УДК 536.24.

В. А. Яковенко, канд. физ.-мат. наук
Академия таможенной службы Украины
(Украина, 49000, Днепропетровск, ул. Дзержинского, 2/4,
тел. (0562) 7452168, E-mail: yakovenko@ua.fm)

Математическое моделирование теплообмена при микроволновом разогреве загустевших нефтепродуктов с учетом конечной скорости распространения тепла

Построена математическая модель микроволнового разогрева тела конечных размеров и теплообмена при его фазовом превращении с учетом конечной скорости распространения тепла. Получены распределения полей температур в жидкой и твердой фазах и закон движения границы раздела фаз.

Побудовано математичну модель мікрохвильового розігріву тіла кінцевих розмірів і теплообміну при його фазовому перетворенні з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Отримано розподіли полів температур у рідкій і твердій фазах і закон руху границі розподілу фаз.

Ключевые слова: моделирование, микроволновая энергия, теплообмен, подвижная граница.

При разгрузке больших масс нефтепродуктов в зимнее время, как правило, используют перегретый пар. Паровая технология очистки загрузочных емкостей крайне неэффективна, поскольку проникновение тепла в продукт происходит только с поверхности и за счет теплопроводности. При этом значительная часть энергии пара расходуется на разогрев корпуса емкости. При большом количестве продукта и низкой температуре окружающей среды процесс разогрева длится очень долго и требует больших материальных затрат. Это влечет за собой дальнейшую переработку и сепарацию разогретого нефтепродукта, для чего требуются специальные сооружения. Загрязненность территорий, прилегающих к заполненным вязкими продуктами емкостям, всегда очень велика. Универсальным решением этой проблемы является технология разогрева загустевших вязких нефтепродуктов энергией микроволнового электромагнитного поля [1, 2].

Высокая эффективность способа обусловлена следующими факторами:

микроволновое излучение направляется в массу продукта и разогревает ее изнутри;

низкая теплопроводность продукта не только не препятствует разогреву, а напротив, способствует ему;

излучаемые колебания многократно проходят через продукт, а металлический корпус емкости почти без потерь отражает эти колебания и направляет их на разогреваемый объект;

отсутствуют потери микроволновой энергии на излучение в окружающую среду, корпус емкости нагревается незначительно, тепловое излучение в атмосферу практически минимально.

Разогрев вещества происходит в результате воздействия энергии межмолекулярного трения, возникающего под воздействием высокочастотного электромагнитного поля. Эффективность преобразования электромагнитной энергии в тепловую находится, как известно, в прямой зависимости от частоты колебаний, диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь разогреваемого вещества. Вследствие диэлектрических потерь в загустевшем нефтепродукте возможно согласование работы микроволнового генератора и емкости, при котором до 90 % электромагнитной энергии внутри продукта преобразуется в тепло [3—5].

Известно, что модель теплопроводности Фурье обладает рядом недостатков, главным из которых является бесконечная скорость распространения возмущения температуры. Чтобы устранить этот недостаток была постулирована новая модель [6], согласно которой распространение тепла в твердых телах описывается уравнением демпфированных волн вида

$$q = -\lambda \nabla U - \tau \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{1}$$

где вектор теплового потока q и температура U — зависимые переменные, радиус-вектор x и время t — независимые переменные. Коэффициентом переноса для этой модели являются теплопроводность λ и время температурной релаксации τ. После подстановки соотношения (1) в уравнение энергии для упругого твердого тела получаем релаксационную форму уравнения теплопроводности (уравнение гиперболического типа):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + S, \tag{2}$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности, S — источник тепла, обусловленный действием микроволновой энергии.

Уравнение (2) описывает поведение затухающей температурной волны с конечной скоростью распространения: $u = a / \sqrt{\tau}$. При $\tau \to 0$ это уравнение принимает обычную параболическую форму, а релаксационное уравнение (1) переходит в модель Фурье для теплового потока.

Следует заметить, что с учетом большинства практических задач теории теплопроводности влияние конечной скорости распространения тепла незначительно, поскольку величина коэффициента температуропроводности на несколько порядков меньше величины квадрата скорости распространения тепловых волн. Однако учет конечной скорости распределения тепла оказывается важным при низких температурах, при больших потоках тепла для процессов, рассматриваемых в пределах малых времен.

