УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. 7073737, E-mail: amakarichev@mail.ru)

Надежность комплексов сложных восстанавливаемых систем с временным резервом и возвращением восстановленных элементов в системы с минимальным внутренним резервом. I

Найдено асимптотическое распределение времени безотказной работы комплексов сложных восстанавливаемых систем (СВС) с временным резервом и возвращением восстановленных элементов в системы с минимальным внутренним резервом с момента установления исправности всех элементов всех СВС. Исследование проведено для комплексов СВС с марковским потоком отказов элементов, произвольной функцией распределения времени обслуживания элементов СВС, число которых возрастает обратно пропорционально интенсивности отказов так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания требований в порядке их поступления ограничена сверху величиной, меньшей единицы.

Знайдено асимптотичний розподіл часу безвідмовної роботи комплексів складних відновлювальних систем (СВС) з часовим резервом і поверненням відновлених елементів у системи з мінімальним внутрішнім резервом з моменту встановлення справності усіх елементів усіх СВС. Дослідження проведено для комплексів СВС з марковським потоком відмовлень елементів, довільною функцією розподілу часу обслуговування елементів СВС, число яких зростає зворотньо пропорційно інтенсивності їхніх відмовлень так, що сумарне навантаження на систему обслуговування вимог у порядку їхнього надходження є обмеженим зверху величиною, меншою за одиницю.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: сложные восстанавливаемые системы, временной резерв, возвращение элементов, минимальный внутренний резерв.

Рассмотрим комплекс N, в котором работают N однотипных сложных восстанавливаемых систем (СВС), состоящих из n элементов. Каждый элемент с течением времени может отказать. В момент его отказа в одной из СВС возникает требование на обслуживание, которое немедленно поступает в ремонтный орган (РО), представляющий собой однолинейную систему массового обслуживания требований в порядке их поступления. Ремонтный орган осуществляет восстановление (ремонт или замену новым, идентичным исходному). Если в момент восстановления элемента во всех СВС находится не более чем по одному неисправному элементу, то восстановленный элемент занимает свое место в сложной системе, в которой он отказал. Если в этот момент в какой-то СВС есть два или более неисправных элементов, то восстановленный элемент становится на место неисправного элемента, отказавшего ранее остальных в той СВС, в которой в момент восстановления наибольшее число неисправных элементов. Ему присваивается соответствующий номер, требование на его обслуживание немедленно покидает РО, а его номер отдается тому элементу, на место которого он стал.

Состояние комплекса в момент времени t определяет совокупность

$$v(t)=(e^1(t), e^2(t), ..., e^N(t))$$

из N двоичных векторов, каждый из которых определяет состояние соответствующей СВС комплекса

$$e^j(t)=(e_1^j(t),\ e_2^j(t), ...,\ e_n^j(t)),\ \ j=1, 2, ..., N.$$

Здесь $e_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы комплекса находится в исправном состоянии; $e_i^j(t)=1$, если в момент времени t он находится в неисправном состоянии, $i=1, 2, ..., n$, $j=1, 2, ..., N$.

Предположим, что поток отказов элементов, возникающий в каждой СВС, является марковским, т. е. удовлетворяет двум условиям.

1. Если в произвольный момент времени t j-я СВС находится в состоянии e^j, то вероятность отказа на промежутке времени $(t, t+h]$ исправного i-го элемента j-й СВС комплекса при $h\to 0$ составляет $\lambda_i(e^j)\,N^{-1}h+o(h)$.

2. В каком бы из состояний $e^j(t)$ ни находилась j-я СВС комплекса в произвольный момент времени t, вероятность отказа двух и более элементов этой системы на промежутке времени $(t, t+h]$ равна $o(h)$ при $h\to 0$.

Если состояния двух различных k-й и l-й СВС совпадают, т. е. $e^k=e^l$, то интенсивности отказов соответствующих элементов в этих системах одинаковы: для любого i при всех $1\le k<l\le N$ будет $\lambda_i(e^k)N^{-1}=\lambda_i(e^l)\,N^{-1}$. Пусть

$$\lambda N^{-1}=\max_{e^j}\lambda(e^j)\,N^{-1},$$

где $\lambda(e^j)\,N^{-1}$ — суммарная интенсивность, т. е. интенсивность отказа хотя бы одного из исправных элементов j-й СВС комплекса, находящейся в состоянии e^j

$$\lambda(e^j)\,N^{-1}=\sum_{i:e_i^j=0}\lambda_i(e^j)\,N^{-1},\ \ j=1, 2, ..., N.$$

Длины требований (различных элементов или различных отказов одного и того же элемента) есть независимые положительные случайные величины.

