

УДК 519.213.1:517.582

В. С. Годлевский, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4241063, E-mail: ipme@ipme.kiev.ua)

Метод быстрого расчета вероятностей для векторов с нормальными распределениями и его применение

(Статью представил д-р техн. наук А.Ф. Верлань)

Описан метод приближенного вычисления многомерных нормальных интегралов при больших размерностях, который сводится к аппроксимации исходного интеграла произведением интегралов малых размерностей с учетом всех коэффициентов корреляционной матрицы. Рассмотрено применение метода в задачах вычисления вероятностей на основе непараметрических оценок плотностей распределения и при косвенном контроле сложных систем.

Описано метод наближеного обчислення багатовимірних нормальних інтегралів при великих розмірностях, який полягає у апроксимації початкового інтеграла добутком інтегралів малих розмірностей з урахуванням всіх коефіцієнтів кореляційної матриці. Розглянуто застосування методу в задачах обчислення вірогідності на базі непараметричних оцінок густини розподілу і при непрямому контролі складних систем.

К л ю ч е в ы е с л о в а: многомерное нормальное распределение, корреляционная матрица, многомерные нормальные интегралы, непараметрическая оценка плотности распределения вероятности, косвенный контроль многомерных систем.

Необходимость вычисления вероятности

$$P(X \in D) = \int_D \frac{1}{\sqrt{2^n \pi^n |K|}} e^{-\frac{1}{2}(U-M)^T K^{-1}(U-M)} dU \quad (1)$$

попадания n -мерного случайного нормально распределенного вектора $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, где T — индекс транспонирования, с математическим ожиданием $M = (M_1, \dots, M_n)^T$ и корреляционной матрицей $K = \{k_{ij}\}_1^n$ в

гиперпараллелепипед $D = \bigcap_{i=1}^n (a_i, b_i)$, где a_i, b_i — нижний и верхний пре-

делы для i -го элемента вектора X , возникает при решении многих задач. Например, при решении задач контроля и диагностики многопарамет-

рических устройств и систем, расчета и обеспечения показателей точности технических и экономических систем, их математического и компьютерного моделирования. Обработка случайных функций с помощью дискретных фильтров Калмана и Пугачева [1] в стохастических системах в ряде случаев также приводит к задаче вычисления или оценки интегралов типа (1).

Метод вычисления многомерных нормальных интегралов. Вычисление многомерных интегралов в (1) при больших размерностях с помощью квадратурных формул типа формул Гаусса даже на современных суперкомпьютерах является весьма трудоемкой задачей уже при $n \geq 100$ и числе узлов от 10 до 15. Трудоемкость решения этой задачи значительно увеличивается при параметрическом синтезе различных систем с учетом их точностных характеристик в случае большой размерности вектора варьируемых параметров, от которых зависят элементы случайного вектора X , а также при решении задач контроля и диагностики многомерных систем. Разработке методов приближенного вычисления интегралов вида (1) посвящено большое число работ, обзоры которых приведены, например, в [2].

Данное исследование является обобщением и развитием метода вычисления (1) [3 — 5], который заключается в аппроксимации исходного интеграла (1) произведением интегралов меньшей размерности с учетом всех элементов корреляционной матрицы.

С целью конструирования аппроксимационных формул для (1) представим вектор X в виде

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

где

$$X_1 = (x_1, \dots, x_{m_1})^T, \quad X_2 = (x_{m_1+1}, \dots, x_n)^T.$$

Для простоты изложения и без ограничения общности далее будем предполагать, что вектор X имеет нулевое математическое ожидание.

Вероятность (1) выразим через условную вероятность:

$$P(X \in D) = P(X_1 \in D_1) P(X_2 \in D_2 / X_1 \in D_1), \quad (2)$$

где

$$D_1 = \bigcap_{i=1}^{m_1} (a_i, b_i); \quad D_2 = \bigcap_{i=m_1+1}^n (a_i, b_i).$$

Размерность m_1 вектора X_1 выбираем небольшую для обеспечения приемлемой трудоемкости вычисления первого сомножителя в (2) с помощью квадратурных формул численного интегрирования. Заметим, что для

уменьшения трудоемкости численного интегрирования при вычислении этого сомножителя можно предварительно размерность интеграла уменьшить аналитическим интегрированием по частям. Далее будем считать, что трудоемкость вычисления вероятности $P(X_1 \in D_1)$ является приемлемой.