Быстро протекающие процессы с большими тепловыми потоками характерны для плавления загустевших нефтепродуктов в емкостях при воздействии микроволнового нагрева. В этой связи представляет интерес получить решение одномерной задачи о плавлении тела конечных размеров с учетом конечной скорости распространения тепла.

Постановка задачи. Рассмотрим нестационарный процесс теплообмена при разогреве нефтепродуктов в условиях фазового преобразования, возникающего под воздействием энергии микроволнового электромагнитного поля. Такой процесс будем определять системой нелинейных дифференциальных уравнений в частях производных, которая состоит из уравнений Максвелла и уравнений теплопроводности:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \tau},\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau},\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon(t)\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu(t)\mathbf{H},\ \mathbf{j} = \sigma(t)\mathbf{E}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(c_i\rho_i t_i)}{\partial \tau} + \mathbf{V}_i \nabla t_i = \operatorname{div}(\lambda_i \nabla t_i) + S(t_i, \mathbf{E}) \quad ,$$

где **E** и **H** — векторы напряженности электрического и магнитного полей; **D** и **B** — векторы электрической и магнитной индукции; **j** — плотность тока проводимости; $\varepsilon_i = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon' - i\sigma/\omega$ и μ — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала; σ — проводимость материала; ω — круговая частота; c_i, ρ_i и λ_i — коэффициент теплоемкости, плотность и коэффициент теплопроводности материала, зависящие от температуры *i*-й фазы; $\mathbf{V}_i$ — вектор скорости перемещения *i*-го материала; ∇ — оператор Гамильтона; $q = 0{,}5\,\omega\varepsilon'\,\mathrm{tg}\delta\,|\mathbf{E}|^2$ — удельная поглощенная мощность; t_i — температура *i*-го материала; $\mathrm{tg}\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ — тангенс угла диэлектрических потерь материала.

Система уравнений (3) дополняется начальными и предельными условиями, а также условием на границе раздела фаз. Следует заметить, что решение системы (3) связано с трудностями не только вычислительными, но и принципиальными. Такое утверждение основано на следующем:

условия на границе раздела фаз являются нелинейными;

сформулированная модель многомерна относительно пространственных переменных;

электрофизические параметры материалов зависят от температуры и являются приближенными;

алгоритмы решения таких задач требуют обоснования и использования специальных компьютерных технологий.

В связи с этим рассмотрим упрощенную модель процесса, реализацию которой проведем методами компьютерного моделирования. Следует доказать адекватность такой модели известным моделям или сравнить полученные результаты с экспериментальными.

Пусть тело конечных размеров $0 < x < L$ в начальный момент времени находится в двухфазном состоянии: жидком и твердом. Эти фазы отделены друг от друга движущейся границей. Предположим, что времена релаксации в жидкой и твердой фазах, а также их плотности одинаковы.

В области $0 < x < \xi(t)$, занимаемой жидкой фазой, краевая задача имеет следующий вид:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \; u_1(0,x) = u_c, \; \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$
$$u_1(t,0) = u_c, \; u_1(t,\xi) = u_\phi. \tag{4}$$

Для твердой фазы $\xi(t) < x < L$ задача задается уравнением

$$\tau_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S,$$

с краевыми условиями

$$u_2(x,0) = u_0, \; \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$
$$u_2(t,\xi) = u_\phi, \; u_2(t,L) = u_0. \tag{5}$$

Условие Стефана на изотермической границе раздела фаз имеет вид

$$q_1[t,\xi(t)] - q_2[t,\xi(t)] = M_\rho \frac{d\xi}{dt}. \tag{6}$$

Используя соотношение (1), вектор теплового потока представим в явном виде:

$$q = -\frac{\lambda}{\tau} \int_0^t \nabla \exp\left[-\frac{(t-\eta)}{\tau}\right] d\eta. \tag{7}$$

Тогда условие (6) с учетом зависимости (7) можно представить в виде

$$\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)} - \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)} = M_\rho \left(\tau \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d\xi}{dt} \right),$$

где

$$\tau = \tau_1 = \tau_2;\ \xi(0) = \xi_0;\ \frac{d\xi}{dt}\bigg|_{t=0} = 0\,.$$

Решение задачи. Следуя методике построения решения, изложенной в [7], введем новые функции:

$$\upsilon_1(x,\,t) = u_1(x,\,t) - u_c - (u_\phi - u_c)\frac{x}{\xi(t)},$$

$$\upsilon_2(x,\,t) = u_2(x,\,t) - u_\phi - (u_0 - u_\phi)\frac{x - \xi(t)}{L - \xi(t)},$$

для которых граничные условия (4) и (5) преобразуются к однородным.

