пульсацій пристінного тиску в повністю розвиненій турбулентній течії у трубці [2, 8, 14]. Його область низьких частот визначається великомасштабними енергонасиченими вихорами (див. рис. 1). Високочастотна ж область відповідає дрібномасштабним вихорам, які переносять незначну частину енергії течії. Внаслідок цього тут рівень спектра  $P(a, z; f)$  значно нижчий за його рівень в області низьких частот. Він швидко спадає з ростом частоти, що відповідає зменшенню енергонасиченості вихорів зі зменшенням їх розмірів.

Особливість досліджуваного спектра  $P(a, z; f)$  полягає у наявності низькочастотних максимумів. Це два максимуми у діапазонах  $32 \div 58$  Гц і  $62 \div 96$  Гц на рис. 4, а і максимум у діапазоні  $36 \div 78$  Гц на рис. 4, б. Проведений, як і у роботі [8], аналіз структури течії та розподілу її енергії по вихорах за локальним звуженням каналу показує, що ці максимуми визначаються відповідними великомасштабними вихоровими утвореннями в регіонах відривної та приєднаної течій (див. рис. 1), а їх частоти – характерними частотами формування цих утворень.

1. В області відривної течії I (див. рис. 4, а) – це вихори масштабів порядку  $d_{\min}/2$ , що рухаю-

ться у струмені зі швидкостями, близькими до  $\langle u(0, z) \rangle_{\max}$ , і характеризуються частотами порядку

$$f_{ch}^{(1)} = \frac{2\langle u(0, z) \rangle_{\max}}{d_{\min}} \quad (9)$$

та вихори розмірів порядку максимальної товщини стінки локального звуження  $\delta_s$  у зоні зворотного руху між струменем і стінкою каналу. Вони характеризуються частотами, близькими до

$$f_{ch}^{(2)} = \frac{u_c}{\delta_s} \quad (10)$$

(тут  $u_c \sim 0.45 \div 0.6 \langle u(0, z) \rangle_{\max}$  – швидкість конвекції на зовнішній межі струменя [8–10, 15]).

2. В області приєднаної течії II (див. рис. 4, б) – це вихорові структури, розмір і швидкість руху яких близькі відповідно до  $D/2$  та  $\langle u(0, z) \rangle_{\max}$ , а частоти – до

$$f_{ch}^{(3)} = \frac{2\langle u(0, z) \rangle_{\max}}{D}. \quad (11)$$

При проведенні оцінок частот  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$  і співставленні їх з частотами відповідних локальних максимумів у спектрі  $P(a, z; f)$ , швидкість  $\langle u(0, z) \rangle_{\max}$  знаходилася за наближеною формулою (5).

Дослідження варіацій у спектрі  $P(a, z; f)$ , спричинених змінами ступеня локального звуження каналу  $S$  і/або числа Рейнольдса  $Re_D$  показує, що, як і в експерименті [8]:

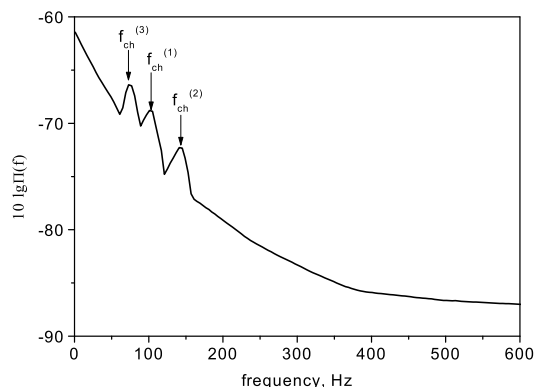


Рис. 5. Спектр  $\Pi(f)$  акустичної енергії, згенерованої збуреною за звуженням течією при  $Re_D = 1575$  ( $U = 0.35$  м/с,  $S = 44\%$  ( $\delta_s = a/4$ ),  $l = 2a$ )

- 1) форма спектра практично нечутлива до цих параметрів;
- 2) рівень спектра загалом зростає/спадає зі збільшенням/зменшенням  $S$  і (або)  $Re_D$ ;
- 3) положення локальних максимумів у спектрі  $P(a, z; f)$  змінюється при зміні  $S$  і (або)  $Re_D$  відповідно до змін частот (9) – (11).