Рассмотрим задачу вычисления второго сомножителя в (2). При этом перейдем в (2) к векторам центрированных случайных величин:

$$P(X \in D) = P(X_1^0 \in C_1) P(X_2^0 \in C_2 / X_1^0 \in C_1), \quad (3)$$

где X_1^0 и X_2^0 — нормально распределенные векторы, имеющие нулевые математические ожидания и корреляционные матрицы векторов X_1 и X_2 ;

$$C_1 = \bigcap_{i=1}^{m_1} (a_i - M_{xi}, b_i - M_{xi}); C_2 = \bigcap_{i=m_1+1}^n (a_i - M_{xi}, b_i - M_{xi}).$$

Используя прием, описанный в [6], выразим вектор $X^0 = [(X_1^0)^T, (X_2^0)^T]^T$ через случайный нормально распределенный вектор $V = (v_1, \dots, v_n)^T$ с независимыми составляющими, имеющими единичную дисперсию:

$$X^0 = TV, \quad (4)$$

где T — нижняя треугольная матрица, элементы которой определяются по известному алгоритму треугольного разложения положительно определенной симметричной матрицы [7]. Элементы t_{ij} матрицы T находятся последовательно по столбцам:

$$t_{ii} = \sqrt{k_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} t_{ir}^2},$$

$$t_{ij} = \frac{1}{t_{jj}} \left(k_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} t_{ir} t_{jr} \right), \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Запишем выражение (4) для X^0 в блочно-матричной форме

$$X^0 = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно векторы X_1^0 и X_2^0 запишем в виде

$$X_1^0 = T_{11} V_1; \quad (5)$$

$$X_2^0 = T_{21} V_1 + T_{22} V_2, \quad (6)$$

где $V_1 = (v_1, \dots, v_{m_1})^T$; $V_2 = (v_{m_1+1}, \dots, v_n)^T$; $T_{11} = \{t_{ij}\}_1^{m_1}$ и $T_{22} = \{t_{ij}\}_{m_1+1}^n$ — квадратные $m_1 \times m_1$ и $(n - m_1) \times (n - m_1)$ матрицы (левые треугольные); T_{21} —

прямоугольная $(n - m_1) \times m_1$ матрица элементов t_{ij} , $i = \overline{m_1 + 1}, n$, $j = \overline{1}, m_1$. После подстановки (6) в (3) получим

$$P(X \in D) = P(X_1^0 \in C_1) P[(T_{21}V_1 + T_{22}V_2) \in C_2 / X_1^0 \in C_1]. \quad (7)$$

Выразим V_1 через X_1^0 из (4),

$$V_1 = T_{11}^{-1} X_1, \quad (8)$$

и подставим (8) в (7):

$$P(X \in D) = P(X_1^0 \in C_1) P[(T_{21}T_{11}^{-1}X_1^0 + T_{22}V_2) \in C_2 / X_1^0 \in C_1]. \quad (9)$$

Перейдем в (9) от условной к безусловной вероятности введением в рассмотрение случайного вектора, имеющего усеченное многомерное нормальное распределение:

$$P(X \in D) = P(X_1^0 \in C_1) P[(T_{21}T_{11}^{-1}X_{1Y} + T_{22}V_2) \in C_2], \quad (10)$$

где X_{1Y} — m_1 -мерный случайный вектор с усеченной (ограниченной) плотностью распределения,

$$f_{1Y}(U) = \begin{cases} \frac{f_1^0(U)}{P(f_1^0(U) \in C_1)}, & \text{если } U \in C_1, \\ 0, & \text{если } U \notin C_1. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $U = (u_1, \dots, u_{m_1})^T$; $f_1^0(U)$ — плотность распределения нормально распределенного вектора X_1^0 с нулевым математическим ожиданием (функция $f_1^0(U_1)$ равна подинтегральной функции в (1) при $M = 0$). Таким образом, плотность распределения (11) является плотностью распределения усеченного многомерного нормального закона распределения.