Относительно функций $\upsilon_1(x,t)$, $\upsilon_2(x,t)$, $\xi(t)$ рассматриваемая задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial x^2} + \frac{(u_\phi - u_c)\,x}{\xi^2}\left[\dot\xi + \frac{\tau_1(\dot\xi\xi - 2\dot\xi^2)}{\xi}\right],$$

$$\upsilon_1(x,0) = (u_c - u_\phi)\frac{x}{\xi_0},\ \frac{\partial \upsilon_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0\,,$$

$$\upsilon_1(0,t) = \upsilon_1(\xi,t) = 0\,,$$

$$\tau_2 \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial x^2} - \frac{(u_0 - u_\phi)(x - L)}{(L-\xi)^2}\left\{\frac{\tau_2[\ddot\xi(L-\xi) + 2\dot\xi^2]}{(L-\xi)} + \dot\xi\right\} + S,$$

$$\upsilon_2(x,0) = (u_0 - u_\phi)(L - \frac{x - \xi_0}{L - \xi_0},\ \frac{\partial \upsilon_2}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,$$

$$\upsilon_2(\xi,t) = \upsilon_2(L,t) = 0\,,$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} - \lambda_1 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = M_\rho\left(\tau\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d\xi}{dt}\right) - \frac{\lambda_2(u_0 - u_\phi)}{l - \xi} + \frac{\lambda_1(u_\phi - u_c)}{\xi}, \qquad (8)$$

$$\xi(0) = \xi_0,\ \dot\xi(0) = 0\,.$$

Распределение температур $\upsilon_1(x,t), \upsilon_2(x,t)$ в жидкой и в твердой фазах представим в виде

$$\upsilon_1(x,t)=\frac{2}{\xi(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sin\frac{n\pi}{\xi}x, \tag{9}$$

$$\upsilon_2(x,t)=\frac{2}{L-\xi(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)\sin\frac{n\pi\,[x-\xi(t)]}{L-\xi(t)}. \tag{10}$$

Для коэффициентов $\alpha_n(t)$ и $\beta_n(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно имеют вид

$$\tau_1\frac{d^2\alpha_n}{dt^2}+\frac{d\alpha_n}{dt}+\left(\frac{n\pi d_1}{\xi}\right)^2\alpha_n=\frac{\dot{\xi}}{2\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\lambda_m+\frac{\tau_1\dot{\xi}^2}{\xi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\alpha_m+$$

$$+\frac{\tau\xi}{\dot{\xi}}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\frac{d\alpha_m}{dt}+\frac{\tau_1\xi}{2}\left(\frac{\ddot{\xi}}{\xi^2}-\frac{2\dot{\xi}_2}{\xi^3}\right)\times\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\alpha_m+$$

$$+\frac{2\dot{\xi}^2\tau_1}{\xi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta_{mn}\alpha_n+(-1)^{n+1}\frac{(u_\phi-u_c)}{n\pi}\left[\dot{\xi}+\frac{\tau_1-2\dot{\xi}^2}{\xi}\right], \tag{11}$$

$$\alpha_n(0)=\frac{(-1)^{n+1}(u_c-u_\phi)\xi}{n\pi},\quad \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_{t=0}=0,$$

$$\gamma_{mn}=1,\ \Delta_{nm}=(2\pi^2 m-3)/12,\ m=n,$$

$$\gamma_{nm}=\frac{4(-1)^{n+m}mn}{m^2-n^2},\ \Delta_{nm}=\frac{4(-1)^{m+n}mn^3}{(m^2-n^2)^2},\ m\neq n,$$

$$\tau_2\frac{d^2\beta_n}{dt^2}+\frac{d\beta_n}{dt}+\frac{(n\pi a_2)^2}{l-\xi}\beta_n=\frac{\dot{\xi}}{2(L-\xi)}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_{nm}\beta_n+\frac{\dot{\xi}(L-\dot{\xi})\tau_2}{(L-\xi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{nm}\beta_n+$$

$$+\frac{\dot{\xi}\tau_2}{L-\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{nm}\frac{d\beta_n}{dt}+\frac{\tau_2[2\dot{\xi}^2+\ddot{\xi}(L-\xi)]}{(L-\xi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_{nm}\beta_m+\frac{\xi^2\tau_2}{(L-\xi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}\beta_n+$$