Пояснення цих ефектів таке саме, як і в роботі [8]. Перший з них зумовлений незмінністю загальної структури течії та поля пульсацій пристінного тиску  $p'$  при зміні  $S$  і (або)  $Re_D$ . Другий викликаний відповідним збільшенням/зменшенням інтенсивності течії і пульсацій тиску  $p'$ . Третій же ефект спричиняється зміною розмірів і швидкостей руху зазначених вище вихорів, а відтак, відповідною зміною характерних частот їх формування  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$ .

На відміну від ступеня локального звуження  $S$ , вплив його довжини  $l$  на частотний спектр пульсацій пристінного тиску  $P(a, z; f)$  не такий суттєвий. Як показують розрахунки:

- 1) форма спектра  $P(a, z; f)$  і положення його локальних максимумів в околі частот  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$  практично нечутливі до змін величини  $l$ ;
- 2) значне (порядку 50 %) збільшення/зменшення довжини  $l$  (при  $S \geq 50\%$  та  $Re_D \geq 1200$ ) загалом призводить до незначного (кілька децибел) спадання/зростання рівнів частотного спектра  $P(a, z; f)$ .

Незмінність форми спектра  $P(a, z; f)$  і положень його локальних максимумів при зміні  $l$  пояснюється незмінністю загальної структури течії та поля  $p'$ , а також швидкостей руху великомасштабних вихорів у областях I і II при зміні поздовжнього розміру локального звуження каналу. Зменшення/збільшення ж амплітуди функції  $P(a, z; f)$  при збільшенні/зменшенні  $l$  спричинене збільшенням/зменшенням дисипації енергії течії у звуженні через збільшення/зменшення там впливу сил в'язкості.

## 2.2. Акустичне поле

На рис. 5 зображено типові результати розрахунку частотного спектра  $\Pi(f)$  акустичної енергії, згенерованої збуреною за звуженням течією (тут  $\Pi(f) = 4\pi\Pi(\omega)$  [2]). Оскільки у жорсткостінному каналі акустична енергія не спадає зі збільшенням відстані від джерела [1], то аналогічні криві для  $\Pi(f)$  будуть в усіх перерізах каналу  $z = \text{const}$  ( $z > z_e$ ) для тих же значень параметрів течії, каналу і його локального звуження.

Знайдений у рамках досліджуваної моделі [1, рис. 1] спектр  $\Pi(f)$  загалом схожий на експериментально визначений спектр акустичної енергії [9, 10, 16] – він загалом спадає зі збільшенням частоти і має чітко виражені локальні максимуми.

Аналіз виразу (3) показує, що спадання функції  $\Pi(f)$  з частотою зумовлене, головним чином, відповідною поведінкою спектрів гідродинамічних джерел звуку

$$\frac{\partial^4 S_{ijkl}^T}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l}, \quad \frac{\partial^2 S_{ik}^F}{\partial y_i \partial y'_k}, \quad \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k},$$

а також передаточних функцій акустичних мод каналу

$$T_{0m} \sim \frac{1}{\omega k_{0m}}. \quad (12)$$

Локальні ж максимуми у спектрі акустичної енергії  $\Pi(f)$  визначаються максимумами вказаних спектрів та функцій. Так, максимуми у діапазонах 62 ÷ 88 Гц, 90 ÷ 124 Гц і 126 ÷ 160 Гц визначаються відповідними локальними максимумами спектрів

$$\frac{\partial^4 S_{ijkl}^T}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l}, \quad \frac{\partial^2 S_{ik}^F}{\partial y_i \partial y'_k}, \quad \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k}$$

в околі характерних частот формування великомасштабних вихорів  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$ . Решта ж максимумів спектра акустичної енергії відповідає максимумам функцій  $T_{0m}$  в околі критичних частот каналу:

$$\omega_{0m} = c_0 \alpha_{0m}. \quad (13)$$

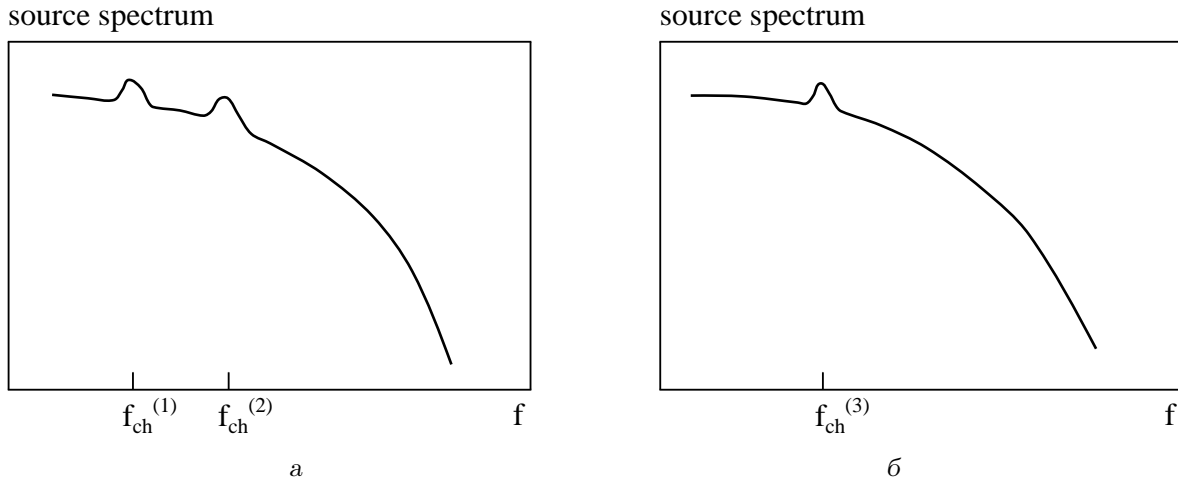


Рис. 6. Схематичне зображення спектрів гідродинамічних джерел звуку в області I відривної (а) і II приєднаної (б) за локальним звуженням каналу течій

Тут слід відзначити, що для вибраних значень параметрів каналу всі частоти  $f_{0m} = \omega_{0m}/(2\pi)$ , окрім першої  $f_{01} = 1$  Гц, вищі за 100 кГц. Тому відповідних максимумів на рис. 5 не видно.

Справді, виходячи з проведеного у підрозділах 2.1.1 і 2.1.3 аналізу структури течії та розподілу її енергії по вихорах за локальним звуженням каналу, доходимо висновку, що спектри гідродинамічних джерел звуку загалом схожі на частотний спектр пульсацій тиску  $P(r, z; f)$  (рис. 6). Це означає, що функції

$$\frac{\partial^4 S_{ijkl}^T}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l}, \quad \frac{\partial^2 S_{ik}^F}{\partial y_i \partial y'_k}, \quad \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k}$$

спадають з ростом частоти і мають локальні максимуми в околі частот  $f_{ch}^{(1)}$  і  $f_{ch}^{(2)}$  (якщо йдеться про джерела в регіоні відривної течії I) або в околі частоти  $f_{ch}^{(3)}$  (якщо джерела розташовані в регіоні приєднаної течії II). Передаточні ж функції  $T_{0m}$ , які характеризують процеси трансформації енергії течії в акустичну енергію та проходження звуку в каналі, фактично є низькочастотними фільтрами ( $\sim 1/\omega^2$ ) і характеризуються максимумами на частотах  $\omega = \omega_{0m}$  (рис. 7). Інші члени ряду (3) або не залежать від частоти, або ж (як у випадку експонент  $\exp[-ik_{0m}(z'_0 - z_0)]$ ) загалом визначають лише низькоамплітудні флуктуації функції  $\Pi(f)$ . Цим пояснюється відображена на рис. 5 поведінка спектра акустичної енергії.

Подальший аналіз спектра  $\Pi(f)$  і співставлення його зі спектром акустичної енергії, згенерованої повністю розвинутою турбулентною течією у жорсткостінній трубі [2, 9, 10, 17] показує, що

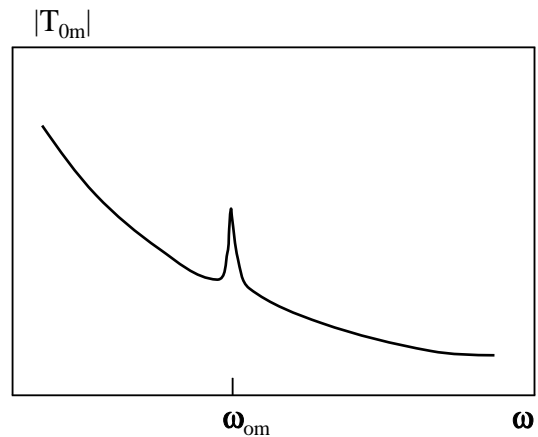


Рис. 7. Схематичне зображення передаточної функції  $T_{0m}$

для тих же значень параметрів течії й механічної конструкції досліджуваній спектр  $\Pi(f)$  має вищі рівні та додаткові максимуми в околі частот  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$ . Це дає підстави говорити про те, що локальне звуження каналу асоціюється з двома основними акустичними ефектами:

- 1) загальним ростом рівнів акустичного спектра  $\Pi(f)$ ;
- 2) генерацією в ньому нових частотних компонент, які визначаються відповідними великомасштабними вихорами у збуреній за звуженням течії (див. рис. 1).