Перейдем от (10) к эквивалентной зависимости

$$P(X \in D) = P(X_1^0 \in C_1) P(X_{2S} \in C_2), \quad (12)$$

где

$$X_{2S} = T_{21}T_{11}^{-1}X_{1Y} + T_{22}V_2. \quad (13)$$

Элементы вектора X_{2S} представляют собой суммы случайных величин, имеющих нормальные и усеченные нормальные распределения. Аналитическая зависимость для плотностей распределения вероятности векторов вида X_{2S} неизвестна. Поэтому строгое вычисление вероятности $P(X_{2S} \in C_2)$ для многомерного случая практически не представляется возможным. Для приближенного вычисления распределения вероятности $P(X_{2S} \in C_2)$ используем тот факт, что распределения сумм случайных

величин, имеющих нормальные и усеченные нормальные распределения, с достаточно высокой точностью аппроксимируются нормальными распределениями, особенно в случае, когда область C_{-1} близка к симметричной. Косвенно это подтверждается тем, что закон распределения суммы трех случайных величин, имеющих равномерное распределение, отличающееся от нормального в большей степени, чем усеченное нормальное распределение, с высокой точностью аппроксимируется нормальным распределением [8]. Поэтому закон распределения вектора X_{2S} аппроксимируем нормальным многомерным законом:

$$P(X_{2S} \in C_2) \approx P(X_{2N} \in C_2), \quad (14)$$

где X_{2N} — нормально распределенный вектор. При этом (12) принимает вид

$$P(X \in D) \approx P(X_1^0 \in C_1) P(X_{2N} \in C_2).$$

Если вычисление вероятности $P(X_{2N} \in C_2)$ вновь вызывает затруднение в случае большой размерности вектора X_{2N} , то $P(X_{2N} \in C_2)$ можно также представить, используя изложенный прием, в виде произведения двух вероятностей и так далее. Таким образом, (1) можно аппроксимировать произведением нормальных интегралов, размерность которых меньше n , т. е. произведением вида

$$P(X \in D) \approx \prod_{i=1}^k (X_i^* \in C_i^*), \quad (15)$$

где X_i^* — векторы с нормальными законами распределения (одномерными или многомерными). При $k = 2$ $X_1^* = X_1^0$, $X_2^* = X_{2N}$, $C_1^* = C_1$, $C_2^* = C_2$.

Можно предложить различные способы аппроксимации закона распределения вектора типа (13), т. е. различные способы выбора параметров нормального закона распределения вектора X_{2N} в соотношении (14). Рассмотрим способ аппроксимации вектора X_{2S} нормально распределенным вектором, который, как показывает практика, обеспечивает высокую точность и пригоден для несимметричных областей D . Этот способ заключается в том, что в качестве корреляционных матриц и вектора математических ожиданий для промежуточных векторов X_{2N} , X_{2S} выбираются соответственно матрицы и вектор $K[X_{2N}]$ и $M[X_{2N}]$, определяемые по формулам

$$M[X_{2N}] = M[X_{2S}] = T_{21} T_{11}^{-1} M[X_{1Y}].$$

$$K[X_{2N}] = K[X_{2S}] = T_{21} T_{11}^{-1} K[X_{1Y}] (T_{21} T_{11}^{-1})^T + T_{22} T_{22}^T,$$

где $M[X_{1Y}] = [M_{11Y}, \dots, M_{m_1 1Y}]^T$ и $K[X_{1Y}] = \{k_{ij1Y}\}_{i,j=1}^{m_1}$ — вектор математических ожиданий и корреляционная матрица вектора X_{1Y} . Зависимости для вычисления элементов M_{i1Y} и k_{ij1Y} имеют вид

$$M_{i1Y} = \int_{C_1} u_i f_{1Y}(U) dU, \quad i=1, \dots, m_1,$$

$$k_{ij1Y} = r_{ij1Y} - M_{iY} M_{jY}, \quad i, j=1, \dots, m_1,$$

где

$$r_{ij1Y} = \int_{C_1} u_i u_j f_{1Y}(U) dU.$$

Описанный метод вычисления нормальных интегралов (1) относится к приближенным методам. Для произвольных корреляционных матриц и пределов точность вычисления (1) обычно увеличивается при увеличении размерности m_i интегралов, произведением которых аппроксимируется (1), однако иногда увеличение m_i приводит к небольшому увеличению точности. Укажем случаи, когда увеличение m_i приводит к существенному увеличению точности.