$$+\frac{(u_0-u_\phi)}{n\pi}-\left\{\dot{\xi}+\frac{\tau_2[\ddot{\xi}(L-\xi)+2\dot{\xi}^2]}{L-\xi}\right\}+\int_{\xi}^{L}S\times\sin\frac{n\pi\,[x-\xi(t)]}{L-\xi(t)}dx, \tag{12}$$

$$\beta_n(0)=\frac{(u_0-u_\phi)(L-\xi_0)}{n\pi}, \tag{13}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2008. V. 30. № 5

$$\left.\frac{d\beta_n}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

$$\Omega_{nm} = -1, \delta_{nm} = \Omega_{nm}, \ \omega_{nm} = -\frac{1}{6}(8\pi^2 m^2 - 3), \ n = m,$$

$$\Omega_{nm} = -4nm/(m^2 - n^2), \ \delta_{nm} = 2\Omega_{nm},$$

$$\omega_{nm} = -8mn^3/(m^2 - n^2)^2, \ m \neq n.$$

Соотношение на границе раздела фаз (8) с учетом зависимостей (9) и (10) принимает вид

$$\tau \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{M_\rho}\left[\frac{\lambda_2(u_\phi - u_0)}{L-\xi} + \frac{\lambda_1(u_\phi - u_0)}{\xi}\right] +$$

$$+\frac{2\lambda_1\pi}{\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \alpha_n - \frac{2\lambda_2\pi}{(L-\xi)^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n = 0,$$

$$\xi(0) = \xi_0, \ \dot{\xi}(0) = 0.$$

Выводы. Полученные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (11) — (13) позволяют находить значения $\alpha_n(t), \beta_n(t), \xi(t)$ по известным начальным значениям. Если закон движения границы раздела фаз задан исходя из физических соображений, то система дифференциальных уравнений будет линейной. При $\tau \to 0$ полученные результаты стремятся к соответствующим результатам задачи Стефана, основанной на теории Фурье [8].

The mathematical model of a finite body microwave warming and of the heat exchange during its phase transformation with account of the finite heat transfer rate is constructed. Distributions of temperature fields in liquid and solid phases and the law of phase boundary motion are found.

1. *Архангельский Ю. С., Девяткин И. И.* Сверхвысокочастотные нагревательные установки для интенсификации технологических процессов. — Саратов : изд-во Саратовского ун-та, 1983. — 140 с.
2. *Рудаков В. И.* Применение СВЧ технологий в энергоемких производственных процессах // Тр. Междунар. конф. по теории и техники антенн «МКТТА-95». — Харьков : изд-во Харьковского нац. ун-та радиоэлектроники 1995. — С. 102.
3. *Морозов Г. А.* Перспективы использования микроволновых технологий при разработке высоковязких нефтей // Тр. науч.-практич. конф. 6-й Междунар. спец. выст. «Нефть—газ — 99». Т. 1. — Казань: Экоцентр, 1999. — С. 242 — 248.
4. *Кислицын А. А., Нигматуллин Р. И.* Численное моделирование процесса нагрева нефтяного пласта высокочастотным электромагнитным излучением // ПМТФ. — 1990. — № 4. — С. 97 — 103.

5. *Ковалева Л. А., Насыров Н. М., Хайдар А. М.* Математическое моделирование высокочастотного электромагнитного нагрева призабойной зоны горизонтальных нефтяных скважин // ИФЖ. — 2004. —**77,** № 6. — С. 105—110.
6. *Лыков А. В.* Теплообмен. — М. : Энергия, 1971. — 560 с.
7. *Яковенко В. А., Коряшкина Л. С.* О решении одной задачи теплопереноса с фазовым превращением // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Дніпропетровськ: Ред.- вид. відділ ДНУ, 2003. — С. 100—113.
8. *Яковенко В. О., Коряшкіна Л. С.* Доведення єдиності розв'язку однієї задачі теплопереносу з фазовим перетворенням // Наук. вісник Національного гірничого університету. — 2004. — № 1. — С. 64—69.

Поступила 14.03.08

ЯКОВЕНКО Вадим Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Академии таможенной службы Украины. В 1993 г. окончил Днепропетровский национальный университет. Область научных исследований — математическое моделирование процессов переноса под действием энергии микроволнового электромагнитного поля в областях с подвижными границами.