Такий висновок добре узгоджується з результатами робіт [9, 10, 18–20] і є одним із основних резуль-



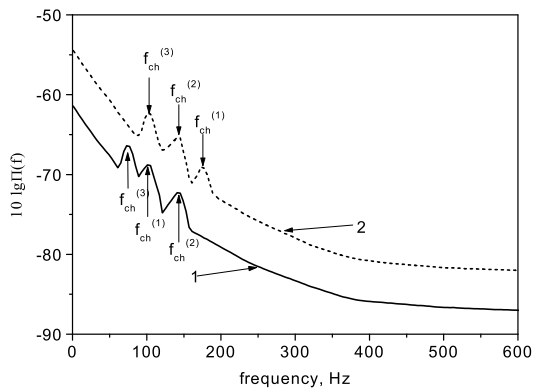


Рис. 8. Спектри акустичної енергії, згенерованої збуреною за звуженням течією при  $Re_D = 1575$  ( $U = 0.35$  м/с),  $l = 2a$ :  
 1 –  $S = 44\%$  ( $\delta_s = a/4$ ), 2 –  $S = 61\%$  ( $\delta_s = 3a/8$ )

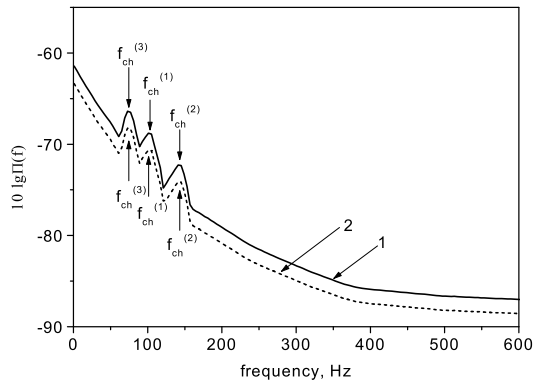


Рис. 10. Спектри акустичної енергії, згенерованої збуреною за звуженням течією при  $Re_D = 1575$  ( $U = 0.35$  м/с),  $S = 44\%$  ( $\delta_s = a/4$ ):  
 1 –  $l = 2a$ , 2 –  $l = 4a$

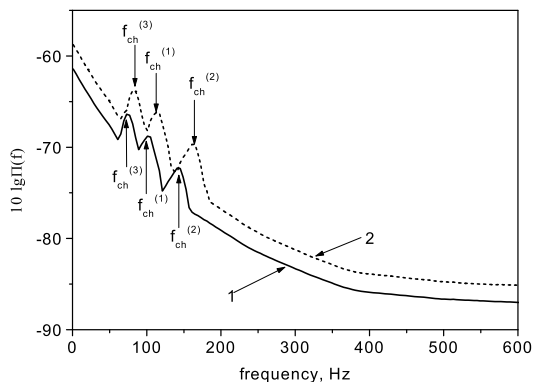


Рис. 9. Спектри акустичної енергії, згенерованої збуреною за звуженням течією при  $S = 44\%$  ( $\delta_s = a/4$ ),  $l = 2a$ :  
 1 –  $Re_D = 1575$  ( $U = 0.35$  м/с),  
 2 –  $Re_D = 1800$  ( $U = 0.4$  м/с)

татів даного дослідження.

Рис. 8 демонструє вплив ступеня  $S$  локального звуження каналу на функцію  $\Pi(f)$ . Бачимо, що збільшення/зменшення величини  $S$  (тобто зменшення/збільшення мінімального діаметра звуження  $d_{\min}$ ) призводить до загального росту/спадання рівнів спектра  $\Pi(f)$  та переміщення його локальних максимумів у околі частот  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$  у нові положення, які визначаються новими значеннями цих частот. Форма ж спектра акустичної енергії  $\Pi(f)$  залишається практично нечутливою до змін ступеня  $S$ . Також нечутливими до цих змін є і положення максимумів функції  $\Pi(f)$  в околі критичних частот каналу  $\omega_{0m}$ .

Останній ефект пояснюється тим, що критичні частоти каналу є акустичною характеристикою самого каналу, а відтак, вони нечутливі до змін ступеня його локального звуження. Пояснення ж інших ефектів аналогічне до пояснення особливостей частотного спектра пульсацій гідродинамічного тиску  $P(r, z; f)$  (див. підрозділ 2.1.3).