Случай 1. Исходный вектор X содержит k групп по m_i элементов, коэффициенты корреляции между которыми значительно превосходят по модулю коэффициенты корреляции между элементами различных групп (элементами, не входящими в одну группу). В данном случае (1) целесообразно аппроксимировать произведением нормальных интегралов с размерностями m_i . При этом предварительно следует на каждом этапе аппроксимации упорядочить элементы исходного вектора по группам таким образом, чтобы в первую группу попали элементы с большими по модулю коэффициентами корреляции между собой и с малыми коэффициентами корреляции с элементами, принадлежащими второй группе. Данная ситуация наблюдается, например, при расчете показателей достоверности системы контроля, когда вектор X содержит пары сильно зависимых компонент. В таком случае для увеличения точности следует (1) аппроксимировать произведением k нормальных интегралов с размерностями $m_i = 2$.

В табл. 1 приведены результаты расчетов интегралов (1) по разложению (15) через одно- и двухмерные интегралы. Как видим, в случае, когда корреляционная матрица имеет блочную структуру с большими коэффициентами корреляции в диагональных блоках, точность расчета через двухмерные интегралы значительно выше по сравнению с точностью расчета через одномерные интегралы.

Случай 2. Пределы интегрирования в (1) по каждой переменной существенно отличаются один от другого. В данном случае целесообразно в

одну i -ю группу включать m_i зависимых переменных с существенно различными пределами интегрирования.

Следует заметить, что если пределы интегрирования в (1) по многим переменным являются почти симметричными и широкими (например, при $a_i \leq -3$ и $b_i \geq 3$), то корреляционная зависимость между параметрами при использовании данного метода учитывается не в полной мере. Это свойство можно объяснить на примере аппроксимации (1) произведением одномерных интегралов.

Выражения для математического ожидания M_{21} дисперсии D_{21} первого элемента вектора X_{2N} имеют следующий вид:

$$M_{21} = k_{21} (e^{-a_1^2/2k_{11}} - e^{-b_1^2/2k_{11}}) \int_{a_1}^{b_1} e^{-u^2/2k_{11}} du, \quad (16)$$

$$D_{21} = \frac{k_{21}^2}{k_{11}} (a_1 e^{-a_1^2/2k_{11}} - b_1 e^{-b_1^2/2k_{11}}) \int_{a_1}^{b_1} e^{-u^2/2k_{11}} du + k_{22} - \frac{k_{21}^2}{k_{11}^2} M_{21}^2. \quad (17)$$

Из (16) и (17) видно, что при симметричных пределах $M_{21} = 0$ (в случае нулевого вектора математических ожиданий исходного исследуемого случайного вектора) и следовательно, $D_{21} = k_{22}$. Таким образом, ненулевой коэффициент корреляции k_{21} не оказывает никакого влияния на параметры элементов вектора X_{2N} .

Таблица 1

Корреляционная матрица	1,0 0,95 0,70 0,70 0,95 1,0 0,70 0,70 0,70 0,70 1,0 0,95 0,70 0,70 0,95 1,0	1,0 0,70 0,95 0,7 0,70 1,0 0,7 0,95 0,95 0,70 1,0 0,7 0,70 0,95 0,7 1,0	1,0 0,7 0,7 0,7 0,7 1,0 0,7 0,7 0,7 0,7 1,0 0,7 0,7 0,7 0,7 1,0	1,0 0,7 0,7 0,7 0,7 1,0 0,7 0,7 0,7 0,7 1,0 0,7 0,7 0,7 0,7 1,0
Размерность интегралов	1 2	1 2	1 2	1 2
Пределы интегралов	-3 0 0 3 -3 0 0 3	-3 0 -3 0 0 3 0 3	-2 1 0 3 -2 1 0 3	-2 1 -2 1 0 3 0 3
Приближенный результат	0,0042 0,00361	0,0064 0,0088	0,174 0,181	0,172 0,176
Точный результат	0,00361		0,181	

Случай широких пределов, близких к симметричным, для (1) достаточно часто встречается в задачах анализа и обеспечения точности технических систем, причем требования к точности вычисления интегралов типа (1) повышаются по мере приближения его значения к единице. Для увеличения точности вычисления (1) в случае широких пределов, близких к симметричным, можно перейти от задачи вычисления (1) к эквивалентной задаче вычисления вероятности противоположного события:

$$P(X \in D) = 1 - P(X \notin D) = 1 - P(\bar{A}). \quad (18)$$

Здесь $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$, где A_i — событие, состоящее в попадании элемента x_i в интервал (a_i, b_i) . Смысл применения (18) заключается в замене задачи вычисления интегралов с симметричными или близкими к симметричным пределами задачей вычисления интегралов, характеризующих существенно несимметричными пределами.