Обозначим $G(x)$ функцию распределения длины требования по обслуживанию i-го элемента j-й СВС комплекса, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, N$. Ее n-й момент обозначим $m_n = \int\limits_{x>0} x^n \, d\, G(x)$. Пусть $\rho_0 = \lambda(0)\, m_1$ — начальная нагрузка на РО требований на обслуживание элементов сложных систем комплекса N.

Отказы элементов некоторой СВС на периоде регенерации комплекса могут привести всю сложную систему к отказу. Множество $E^j = \{e^j\}$ всевозможных состояний j-й СВС делится на два непустые непересекающиеся подмножества исправных E_+^j и неисправных E_-^j состояний j-й СВС комплекса, $j=1, 2, \ldots, N$. Предположим также, что $E_+^1 = E_+^2 = \ldots = E_+^N$.

Пусть $\left\| e^j \right\| = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^j$ — число неисправных элементов в j-й СВС и $\min\limits_{e^j \in E_-^j} \left\| e^j \right\| = s > 1$, $j=1,2,\ldots, N$. Если число неисправных элементов в комплексе не превосходит $s-1$, то эта система исправна. Отказ комплекса наступает, если в течение случайного времени ξ в комплексе окажется неисправной хотя бы одна из N входящих в него СВС. Множество $E=\{v\}$ всевозможных состояний комплекса состоит из двух непустых непересекающихся подмножеств исправных E_+ и возможных неисправных E_- состояний комплекса: $v(t) \in E_+$, если в момент времени t все СВС исправны, и $v(t) \in E_-$, если хотя бы одна из них неисправна.

Пусть $H(u) = P(\xi \le u)$ и τ — время до первого отказа комплекса при условии, что в момент времени $t=0$ все элементы всех СВС комплекса исправны,

$$\tau = \inf\{t : v(x) \in E_-, x \in [t, t+\xi] \mid v(0) = (0, \ldots, 0) = 0\} + \xi .$$

Здесь и далее индекс N для простоты опускаем.

Последовательность проходимых случайным процессом $v(t)$ состояний комплекса от начала периода регенерации до момента его первого отказа на этом периоде образует путь $\pi = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, где $v_l \in E_+$ при $l < r$ и $v_r \in E_-$.

Путь π назовем k-слабомонотонным минимальным, если первый отказ комплекса на периоде регенерации наступил в результате отказа k-й СВС, в момент отказа в k-й СВС были неисправны ровно s элементов и больше отказов элементов до этого момента в этой СВС не было. Множество таких путей обозначим Π_c^k. Пусть $\pi \in \Pi_c^k$ — слабомонотонный минимальный путь.

Рассмотрим, как изменяется состояние k-й СВС на этом пути. Пусть $0, e_1^k, e_2^k, ..., e_s^k$ — последовательность состояний k-й системы до момента ее отказа. Эта последовательность образует монотонный минимальный путь π_k, по которому k-я СВС из состояния $\{0\}$ приходит к отказу и $\lambda(\pi_k) = = \lambda_{j_1}(0)\lambda_{j_2}(e_1^k)...\lambda_{j_s}(e_{s-1}^k) > 0$, где $j_1, j_2, ..., j_s$ — номера последовательно отказавших элементов k-й СВС по пути π_k. Множество монотонных минимальных путей, по которым k-я СВС может отказать, обозначим Π_0^k (в дальнейшем, рассматривая отказы в первой СВС, будем опускать индекс $k = 1$).

Пусть $B^{j_1 j_2 ... j_s}(x_1, x_2, ..., x_s, \xi)$ — условная вероятность того, что отказавший в момент x_1 элемент с номером j_1 первой СВС не будет восстановлен до момента времени $x_s + \xi$ при условии, что период занятости РО начался в момент времени x_1 отказом элемента с номером j_1 первой СВС, в момент времени x_2 произошел отказ элемента с номером j_2 первой СВС, ... , в момент времени x_s произошел отказ элемента с номером j_s первой СВС и больше отказов элементов в первой СВС до момента времени x_s не было, $0 < x_1 < x_2 < ... < x_s$. Очевидно, $B^{j_1 j_2 ... j_s}(x_1, x_2, ..., x_s, \xi) = \overline{G}(x_s - x_1 + \xi)$, где $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$.