Якісно схожі варіації у спектрі акустичної енергії  $\Pi(f)$  спричиняються і зміною значення числа Рейнольдса  $Re_D$  (рис. 9):

- зміна значення  $Re_D$  практично не позначається на формі спектра  $\Pi(f)$ ;
- збільшення/зменшення  $Re_D$  зумовлює загальне зростання/спадання рівнів спектра  $\Pi(f)$ ;
- зміна значення  $Re_D$  спричиняє зміну положень локальних максимумів функції  $\Pi(f)$  в околі частот  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$  відповідно до змін значень цих частот;
- положення локальних максимумів функції  $\Pi(f)$  в околі критичних частот каналу  $\omega_{0m}$  нечутливі до змін числа  $Re_D$ .

Ці ефекти пояснюються аналогічно до щойно описаних ефектів ступеня  $S$  локального звуження каналу.

Вплив довжини  $l$  локального звуження каналу на спектр  $\Pi(f)$  представлений на рис. 10. Тут зображено спектри, згенеровані звуженнями різної довжини і однакового ступеня при однаковому значенні числа Рейнольдса. Порівняльний аналіз кривих 1 і 2 показує, що дворазове збільшення довжини  $l$  загалом викликає незначне (кілька

децибел) спадання рівнів спектра  $\Pi(f)$ . І навпаки, рівень спектра  $\Pi(f)$  трохи зростає, якщо довжина  $l$  удвічі зменшується. Форма функції  $\Pi(f)$  і положення її локальних максимумів в околі характерних частот формування великомасштабних вихорів  $f_{ch}^{(1)}, \dots, f_{ch}^{(3)}$  практично не змінюються при зміні  $l$ . Максимуми ж в околі критичних частот каналу  $\omega_{0m}$  взагалі нечутливі до змін довжини його локального звуження.

Останній ефект пояснюється тим, що критичні частоти каналу становлять акустичну характеристику самого каналу, а відтак не є чутливими до змін довжини його локального звуження. Інші характерні ознаки впливу параметра  $l$  спостерігались і у випадку частотного спектра пульсацій гідродинамічного тиску  $P(r, z; f)$  (див. підрозділ 2.1.3) і пояснюються аналогічно.

Загалом же, вивчення варіацій спектра акустичної енергії  $\Pi(f)$  при зміні параметра  $l$  показує, що змінюється лише рівень спектра. При цьому він чутливий тільки до суттєвих (порядку 50 % і вище) варіацій довжини  $l$  при значеннях  $S \geq 50$  % і  $Re_D \geq 1200$ .

## ВИСНОВКИ

1. На основі розробленого в роботі [1] методу розв'язано задачу генерації звуку стаціонарною течією у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням. Отримано аналітичні вирази для розрахунку гідродинамічних та акустичних характеристик течії.
2. Результати розрахунку цих характеристик для типових значень параметрів течії, каналу й локального звуження добре узгоджуються з відповідними літературними даними. Це дає підстави говорити про успішну апробацію розробленого методу і можливість його подальшого застосування для розв'язання відповідних задач механіки і акустики.
3. У рамках розв'язаної задачі:
  - показано, що локальне звуження каналу збуджує течію, спричиняючи різке зростання швидкості потоку  $u$  і пульсацій пристінного тиску  $p'$  у скінченній області за ним; у ній можна виділити області відривної (I) та приєднаної (II) течії, а також її стабілізації (III) і поступового переходу до режиму, який існував перед звуженням; довжини цих областей не

перевищують значень, які даються оцінкою (4);

- встановлено якісні залежності середньоквадратичного тиску  $p'_{rms}(a, z)$ , частотного спектра  $P(a, z; f)$  пульсацій тиску  $p'$ , а також спектра акустичної енергії  $\Pi(f)$  від параметрів течії, каналу і його локального звуження;
- отримано кількісні залежності відстані  $L_{max}$  від локального звуження каналу до точки максимуму тиску  $p'_{rms}(a, z)$  і значення тиску  $p'_{rms}(a, z)$  у точці  $z = L_{max}$  від параметрів задачі;
- виявлено, що характерними акустичними ознаками наявності локального звуження у каналі є загальне зростання рівнів спектра акустичної енергії  $\Pi(f)$  і генерація у ньому нових частотних компонент (додаткових максимумів), які визначаються великомасштабними вихорами в області найбільш збуреної звуженням течії (I+II).