Вероятность $P(\bar{A})$ запишем в виде

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 A_{-1}) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_{-1}) + P(A_1 \bar{A}_{-1}) = P(\bar{A}_1) + P(A_1 \bar{A}_{-1}), \quad (19)$$

где $A_{-1} = \bigcap_{i=2}^n A_i$. Аналогично преобразуем второе слагаемое в последнем равенстве (19):

$$P(A_1 \bar{A}_{-1}) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(A_1 A_2 \bar{A}_{-2}).$$

Проводя последовательно аналогичные преобразования и подставляя результаты в (19), получаем формулу, предложенную Т.А. Губренюк [5]:

$$P(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n P\left(\bar{A}_i \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right). \quad (20)$$

При вычислении каждого слагаемого в (19) в первый подвектор следует включать элемент x_i , что увеличивает полноту учета корреляционных связей. Поэтому целесообразно (20) преобразовать к виду

$$P(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n P\left(\bar{A}_i \bigcap_{k=i+1}^n A_k\right). \quad (21)$$

Формулу (21) можно получить, приведя (19) к виду

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 A_{-1}) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_{-1}) + P(A_1 \bar{A}_{-1}) = P(\bar{A}_1 A_{-1}) + P(\bar{A}_{-1}). \quad (22)$$

Аналогично находим

$$P(\bar{A}_{-1}) = P(\bar{A}_2 A_{-2}) + P(A_{-2}).$$

Продолжая такие же преобразования далее и подставляя результаты в (19), получаем (21).

Из (21) и (16) следует, что математические ожидания элементов вектора X_2^* существенно отличны от нуля, а это увеличивает полноту учета корреляции согласно (17).

Другой важной особенностью применения формулы (21) является сравнительно малое влияние погрешности каждого слагаемого на всю сумму. Действительно, обозначим относительную погрешность определения слагаемого μ_i через δ_i , тогда абсолютная погрешность Δ для $P(A)$ выражается формулой

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \mu_i \delta_i.$$

Поскольку $\mu_i > 0$, из этой формулы следует

$$\frac{\Delta}{P(A)} \leq \max_i |\delta_i|.$$

Кроме того, считая погрешности δ_i случайными независимыми величинами со среднеквадратическими отклонениями $\sigma(\delta_i)$, находим

$$\sigma \left[\frac{\Delta}{P(A)} \right] = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \sigma_i^2(\delta_i)}}{\sum_{i=1}^n \mu_i}.$$

Отсюда видно, что погрешность вычисления $P(A)$ по (21) имеет тенденцию к уменьшению с возрастанием n .

В табл. 2 приведены результаты расчета шестимерных интегралов по формуле (15) через одно-, двух- и трехмерные интегралы и по разложению (21) через одномерные интегралы. Данные, приведенные в табл. 1 и 2, свидетельствуют о том, что применение формулы (15) является эффективным при несимметричных или относительно узких пределах интегрирования. При более широких симметричных пределах интегрирования целесообразно пользоваться формулой (21), а каждое слагаемое в (21) вычислять по (15).

Как видно из табл. 2, результаты расчетов по формуле (15) при расширении пределов приближаются к результатам, полученным при статистической независимости элементов исходного вектора. В случае корреляционных матриц примерно с равными недиагональными элементами переход от расчета через одномерные интегралы к расчету через двумерные и трехмерные интегралы не приводит к существенному повышению точности.

Таблица 2

Исходные данные		Вычисление многомерных интегралов			
Пределы интегрирования	Корреляционная матрица	по (15)		по (21)	Точные значения
		Размерность	Результат		
–2 2	$\begin{pmatrix} 1,0 \dots 0,8 \\ 0,8 \dots 1,0 \end{pmatrix}$	1	0,86500	0,87281	0,87227
		2	0,86531		
		3	0,86648		
–3 3	$\begin{pmatrix} 1,0 \dots 0,8 \\ 0,8 \dots 1,0 \end{pmatrix}$	1	0,98666	0,99014	0,99010
		2	0,98770		
		3	0,98848		
–4 4	$\begin{pmatrix} 1,0 \dots 0,8 \\ 0,8 \dots 1,0 \end{pmatrix}$	1	0,999624	0,999718	0,999717
		2	0,999647		
		3	0,999662		
–2 2	$\begin{pmatrix} 1,0 \dots 0,9 \\ 0,9 \dots 1,0 \end{pmatrix}$	1	0,88258	0,90005	0,90050
		2	0,88553		
		3	0,88941		
–3 3	$\begin{pmatrix} 1,0 \dots 0,9 \\ 0,9 \dots 1,0 \end{pmatrix}$	1	0,98725	0,99258	0,99253
		2	0,98913		
		3	0,99037		
–4 4	$\begin{pmatrix} 1,0 \dots 0,9 \\ 0,9 \dots 1,0 \end{pmatrix}$	1	0,999626	0,999782	0,999786
		2	0,999686		
		3	1,00320		