Обозначим $q_{0c}(\pi) = P(B_0)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет отказ комплекса, что первый его отказ на этом периоде произойдет в результате отказа первой СВС по монотонному минимальному пути π и период занятости РО начнется отказом элемента из первой СВС (первым на периоде регенерации откажет элемент из первой СВС). Обозначим $\Delta_1 = \{(x_2, ..., x_s) : 0 < x_1 < x_2 < ... < x_s\}$. Пусть

$$J_{0,N} = E \int_{\Delta_1} ... \int \exp(-a_1 N^{-1}) \overline{G}(x_s - x_1 + \xi)\, dx_2 ... dx_s,$$

где $a_1 = \lambda(e_1)(x_2 - x_1) + ... + \lambda(e_{s-1})(x_s - x_{s-1})$.

Лемма 1. Справедливо равенство $q_{0c}(\pi) = \dfrac{\lambda(\pi)}{\lambda(0) N^s} J_{0,N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С вероятностью $1/N$ первым на периоде регенерации откажет элемент из первой СВС, и при этом условии с вероятностью $\lambda_{j_1}(0)/\lambda(0)$ первым откажет элемент с номером j_1, и далее, используя формулу полной вероятности, получим

$$q_{0c}(\pi) = \frac{1}{N} \frac{\lambda_{j_1}(\pi)}{\lambda(0)} E \int_{\Delta_1} ... \int \lambda_{j_2}(e_1) N^{-1} \exp(-\lambda(e_1) N^{-1}(x_2 - x_1)] ...$$

$$... \lambda_{j_s}(e_{s-1}) N^{-1} \exp(-\lambda(e_{s-1}) N^{-1}(x_s - x_{s-1})] B^{j_1 j_2 ... j_s}(x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_2 ... dx_s =$$

$$=\frac{\lambda(\pi)}{\lambda(0)\,N^s}E\int\limits_{\Delta_1}...\int \exp(-a_1 N^{-1})\,\overline{G}(x_s-x_1+\xi)\,dx_2\,...\,dx_s=\frac{\lambda(\pi)}{\lambda(0)\,N^s}\,J_{0,N}\,.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть равенство

$$B\;(1,0,,\;x_1,\;x_2,...,\;x_s,\;\xi)=P\,\{\varsigma>x_1,\|e\,(x_1-\;0)\|\geq 1,,\eta_{\text{ост}}(x_1)>x_s-x_1+\xi\}$$

есть условная вероятность того, что период регенерации, начавшись в момент времени $x=0$, не закончится к моменту времени x_1 и поступившее в момент времени x_1 требование на обслуживание j_1-го элемента первой СВС застанет в момент времени x_1 в РО не менее одного требования, обслуживаемого в РО со скоростью единица в момент времени x_1 с остаточным временем дообслуживания в этот момент $\eta_{\text{ост}}(x_1)$, обслуживание которого не закончится до момента времени $x_s+\xi$ при условии, что период регенерации начался в момент времени $x=0$ и в моменты времени $x_1, x_2,..., x_s$ последовательно отказали элементы первой системы с номерами соответственно $j_1, j_2,..., j_s$ $(0<x_1<x_2<...<x_s)$ и больше отказов элементов в первой системе на промежутке времени $(0, x_s)$ не было.

Обозначим $q_{1c}(\pi)=P(B_1)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет отказ комплекса, первый его отказ на этом периоде произойдет в результате отказа первой СВС по монотонному минимальному пути π и отказавший первым в первой СВС элемент застанет в РО на обслуживании со скоростью единица требование, во время обслуживания которого и произойдет отказ первой СВС по монотонному минимальному пути π. Обозначим $\Delta=\{(x_1, x_2,..., x_s):0<x_1<x_2<...<x_s\}$. Пусть

$$J_{1,N}\;=E\int\limits_{\Delta}...\int \exp(-a\;N^{-1})\,B\,(1,0,x_1,x_2,...,x_s,\xi)\,dx_1\;dx_2\;...\,dx_s,$$

где $a=\lambda\,(0)x_1+\lambda\,(e_1)\,(x_2-x_1)+...+\lambda\,(e_{s-1})\,(x_s-x_{s-1})$.

