



УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313

**В. Ф. Евдокимов\*\***, чл.-кор. НАН Украины, **А. В. Жильцов\*\***, канд. техн. наук,  
**И. П. Кондратенко\***, д-р техн. наук, **Е. И. Петрушенко\*\***, канд. техн. наук,  
**А. П. Ращепкин\***, д-р техн. наук, **Е. А. Рыбалкин\*\***, аспирант

\*Ин-т электродинамики НАН Украины  
(Украина, 03057 Киев, пр-т Победы 56,  
тел.: (044) 454-24-14, E-mail: dep@ied.org.ua),

\*\* Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины  
(Украина, 03164 Киев, ул. Генерала Наумова 15,  
тел. 424-91-60, E-mail: svetlana@ipme.kiev.ua)

### **Расчет электромагнитных и тяговых характеристик коаксиально-линейного индукционного двигателя электрического вибратора методом интегральных уравнений**

*(Статью представил д-р техн. наук А. В. Верлань)*

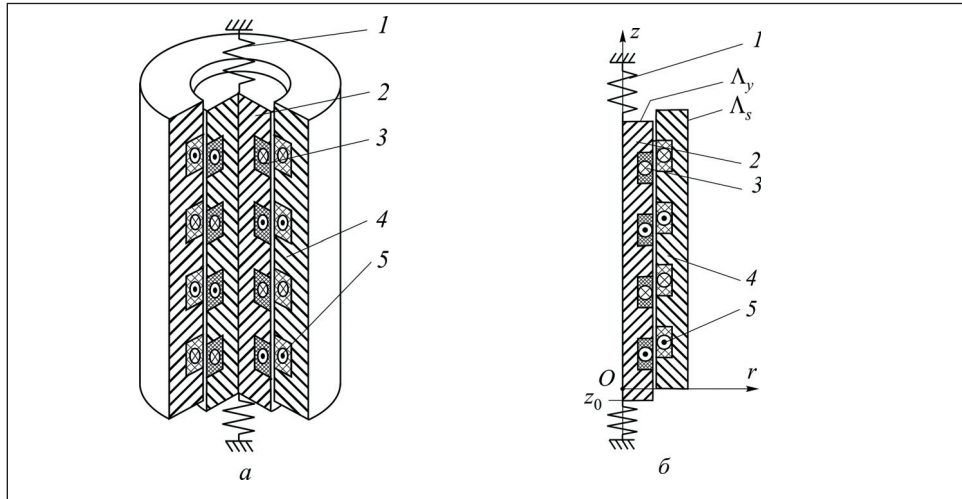
На основе метода интегральных уравнений разработана методика расчета электромагнитных и тяговых характеристик коаксиально-линейного индукционного двигателя электрического вибратора.

На основі методу інтегральних рівнянь розроблено методику розрахунку електромагнітних та тягових характеристик коаксіально-лінійного індукційного двигуна електричного вібратора.

*К л ю ч е в ы е с л о в а: электрический вибратор, коаксиально-линейный индукционный двигатель, интегральное уравнение, коэффициенты само- и взаимоиנדукции, тяговые характеристики.*

Конструктивные особенности коаксиально-линейных индукционных двигателей (КЛИД) позволили вытеснить двигатели вращения из многих устройств исполнительных механизмов: в автоматике, транспортных системах, в строительной отрасли и др.

При проектировании и анализе работы устройств с КЛИД большое значение имеет компьютерное моделирование, с помощью которого можно оптимизировать конструкцию системы и режимы работы. В работе [1] предложена модель электромеханических процессов в коаксиально-линейном электрическом вибраторе с возбуждением от постоянных магнитов и проанализированы его резонансные свойства. В основу модели



положена система дифференциальных уравнений, составленная из уравнений Кирхгофа и Ньютона. Некоторыми коэффициентами этой системы являются коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции, получаемые в результате расчета магнитного поля. Последний выполняется на основе метода конечных элементов с помощью программы FEMM.

Одной из трудностей при таком подходе является конструирование двумерной расчетной сетки в рабочем зазоре, обеспечивающей требуемую точность. В связи с этим представляет определенный интерес расчет магнитного поля в таких системах методом интегральных уравнений. Расчетная сетка при этом строится на линиях, ограничивающих ферромагнетик статора и якоря, и является достаточно простой. Рассмотрим компьютерную модель, в которой электромагнитные и тяговые характеристики КЛИД электрического вибратора рассчитываются с помощью интегральных уравнений.