Применение разложения (21) позволяет получить значительно более точный результат, причем, как видно из табл. 2, относительная погрешность вычисления (1) остается постоянной при расширении пределов. Значения интегралов, приведенные в табл. 2, получены по квадратурным формулам с числом узлов точек Гаусса по каждой переменной, равным 16.

Вычисление вероятностей для случайных векторов с произвольным законом распределения вероятностей. В задачах контроля параметров, диагностики состояния сложных систем и в других задачах обработки результатов наблюдений на практике часто вид плотности распределения вероятности $p(U)$ для вектора случайных исследуемых параметров является неизвестной функцией, что обусловлено как априорной статистической неопределенностью, так и тем, что в настоящее время неизвестны аналитические зависимости для многомерных плотностей распределения кроме многомерных нормальных плотностей. В таких случаях обычно используют непараметрические оценки плотности распределения вида оценки Парзена — Розенблатта [9]. Эта оценка, основанная на использовании эксперименталь-

ной статистической выборки $Y_i = (y_{1i}, \dots, y_{ni})^T$ объемом N ($i=1, \dots, N$) значений исследуемого случайного вектора Y , имеет вид

$$\rho_N(U) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k\left(\frac{U - Y_i}{h}\right) \prod_{j=1}^n h_j^{-1}, \quad (23)$$

где

$$\frac{U - Y_i}{h} = \left(\frac{u_i - y_{1i}}{h_1}, \dots, \frac{u_n - y_{ni}}{h_n} \right)^T;$$

h_j — положительные коэффициенты размытости; $k(U)$ — многомерное ядро оценки. В качестве ядра $k(U)$ используют функцию, имеющую свойства многомерной симметричной плотности распределения вероятности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(U) dU = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_j^2 k(U) dU = 1, \quad k(U) = k(-U),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n u_j^{k_j} u_j^2 k(U) dU = 1,$$

где $i=1, \dots, n$; $k_j = 1, \dots$.

Е. Парзен предложил [9] использовать в (23) в качестве многомерного ядра функцию плотности нормального многомерного распределения

$$k\left(\frac{U - Y_i}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^n \pi^n |K|}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{U - Y_i}{h}\right)^T S^{-1} \left(\frac{U - Y_i}{h}\right)}, \quad (24)$$

где в качестве матрицы S принимается выборочная ковариационная матрица, определяемая по выборке Y_i , $i=1, \dots, N$.

После подстановки в формулу для вероятности попадания в область D случайного вектора Y

$$P(Y \in D) = \int_D \rho(U) dU \quad (25)$$

с произвольной многомерной плотностью распределения $\rho(U)$ оценки (23) при (24) получаем непараметрическую оценку для вероятности (1):

$$P(Y \in D) \approx J_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n h_j^{-1} \int_D \frac{1}{\sqrt{2^n \pi^n |K|}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{U - Y_i}{h}\right)^T K^{-1} \left(\frac{U - Y_i}{h}\right)}. \quad (26)$$

Вследствие большой трудоемкости вычисления (26) и (24) обычно используют различные аппроксимации (24), например, пренебрегая в (24)

корреляционными зависимостями между элементами исследуемого вектора Y . Однако это снижает точность непараметрических оценок (23) и (25) при небольшом числе наблюдений N , поскольку точность оценки (26) существенно зависит от выбора матрицы S в (24) [9] и объема выборки.

Применение изложенного метода вычисления (1) для расчета каждого слагаемого (25) существенно уменьшает трудоемкость вычислений и дает практическую возможность учета корреляционных зависимостей в (24) и (25) между элементами вектора Y .