Лемма 2. Справедливо равенство $q_{1c}(\pi)=\dfrac{\lambda(\pi)}{N^s}J_{1,N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле полной вероятности

$$q_{1c}(\pi)=E\int\limits_{\Delta}...\int \lambda_{j_1}(0)\exp[(-\lambda(0)N^{-1}x_1)]\lambda_{j_2}(e_1)\,N^{-1}\exp[-\lambda\,(e_1)N^{-1}(x_2-x_1)]...$$

$$...\lambda_{j_s}(e_{s-1})\,N^{-1}\exp[-\lambda\,(e_{s-1})N^{-1}(x_s-x_{s-1})]B(1,0,\,x_1,...,\,x_s,\,\xi)\,dx_1\;dx_2\;...\,dx_s=$$

$$=\frac{\lambda(\pi)}{N^s}J_{1,N}\,.$$

Лемма 2 доказана.

Пусть равенство $B(1, n, k, x_1, \pi, \xi) = P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1 - 0)\| = n, \ \eta_{\text{ост}}(x_1) + \eta_1 + ... + \eta_k < \xi_2, \xi_2' + \xi_3 + \ ... \ + \xi_s + \xi < \eta_{k+1}\}$ — условная вероятность того, что период регенерации, начавшись в момент времени $x = 0$, не закончится до момента времени x_1, поступившее в момент времени x_1 в РО требование на обслуживание j_1-го элемента первой СВС комплекса застанет в РО одно требование на обслуживании с остаточным временем дообслуживания в этот момент $\eta_{\text{ост}}(x_1)$ и n $(n \geq 1)$ требований в очереди, за время обслуживания этого требования и еще k требований с полным временем обслуживания $\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ не будет отказов элементов в первой СВС, а во время обслуживания следующего по порядку $k+1$-го требования из очереди последовательно откажут элементы первой СВС с номерами $j_2, j_3, ..., j_s$ и после отказа последнего из них это требование будет обслуживаться еще время, не меньшее чем ξ, при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в момент времени x_1 произошел первый на этом периоде отказ элемента из первой СВС с номером j_1 $(0 < x_1)$; ξ_l — время между $l-1$-м и l-м отказами элементов в первой системе, $2 \leq l \leq s$; $\xi_2' = \xi_2 - \eta_{\text{ост}}(x_1) - \eta_1 - ... - \eta_k$ при условии, что $\xi_2 > \eta_{\text{ост}}(x_1) + \eta_1 + ... + \eta_k$; $n = 1, 2, ...,$ $k = 0, 1, ..., n-1$.

Обозначим $q_{2c}(\pi) = P(B_2)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет отказ комплекса, первый его отказ на этом периоде произойдет в результате отказа первой СВС по монотонному минимальному пути π и в момент первого отказа элемента в первой СВС на этом периоде в РО будет не менее одного требования, одно из которых в этот момент будет обслуживаться со скоростью единица, и за время его обслуживания отказов элементов в первой СВС не будет.

Пусть $P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1 - 0)\| = n\}$ — условная вероятность того, что период регенерации, начавшись в момент времени $x = 0$, не закончится до момента времени x_1, поступившее в момент времени x_1 в РО требование на обслуживание j_1-го элемента первой СВС комплекса застанет в этот момент в РО n требований из систем, отличных от первой, при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$ и в момент времени x_1 произошел первый на этом периоде отказ элемента из первой СВС с номером $j_1 (0 < x_1)$. Обозначим

$$J_{2,N} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_1 > 0} \exp[-\lambda(0) N^{-1} x_1] P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1 - 0)\| = n\} \times$$

$$\times E \exp\{-\lambda(e_1) N^{-1} [\eta_{\text{ост}}(x_1) + \eta_1 + ... + \eta_k]\} \, dx_1.$$