**Краткая характеристика конструкции моделируемого КЛИД.** На рисунке *a* представлена схема КЛИД, состоящего из соосно расположенных кольцевых катушек и тороидальных стальных тел, где *1* — пружины, на которых подвешен якорь; *2* и *3* — ферромагнитный сердечник и обмотка якоря; *4* и *5* — ферромагнитный сердечник и обмотка статора. Конструкции обмоток якоря *2* и статора *4* аналогичны. Каждая обмотка состоит из одинаковых катушек, концы которых так соединены с соседними катушками, что поле у них встречное. Число катушек, из которых состоит обмотка статора (якоря), обозначим  $N_S$  ( $N_Y$ ), число витков в каждой катушке статора (якоря) —  $w_S$  ( $w_Y$ ). Воспользуемся следующими обозна-

чениями сечений меридианной плоскостью  $\varphi = 0$ :  $D_{S_{ij}}$  — сечение  $j$ -го витка  $i$ -й катушки ( $1 \leq j \leq w_S, 1 \leq i \leq N_S$ ) обмотки статора;  $D_{Y_{ij}}$  — сечение  $j$ -го витка  $i$ -й катушки ( $1 \leq j \leq w_Y, 1 \leq i \leq N_Y$ ) обмотки якоря;  $D_{S_i}$  — сечение  $i$ -й катушки обмотки статора,  $D_{S_i} = \bigcup_{j=1}^{w_S} D_{S_{ij}}$  (см. рис. б);  $D_{Y_i}$  — сечение  $i$ -й катушки обмотки якоря,  $D_{Y_i} = \bigcup_{j=1}^{w_Y} D_{Y_{ij}}$  (см. рис. б);  $D_S$  — сечение обмотки статора,  $D_S = \bigcup_{i=1}^{N_S} D_{S_i}$ ;  $D_Y$  — сечение обмотки якоря,  $D_Y = \bigcup_{i=1}^{N_Y} D_{Y_i}$ . Обмотка якоря питается от источника постоянного тока, обмотка статора – от преобразователя частоты, т. е. начало первой и начало последней катушек присоединены к зажимам преобразователя частоты.

**Интегральный метод расчета магнитного поля в КЛИД.** В работах [2 — 4] рассмотрен интегральный метод расчета магнитного поля в устройствах, подобных КЛИД, т.е. состоящих из соосно расположенных кольцевых катушек и тороидальных стальных тел. Показано, что на поверхности стальных тел (когда магнитная проницаемость стали не зависит от напряженности поля) плотность связанных токов намагниченности удовлетворяет следующему интегральному уравнению (ИУ):

$$\frac{\pi}{\chi} \tilde{\sigma}(Q) - S_{\Lambda} \tilde{\sigma} = F(Q), \quad Q \in \Lambda = \Lambda_S \cup \Lambda_Y. \quad (1)$$

Здесь

$$S_{\Lambda} \tilde{\sigma} = \int_{\Lambda} \tilde{\sigma}(M) S(Q, M) dl_M, \quad Q \in \Lambda;$$

$$F(Q) = F_S(Q) + F_Y(Q), \quad (2)$$

где

$$F_S(Q) = \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} S_{D_{S_{ij}}} \tilde{\delta}_{S_{ij}}, \quad S_{D_{S_{ij}}} \tilde{\delta}_{S_{ij}} = \int_{D_{S_{ij}}} \tilde{\delta}(M) S(Q, M) ds_M, \quad Q \in \Lambda;$$

$$F_Y(Q) = \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} S_{D_{Y_{ij}}} \tilde{\delta}_{Y_{ij}}, \quad S_{D_{Y_{ij}}} \tilde{\delta}_{Y_{ij}} = \int_{D_{Y_{ij}}} \tilde{\delta}(M) S(Q, M) ds_M, \quad Q \in \Lambda; \quad (3)$$

$\rho_Q, z_Q$  и  $\rho_M, z_M$  — координаты точек  $Q$  и  $M$  в цилиндрической системе, ось  $z$  которой направлена вдоль оси симметрии устройства (см. рис. б).