1. Борисюк А. О. Дослідження поля течії і акустичного поля у жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням. Частина 1. Теорія // Акуст. вісн.– 2004.– 7, N 1.– С. 19–29.
2. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols.– New York: Academic Press, 1986.– 974 p.
3. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. 1. General theory // Proc. Roy. Soc. London.– 1952.– A211.– P. 564–587.
4. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Engng.– 1979.– 101.– P. 157–175.
5. Миролюбов С. Г. Гидродинамика стеноза // Современ. пробл. биомех.– 1983.– 1.– С. 73–136.
6. Berger S. A., Jou L-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– 32.– P. 347–382.
7. Clark C. The fluid mechanics of aortic stenosis. 1. Theory and steady flow experiments // J. Biomech.– 1976.– 9.– P. 521–528.
8. Борисюк А. О. Експериментальне дослідження пристінного тиску в трубі за стенозом // Акуст. вісн.– 2002.– 5, N 1.– С. 13–21.
9. Борисюк А. А. Моделирование генерации шума стенозом в сосуде // Акуст. вісн.– 2000.– 3, N 2.– С. 3–18.
10. Borisyuk A. O. Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis // J. Sound Vib.– 2002.– 256.– P. 475–498.
11. Clark C. Turbulent wall pressure measurements in a model of aortic stenosis // J. Biomech.– 1977.– 10.– P. 461–472.
12. Fredberg J. J. Origin and character of vascular murmurs: Model studies // J. Acoust. Soc. Amer.– 1977.– 61.– P. 1077–1085.

13. Tobin R. J., Chang I. D. Wall pressure spectra scaling downstream of stenoses in steady tube flow // J. Biomech.– 1976.– **9**.– P. 633–640.  $\delta_s$  – кального звуження каналу; – параметр форми локального звуження каналу;
14. Borisyuk A. O., Grinchenko V. T. Vibration and noise generation by elastic elements excited by a turbulent flow // J. Sound Vib.– 1997.– **204**.– P. 213–237.  $\rho$  – густина рідини;  $\rho_0$  – густина незбуреної рідини;
15. Abdallah S. A., Hwang N. H. C. Arterial stenosis murmurs: An analysis of flow and pressure fields // J. Acoust. Soc. Amer.– 1988.– **83**, N 1.– P. 318–334.  $\mu$  – динамічна в'язкість рідини;  $\nu$  – кінематична в'язкість рідини;  $U$  – осереднена осьова швидкість течії;
16. Hardin J. C., Pope D. S. Sound generation by a stenosis in a pipe // AIAA J.– 1992.– **30**.– P. 312–317.  $Re_D$  – число Рейнольдса;  $Re_d$  – число Рейнольдса струменя;
17. Agarwal N. K. The sound field in fully developed turbulent pipe flow due to internal flow separation. Part 1: Wall-pressure fluctuations // J. Sound Vib.– 1994.– **169**.– P. 89–109.  $u_i, u_r, u_z$  – компоненти швидкості течії;  $U_i$  – компоненти швидкості нестисливої рідини;
18. Borisyuk A. O. Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // Flow Turbul. Combust.– 1999.– **61**.– P. 269–284.  $T_{ij}$  – напруження Лайтхіла;  $p, p'$  – гідродинамічний тиск і його пульсації навколо осередненого значення;
19. Borisyuk A. O. Modelling of the acoustic properties of a larger human blood vessel // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, N 3.– С. 3–13.  $p_a$  – акустичні флуктуації тиску;  $\Omega$  – завихореність;
20. Borisyuk A. O. Model study of noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // J. Fluids Struct.– 2003.– **17**.– P. 1095–1110.  $z_i, z_0$  – вхідний та вихідний перерізи контрольного об'єму;  $c_0$  – швидкість звуку в незбуреному середовищі;

## ДОДАТОК. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- $(r, \phi, z)$  – циліндричні координати;
- $a, D$  – радіус та діаметр поперечного перерізу каналу;
- $l$  – довжина локального звуження каналу;
- $r_s$  – функція, яка описує геометрію локального звуження каналу;
- $k_0$  – акустичне хвильове число;
- $\alpha_{nm}, \beta_{nm}$  – радіальні хвильові числа;
- $k_{nm}$  – осьові хвильові числа;
- $L_{max}$  – відстань від локального звуження каналу до точки максимуму тиску  $p'_{rms}$ ;
- $P(r, z; f)$  – частотний спектр пульсацій гідродинамічного тиску;
- $\Pi(f)$  – спектр акустичної енергії.