Лемма 3. Справедливо равенство $q_{2c}(\pi)=\dfrac{\lambda(\pi)}{N^s}J_{0,N}J_{2,N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу отсутствия последействия для показательного закона распределения $B(1,n,k,x_1,\pi)=P\{\varsigma>x_1,\|e(x_1-0)\|=$ $=n,\eta_{\text{ост}}(x_1)+\eta_1+\ldots+\eta_k<\xi_2\}\,P\{\xi_2'+\xi_3+\ldots+\xi_s+\xi<\eta_{k+1}\}$. Второй множитель в этом произведении может быть найден в виде

$$P\{\xi_2'+\xi_3+\ldots+\xi_s+\xi<\eta_{k+1}\}=\frac{\lambda(\pi)}{\lambda_{j_1}(0)N^{s-1}}J_{0,N}.$$

По формуле полной вероятности с использованием двух последних равенств, меняя порядок интегрирования и суммирования, находим

$$q_{2c}(\pi)=\int\limits_{x_1>0}\lambda_{j_1}(0)\,N^{-1}\exp[-\lambda(0)\,N^{-1}x_1]\sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1}B(1,n,k,x_1,\pi,\xi)\,dx_1=$$

$$=\frac{\lambda(\pi)}{N^s}J_{0,N}\sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_1>0}\exp[-\lambda(0)\,N^{-1}\,x_1]\,P\{\varsigma>x_1,\|e(x_1-0)\|=n\}\times$$

$$\times E\exp\{-\lambda(e_1)N^{-1}[\eta_{\text{ост}}(x_1)+\eta_1+\ldots+\eta_k]\}\,dx_1=\frac{\lambda(\pi)}{N^s}J_{0,N}J_{2,N}.$$

Лемма 3 доказана.

Обозначим $q_c(\pi)=P(B)$ вероятность того, что на периоде регенерации комплекса произойдет отказ комплекса и первый его отказ произойдет в результате отказа первой СВС по монотонному минимальному пути $\pi\in\Pi_0^1$.

Лемма 4. Справедливо равенство $q_c(\pi)=q_{0c}(\pi)+q_{1c}(\pi)+q_{2c}(\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из введенных выше определений следует, что случайное событие B представляется в виде суммы трех попарно несовместных случайных событий $B=B_0+B_1+B_2$. Отсюда, из аксиомы теории вероятностей и введенных определений следует, что

$$q_c(\pi)=P(B)=P(B_0+B_1+B_2)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)=$$

$$=q_{0c}(\pi)+q_{1c}(\pi)+q_{2c}(\pi).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если существует конечный момент $m_{s-1}<\infty$, то $J_{0,N}\leq\dfrac{m_{s-1}}{(s-1)!}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения $0<x_1<x_2<\ldots<x_s$ и $\xi\geq 0$ следуют неравенства $a_1\geq\lambda(e_1)(x_2-x_1)+\ldots+\lambda(e_{s-1})(x_s-x_{s-1})>0$, $\overline{G}(x_s-x_1+\xi)\leq$

$\leq \overline{G}(x_s - x_1)$ и $\exp(-a_1 N^{-1}) < 1$. Отсюда и из монотонности интеграла следует, согласно условию леммы 5,

$$J_{0,N} = \int\limits_{\Delta_1}\!\ldots\!\int \exp(-a_1 N^{-1})\, \overline{G}(x_s - x_1 + \xi)\, dx_2 \ldots dx_s \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Delta_1}\!\ldots\!\int \overline{G}(x_s - x_1)\, dx_2 \ldots dx_s = \int\limits_{x>0} \frac{x^{s-2}}{(s-2)!}\, \overline{G}(x)\, dx = \frac{m_{s-1}}{(s-1)!} < \infty.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. В условиях леммы 5 при $N \to \infty$

$$J_{0,N} \to \int\limits_{u \geq 0} dH(u) \int\limits_{t>u} \frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\, \overline{G}(t)\, dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $N \to \infty$ $\exp[-a_1 N^{-1}] \to 0$. Отсюда и из леммы 5 по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$J_{0,N} \to E \int\limits_{\Delta_1}\!\ldots\!\int \overline{G}(x_s - x_1 + \xi)\, dx_2 \ldots dx_s = \int\limits_{u \geq 0} dH(u) \int\limits_{t>u} \frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\, \overline{G}(t)\, dt.$$

Лемма 6 доказана.

Пусть $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ — комплекс, в котором $\lambda(0)$ есть суммарная интенсивность отказов элементов в период незанятости РО (когда все элементы комплекса исправны), а в период занятости — λ, длины поступающих в РО требований независимы и одинаково распределены с функцией распределения $G(x)$.