На рисунке б якорь показан в положении статического равновесия, т.е. когда вес якоря уравнивается действием пружин:  $z_0 = G_Y / 2c$ , где  $G_Y$  — вес якоря,  $c$  — жесткость пружины. След поверхности стальных тел в меридианной плоскости  $\varphi = 0$ , обозначенный  $\Lambda$  на рисунке б, в данном случае состоит из следа поверхности сердечника статора  $\Lambda_S$  и следа поверхности сердечника якоря  $\Lambda_Y$ . При этом  $\tilde{\sigma}(Q) = \sqrt{\rho_Q} \sigma(Q)$ , где  $\sigma(Q)$  — плотность связанных токов намагниченности, пересекающих контур  $\Lambda$  в точке  $Q$ ;

$$S(Q, M) = \frac{P(Q, M)}{\sqrt{\rho_Q}} = \frac{\cos(\bar{s}_Q \bar{l}_z)}{2\rho_Q} f(k) + R(k') G(Q, M); \quad (4)$$

$$f(k) = \left( \frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k);$$

$$k^2 = \frac{4\rho_Q \rho_M}{(\rho_Q + \rho_M)^2 + (z_Q - z_M)^2}, \quad (k')^2 = 1 - k^2;$$

$$R(k') = \sqrt{1 - (k')^2} [-2(k')^2 K(k) + (1 + (k')^2) E(k)];$$

$$G(Q, M) = \frac{\cos(\bar{s}_Q \bar{l}_z) [\rho_M^2 - \rho_Q^2 + (z_Q - z_M)^2] + \cos(\bar{s}_Q \bar{l}_\rho) 2\rho_Q (z_Q - z_M)}{8\rho_Q^2 \rho_M (k')^2}.$$

Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля  $k$ ;  $\cos(\bar{s}_Q \bar{l}_\rho)$ ,  $\cos(\bar{s}_Q \bar{l}_z)$  — направляющие косинусы касательной к линии  $\Lambda$  в точке  $Q$  (при обходе контура  $\Lambda$  в положительном направлении сталь остается слева);  $\tilde{\delta}_S(Q) = \sqrt{\rho_Q} \delta_S(Q)$ , где  $\delta_S(Q)$  — плотность тока в сечении катушек статора  $D_S$ ;  $\tilde{\delta}_Y(Q) = \sqrt{\rho_Q} \delta_Y(Q)$ ;  $\delta_Y(Q)$  — плотность тока в сечении катушек якоря  $D_Y$ ;  $\chi = (\mu_{CT} - 1) / (\mu_{CT} + 1)$ .

Для вычисления правой части (2) ИУ (1) по формулам (3) необходимо знать распределение плотности тока  $\delta_S$  и  $\delta_Y$  в сечении витков  $D_{S_{ij}}$  и  $D_{Y_{ij}}$ . Как правило, такая информация отсутствует, и получить ее можно с помощью дополнительных громоздких расчетов. Во многих случаях достаточно знать среднюю плотность тока в сечении каждого витка,

$$\Delta_{S_{ij}} = (-1)^{(i-1)} \frac{i_S}{D_{S_{ij}}}, \quad \Delta_{Y_{ij}} = (-1)^{(i-1)} \frac{i_Y}{D_{Y_{ij}}}, \quad (5)$$

где  $i_S$  и  $i_Y$  — мгновенные значения токов в витках первой катушки статора и первой катушки якоря. При достаточно плотной намотке катушек сред-

няя плотность тока по сечению катушки для статора и якоря соответственно будет

$$\Delta_{S_i} = (-1)^{(i-1)} \frac{i_S w_S}{D_{S_i}}, \Delta_{Y_i} = (-1)^{(i-1)} \frac{i_Y w_Y}{D_{Y_i}}.$$

При разработке алгоритма решения уравнения (1) его удобно записать в виде эквивалентной системы интегральных уравнений (СИУ):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\chi} \tilde{\sigma}_S(Q) - S_{\Lambda_S} \tilde{\sigma}_S - S_{\Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y &= \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} S_{D_{S_{ij}}} \tilde{\delta}_{S_{ij}} + \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} S_{D_{Y_{ij}}} \tilde{\delta}_{Y_{ij}}, \quad Q \in \Lambda_S, \\ -S_{\Lambda_S} \tilde{\sigma}_S + \frac{\pi}{\chi} \tilde{\sigma}_Y(Q) - S_{\Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y &= \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} S_{D_{S_{ij}}} \tilde{\delta}_{S_{ij}} + \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} S_{D_{Y_{ij}}} \tilde{\delta}_{Y_{ij}}, \quad Q \in \Lambda_Y. \end{aligned} \quad (6)$$