Оценка (23) является смещенной, что вытекает из выражения для асимптотического разложения математического ожидания в правой части (25):

$$M[J_N] \approx P(Y \in D) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} h_i h_j \int_D \frac{\partial^2 \rho(U)}{\partial u_i \partial u_j} \partial U + O(h^4), \quad (27)$$

где $\rho(U)$ — точная (но неизвестная) функция многомерной плотности распределения вероятности для вектора Y ; s_{ij} — элементы ковариационной матрицы S . Зависимость (26) непосредственно следует из приведенного в [10] выражения для математического ожидания непараметрической оценки интеграла более общего вида по сравнению с (1).

С целью компенсации смещения в (27) можно использовать модифицированную непараметрическую оценку для (25) в случае $h_i = h_0, i=1, \dots, n$, (полученную А. Н. Завариным [11] для интегралов общего вида):

$$P(Y \in D) \approx J_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n h_j^{-1} \int_{D \sqrt{1-h_0^2}} \frac{1}{\sqrt{2^n \pi^n |K|}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{U-Y_i}{h} \right)^T K^{-1} \left(\frac{U-Y_i}{h} \right)}. \quad (28)$$

Оценка (28) основана на асимптотическом разложении (27), при получении которого используется приближенное равенство

$$s_{ij} \approx \int_{-\infty}^{\infty} u_i u_j k(U) dU.$$

Точность его увеличивается в случае приближения плотности исследуемого вектора к многомерной нормальной и использования при этом в качестве ядра функции (24).

Вычисление вероятностей при косвенном контроле систем. Во многих задачах косвенного контроля и диагностики технических и иных систем требуется оценить их работоспособность по результатам измерений параметров, характеризующих работоспособность этих систем. Рассмотрим такие задачи.

Контролируемая система имеет n параметров $(x_1, \dots, x_n)^T = X$, которые характеризуют ее работоспособность. Система считается работоспособной, если

$$X \in D, D = \bigcap_{i=1}^n (a_i, b_i).$$

Вектор X имеет многомерный нормальный закон распределения с известной корреляционной матрицей $K = \{k_{ij}\}_1^n$, которая определяется предварительно на подготовительном этапе.

При контроле работоспособности системы допускается проводить измерения только первых m элементов $x_i, i=1, \dots, m$, вектора X . По полученному путем измерения значению $X_{1\dot{E}} = (x_{1\dot{E}}, \dots, x_{m\dot{E}})^T$ подвектора $X_1 = (x_1, \dots, x_m)^T$ вектора $X = (X_1^T, X_2^T)^T$ определяется оценка вероятности работоспособности системы при условии, что

$$X_1 = X_{1\dot{E}} \in D_1 = \bigcap_{i=1}^{m_1} (a_i, b_i),$$

т. е. условной вероятности

$$P(X_2 \in D_2 / X_1 = X_{1\dot{E}}). \quad (29)$$

Рассмотрим применение изложенного метода приближенного вычисления интеграла (1) для оценки (29). Подставим $X_1^0 = X_{1\dot{E}}$ в (5) и выразим V_1 через $X_{1\dot{E}}$:

$$V_1 = T_{11}^{-1} X_{1\dot{E}}. \quad (30)$$

После подстановки (30) в (29) с учетом (6) при $X_2^0 = X_2$ получаем

$$P(X_2 \in D_2 / X_1 = X_{1\dot{E}}) = P(T_{21}T_{11}^{-1}X_{1\dot{E}} + T_{22}V_2 \in D_2).$$

Случайный вектор $X_2^* = T_{21}T_{11}^{-1}X_{1\dot{E}} + T_{22}V_2$ является многомерным нормально распределенным вектором с математическим ожиданием $T_{21}T_{11}^{-1}X_{1\dot{E}}$.

Таким образом, задача вычисления условной вероятности (29) сводится к задаче вычисления многомерного интеграла (1), размерность которого равна $n-m$, т. е. к применению метода вычисления многомерных нормальных интегралов.

Расчет вероятностных характеристик наследственных погрешностей решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Рассмотрим задачу анализа показателей точности решения СЛАУ

$$AX = b, \quad (31)$$

где $A = \{a_{ij}\}_1^n$; $b = (b_1, \dots, b_n)^T$; $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ при условии, что коэффициенты a_{ij} и b_i матрицы A и вектора b задаются с неизвестными погрешностями Δa_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, и Δb_i , $i = 1, \dots, n$. Вследствие существования этих погрешностей вектор X решения (31) отличается от вектора $X + \Delta X$, который можно было бы получить при известных численных значениях всех величин Δa_{ij} и Δb_i . Вектор $X + \Delta X$ определяется решением системы уравнений

$$(A + \Delta A)(X + \Delta X) = b + \Delta b, \quad (32)$$

где

$$\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}_1^n; \Delta b = (\Delta b_1, \dots, \Delta b_n)^T; \Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T.$$