Пусть $B_\lambda(1, 0, x_1, x_2, \ldots, x_s) = P\{\hat{\xi} > x_1, \|\hat{e}(x_1 - 0)\| \geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) > x_s - x_1\}$ — условная вероятность того, что в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ период регенерации, начавшийся в момент времени $x = 0$, не закончится до момента времени x_1, в момент $x_1 - 0$ в РО в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ будет не менее одного требования и оставшееся время дообслуживания обслуживаемого со скоростью единица в этот момент требования будет больше, чем $x_s - x_1$ при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$.

Лемма 7. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_s < \infty$. Тогда

$$\int\limits_{\Delta}\!\ldots\!\int B_\lambda(1, 0, x_1, x_2, \ldots, x_s)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s = \frac{m_s}{(1-\rho)\, s!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предельной теореме для регенерирующих процессов [1, 2]

$$\int\limits_{\Delta}\!\ldots\!\int B_{\lambda}(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_s=$$

$$=\int\limits_{x_1>0}dx_1\int\limits_{0<x_2<\ldots<x_s}\!\!\ldots\int P\{\hat{\xi}>x_1,\|\hat{e}(x_1-0)\|\geq 1,\ \eta_{\text{ост}}(x_1)>x_s-x_1\}\,dx_2\ldots dx_s=$$

$$=\frac{m_1}{(1-\rho)}\int\limits_{0<x_2<\ldots<x_s}dx_2\ldots dx_s\int\frac{1}{m_1}\int\limits_{t>x_s}\overline{G}(t)\,dt=\frac{1}{(1-\rho)}\int\limits_{0<x_2<\ldots<x_s<t}\!\!\ldots\int\overline{G}(t)\,dx_2\ldots dx_s dt=$$

$$=\frac{1}{(1-\rho)}\int\limits_{t>0}\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\overline{G}(t)\,dt=\frac{m_s}{(1-\rho)\,s!}.$$

Лемма 7 доказана.

Пусть $\Delta(z)=\{(x_1,x_2,\ldots,x_s):0<x_1<x_2<\ldots<x_s<z\}$ и $|\Delta(z)|=\dfrac{z^s}{s!}$.

Лемма 8. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_s<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$\left|J_{1,N}-E\int\limits_{\Delta}\!\ldots\!\int B(1,0,x_1,\ldots,x_s,\xi)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_s\right|\to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon>0$ и зафиксируем. Из леммы 7 следует, что для выбранного $\varepsilon>0$ существует $z=z(\varepsilon)$ такое, что для любого $z\geq z(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}B_{\lambda}(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s)\,dx_1dx_2\ldots dx_s<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Из определения и теоремы 1 [3] следует, что для любого $\xi\geq 0$

$$B(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s,\xi)\leq B(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s)\leq B_{\lambda}(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s).$$

Отсюда, из (1) и монотонности интеграла следует, что для любого $\xi\geq 0$

$$\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}B(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s,\xi)\,dx_1dx_2\ldots dx_s<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, из неравенства $1-\exp(-aN^{-1})<1$ и монотонности интеграла для любого $\xi\geq 0$ следует неравенство

$$\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!\ldots\int[1-\exp(-a\,N^{-1})]\,B(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s,\xi)\,dx_1dx_2\ldots dx_s<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Из определения следует $a \le \lambda\, x_s < \lambda\, z$. Для выбранного $z \ge z(\varepsilon)$ существует такое $N = N(z(\varepsilon))$, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$

$$0 \le 1 - \exp(-a N^{-1}) < 1 - \exp(-\lambda\, z\, N^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и неравенства $0 \le B(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi) \le 1$ для любого $\xi \ge 0$ следует, что для любого $N > N(z(\varepsilon))$ и для любого $\xi \ge 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Delta(z)} ... \int [1 - \exp(-aN^{-1})]\, B(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что для всех $N > N(z(\varepsilon))$ и для любого $\xi \ge 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Delta} ... \int [1 - \exp(-aN^{-1})]\, B(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_s < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $N > N(z(\varepsilon))$

$$E \int\limits_{\Delta} ... \int [1 - \exp(-aN^{-1})]\, B(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_s < \varepsilon,$$

$$\left| J_{1,N} - E \int\limits_{\Delta} ... \int B(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_s \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех $N > N(\varepsilon)$

$$\left| J_{1,N} - E \int\limits_{\Delta} ... \int B(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_s \right| < \varepsilon.$$

Лемма 8 доказана.

Пусть $\lambda_{-}(0) = \lambda\,(0)\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Обозначим $B_0^{-}(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi)$ и $B_0(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi)$ соответственно в комплексах $N_{\lambda_{-}(0), G}$ и $N_{\lambda(0), G}$ условную вероятность того, что период регенерации, начавшись в момент времени $x = 0$, не закончится к моменту времени x_1 и поступившее в момент времени x_1 требование на обслуживание элемента первой СВС застанет в момент времени x_1 в РО не менее одного требования, обслуживаемого в РО со скоростью единица в момент времени x_1 с остаточным временем дообслуживания в этот момент $\eta_{\text{ост}}(x_1)$, обслуживание которого не закончится до момента времени $x_s + \xi$ при условии, что период регенерации начался в момент времени $x=0$ и в моменты времени $x_1, x_2, ..., x_s$ последовательно отказали элементы первой системы с номерами соответственно $0< x_1 < x_2 < ...< x_s$ и больше отказов элементов в первой системе на промежутке времени $(0, x_s)$ не было. Обозначим $\Pi_\lambda(t)$ число требований пуассоновского потока с параметром λ, возникших на промежутке времени $(0, t]$ в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$.

Лемма 9. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_s<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$\left| E\int_\Delta\!\!...\!\int B(1,0,x_1,x_2,...,x_s,\xi)\,dx_1\,...\,dx_s - E\times \right.$$
$$\left. \times \int_\Delta\!\!...\!\int B_0^-(1,0,x_1,x_2,...,x_s,\xi)\,dx_1\,...\,dx_s \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon>0$. Из леммы 7 следует, что существует такое положительное число $z=z(\varepsilon)$, что для любого $z\geq z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!...\!\int B_\lambda(1,0,x_1,x_2,...,x_s)\,dx_1\,dx_2\,...\,dx_s<\frac{\varepsilon}{6}. \qquad (4)$$

Из неравенства $\xi\geq 0$ теоремы 1 и леммы 5 из работы [3] соответственно вытекают неравенства для любого $\xi\geq 0$

$$\begin{gathered} B(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\leq B(1,0,x_1,...,x_s)\leq B_\lambda(1,0,x_1,...,x_s), \\ B_0^-(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\leq B(1,0,x_1,...,x_s)\leq B_\lambda(1,0,x_1,...,x_s). \end{gathered} \qquad (5)$$

Из (4), (5) и монотонности интеграла следует, что для любого $\xi\geq 0$

$$\begin{gathered} \int_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!...\!\int B(1,0,x_1,...,x_s)\,dx_1\,...\,dx_s<\frac{\varepsilon}{6}, \\ \int_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!...\!\int B_0^-(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\,dx_1\,...\,dx_s<\frac{\varepsilon}{6}. \end{gathered} \qquad (6)$$

Из аксиомы непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l=l(\varepsilon)$, что для любого $l\geq l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_\lambda(z)>l)<\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и из неравенства $x_1 < x_s < z$ следует

$$P(\Pi_{\lambda_-}(x_1) > l) < P(\Pi_\lambda(x_1) > l) < P(\Pi_\lambda(z) > l) < \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}.$$

Пусть R_l^- — случайное событие, состоящее в том, что первые l требований пуассоновского потока с параметром λ_- все будут из различных систем. Из леммы 2 [3] следует, что для выбранного ε существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$

$$P(R_l^-) > 1 - \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}.$$

Пусть $A = \{\Pi_{\lambda_-}(x_1) \le l\} R_l^-$ и $I(A)$ — индикатор случайного события A. Тогда для любого $\xi \ge 0$

$$B(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi) = P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) > x_s - x_1 + \xi\} =$$
$$= P\{\varsigma I(A) > x_1, I(A)\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(A) > x_s - x_1 + \xi\} +$$
$$+ P\{\varsigma I(\overline{A}) > x_1, I(\overline{A})\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(\overline{A}) > x_s - x_1 + \xi\}. \quad (7)$$