Отличие вектора ΔX , полученного из решения (32), от полученного из решения (31), называется вектором наследственных или трансформированных погрешностей, которые обусловлены погрешностями задания исходных данных. Погрешности Δa_{ij} и Δb_i являются неизвестными величинами, поэтому конкретные численные значения вектора ΔX нельзя найти решением систем (31) и (32). Такая ситуация возникает практически всегда при конкретных расчетах технических, экономических и других систем. При этом вектор ΔX можно характеризовать только вероятностными параметрами, используя вероятностные параметры величин Δa_{ij} и Δb_i , или детерминированными оценками. Эти характеристики получим, записав выражение для вектора погрешностей ΔX в виде вычитания (31) из (32):

$$\Delta X = A^{-1}(\Delta b - \Delta A X - \Delta A \Delta X), \quad (33)$$

где A^{-1} — обратная матрица для A ; X — вектор решения исходной системы (31) (при равных нулю погрешностях Δa_{ij} и Δb_i). Пренебрегая в (33) величинами $\Delta A \Delta X$ второго порядка малости, т. е. оставаясь в рамках линейной теории точности, получаем упрощенную зависимость для вектора погрешностей решения

$$\Delta X \approx A^{-1}(\Delta b - \Delta A X). \quad (34)$$

Для вектора (34) при известных корреляционных матрицах векторов Δb и $\Delta A X$ определяется корреляционная матрица $K(\Delta X)$. Это дает возможность, используя изложенный метод вычисления многомерных нормальных интегралов, найти вероятность принадлежности вектора ΔX заданной области.

Детерминированные и вероятностные оценки для ΔX приведены в работах [11, 12].

The method is described for approximate calculation of multidimensional normal integrals with large dimensionalities which is reduced to an approximation of the initial integral by a product of integrals of small dimensionality with account of all coefficients of the correlation matrix. The application of the method for the problems of probability calculation based on the nonparametric estimation of the distribution density and at indirect control of complex systems is considered.

1. *Синицын И. Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. — М. : Логос, 2006. — 636 с.
2. *Мартынов Г. В.* Вычисление функции нормального распределения // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Т.17 (итоги науки и техники).— 1979. — С. 57—84,
3. *Годлевский В. С.* Методы точностного анализа и синтеза вычислительных устройств систем управления и контроля: Дис... д-ра техн. наук. — Киев, 1980. — С. 398.
4. *Годлевский В. С., Заварин А. Н.* Способ приближенного вычисления многомерных нормальных интегралов // Точность и надежность кибернетических систем. Вып. 4. — Киев: Наук. думка, 1976. — С. 30—34.
5. *Годлевский В. С., Губренюк Т. А.* К вычислению многомерных нормальных интегралов в задачах анализа точности электронных схем // Электронные цепи, передача и обработка информации. — Киев : Наук. думка, 1979. — С. 135—147.
6. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций. —М. : Физматгиз, 1962. — 883 с.
7. *Голуб Дж., Ван-Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М. : Мир, 1999. — 548 с.
8. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и её приложение. — М. : Высшая школа, 2007, — 496 с.
9. *Шапиро И. И.* Непараметрические оценки плотности вероятности в задачах обработки результатов наблюдений // Зарубежная радиоэлектроника. — 1976. — № 2. — С. 3—36.
10. *Годлевский В. С., Заварин А. Н.* Применение непараметрических оценок для вычисления многомерных интегралов // Журнал вычисл, математ, и математ, физики. — 1979. — № 5. — С. 1118—1126.
11. *Годлевский В. С.* Об одной оценке точности решений некоторых систем линейных алгебраических уравнений // Там же. — 1973. — № 1. — С. 233—237.
12. *Годлевский В. С.* Об оценках законов распределения погрешностей решений систем линейных алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений // Там же. — 1974. — № 5. — С. 1083—1092.

Поступила 04.03.08

ГОДЛЕВСКИЙ Виталий Станиславович, д-р техн. наук, вед. научн. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, директор МП «ДИСИТ» НАН Украины. В 1966 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — вычислительные методы в теории точности и моделирование технических систем, диагностика трубопроводных систем.