Аналогично для любого $\xi \ge 0$

$$B_0^-(1, 0, x_1, x_2, ..., x_s, \xi) = P\{\varsigma_0^- > x_1, \|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) > x_s - x_1 + \xi\} =$$
$$= P\{\varsigma_0^- I(A) > x_1, I(A)\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(A) > x_s - x_1 + \xi\} +$$
$$+ P\{\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, I(\overline{A})\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(\overline{A}) > x_s - x_1 + \xi\}. \quad (8)$$

Из леммы 4 [3] следует, что для любого $\xi \ge 0$

$$\{\varsigma(\omega, \alpha) I(A) > x_1, I(A)\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(A) > x_s - x_1 + \xi\} =$$
$$= \{\varsigma_0^-(\omega, \alpha) I(A) > x_1, I(A)\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(A) > x_s - x_1 + \xi\}. \quad (9)$$

Поскольку для любого $\xi \ge 0$

$$P\{\varsigma I(\overline{A}) > x_1, I(\overline{A})\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(\overline{A}) > x_s - x_1 + \xi\} \le$$
$$\le P(\overline{A}) \le P(\Pi_\lambda(x_1) > l) + P(\overline{R}_l) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|} \quad (10)$$

и

$$P\{\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, I(\overline{A})\|e(x_1 - 0)\| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) I(\overline{A}) > x_s - x_1 + \xi\} \le$$
$$\le P(\overline{A}) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|}, \quad (11)$$

из (7) — (11) получаем для любого $\xi \ge 0$

$$\left| B(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi) - B_0^-(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi) \right| < \frac{2\varepsilon}{3|\Delta(z)|}. \tag{12}$$

Из свойства интеграла и (12) следует, что для любого $\xi \ge 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta(z)} \!\!...\!\! \int B(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s - \int\limits_{\Delta(z)} \!\!...\!\! \int B_0^-(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\Delta(z)} \!\!...\!\! \int \left| B(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi) - B_0^-(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi) \right| dx_1 \ldots dx_s \le$$

$$\le \int\limits_{\Delta(z)} \!\!...\!\! \int \frac{2\varepsilon}{3|\Delta(z)|}\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Из (6) и (13) следует, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$ и любого $\xi \ge 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta} \!\!...\!\! \int B(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s - \int\limits_{\Delta} \!\!...\!\! \int B_0^-(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \!\!...\!\! \int B(1,0,x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s \right| + \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \!\!...\!\! \int B_0^-(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\Delta(z)} \!\!...\!\! \int B(1,0,x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s - \int\limits_{\Delta(z)} \!\!...\!\! \int B_0^-(1,0,x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$

$$E \left| \int\limits_{\Delta} \!\!...\!\! \int B(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s - \int\limits_{\Delta} \!\!...\!\! \int B_0^-(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \ldots dx_s \right| < \varepsilon,$$

$$\left| E \int\limits_{\Delta} \!\!...\!\! \int B(1,0,x_1,x_2,...,x_s,\xi) dx_1 \ldots dx_s - E \int\limits_{\Delta} \!\!...\!\! \int B_0^-(1,0,x_1,x_2,...,x_s,\xi) dx_1 \ldots dx_s \right| < \varepsilon.$$

Лемма 9 доказана.

The asymptotic fault-free lifetime distribution is found for the set of complex restorable systems (CRS) with the time reserve and with the return of restored elements into the systems with the minimum internal reserve from the moment when the correct operation of all elements of all CRS is set. The study was carried out for the CRS sets with Markovian flow of element faults, arbitrary service time distribution function of CRS elements, the number of which increases inversely proportional to the fault rate, so that the total load of the request processing system is limited from above by the value less than one.

1. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М. : Наука, 1967. — 244 с.
2. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М. : Сов. радио, 1967. — 299 с.
3. *Макаричев А. В.* Асимптотические оценки периода регенерации комплексов сложных восстанавливаемых систем при различных дисциплинах обслуживания// Электрон. моделирование. — 2003. — **25**, № 2. — С. 83—97.

Поступила 17.03.08

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского государственного автомобильно-дорожного технического университета. В 1981 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований – теория вероятностей и математическая статистика и их применение, теория массового обслуживания, математическая теория надежности, теория оптимизации характеристик случайных процессов, расширяющиеся комплексы сложных восстанавливаемых систем.