Векторы плотности тока, векторный потенциал и вектор магнитной индукции в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(Q) &= \bar{l}_\varphi(Q) \delta(Q), \quad Q \in D_S \cup D_Y; \quad \bar{\sigma}(Q) = \bar{l}_\varphi(Q) \sigma(Q), \quad Q \in \Lambda; \\ \bar{A}(Q) &= \bar{l}_\varphi(Q) A(Q), \quad \bar{B}(Q) = \bar{l}_\rho(Q) B_\rho(Q) + \bar{l}_z(Q) B_z(Q), \end{aligned}$$

где  $Q$  — произвольная точка пространства. Если плотность связанных токов  $\sigma$  определена, то проекция вектора магнитной индукции  $\bar{B}(Q)$  в точке  $Q$  на произвольное направление  $\bar{s}^0 = \bar{l}_\rho \cos(\bar{s}^0 \bar{l}_\rho) + \bar{l}_z \cos(\bar{s}^0 \bar{l}_z)$  вычисляется по формуле

$$\tilde{B}_{s^0}(Q) = \tilde{b}_{D_S}^0(Q) + \tilde{b}_{D_Y}^0(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_S}^0(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_Y}^0(Q), \quad (7)$$

где

$$\tilde{B}_{s^0}(Q) = \sqrt{\rho_Q} B_{s^0}(Q); \quad \tilde{b}_{D_S}^0(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} S_{D_S}^0 \tilde{\delta}_S; \quad S_{D_S}^0 \tilde{\delta}_S = \int_{D_S} S^0(Q, M) \tilde{\delta}_S ds_M;$$

$$\tilde{b}_{D_Y}^0(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} S_{D_Y}^0 \tilde{\delta}_Y; \quad S_{D_Y}^0 \tilde{\delta}_Y = \int_{D_Y} S^0(Q, M) \tilde{\delta}_Y ds_M; \quad \tilde{b}_{\Lambda_S}^0(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} S_{\Lambda_S}^0 \tilde{\sigma}_S;$$

$$S_{\Lambda_S}^0 \tilde{\sigma}_S = \int_{\Lambda_S} S^0(Q, M) \tilde{\sigma}_S dl_M; \quad \tilde{b}_{\Lambda_Y}^0(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} S_{\Lambda_Y}^0 \tilde{\sigma}_Y; \quad S_{\Lambda_Y}^0 \tilde{\sigma}_Y = \int_{\Lambda_Y} S^0(Q, M) \tilde{\sigma}_Y dl_M.$$

Ядро  $S^0(Q, M)$  операторов в (7) получаем из формулы (4) заменой  $\cos(\bar{s}_Q \bar{l}_\rho)$ ,  $\cos(\bar{s}_Q \bar{l}_z)$  на  $\cos(\bar{s}^0 \bar{l}_\rho)$ ,  $\cos(\bar{s}^0 \bar{l}_z)$ . Для вычисления векторного потенциала  $\bar{A}(Q)$  в некоторой точке  $Q$  аналогично находим

$$\tilde{A}(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} T_{D_S} \tilde{\delta}_S + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{D_Y} \tilde{\delta}_Y + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_S} \tilde{\sigma}_S + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}(Q) &= \sqrt{\rho_Q} A(Q); \quad T_{D_S} \tilde{\delta}_S = \int_{D_S} f(k) \tilde{\delta}_S ds_M; \quad T_{D_Y} \tilde{\delta}_Y = \int_{D_Y} f(k) \tilde{\delta}_Y ds_M; \\ T_{\Lambda_S} \tilde{\sigma}_S &= \int_{\Lambda_S} f(k) \tilde{\sigma}_S dl_M; \quad T_{\Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y = \int_{\Lambda_Y} f(k) \tilde{\sigma}_Y dl_M. \end{aligned}$$

**Уравнения электромеханического переходного процесса в электрическом вибраторе.** Система уравнений, описывающих переходный процесс в электрическом вибраторе с КЛИД, состоит из уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа для цепей обмоток статора и якоря и уравнения согласно закону Ньютона для движущегося якоря. Уравнение, полученное по второму закону Кирхгофа для цепи обмотки статора, имеет вид

$$u_S = i_S R_S + \frac{d\psi_S}{dt} + \frac{d\psi_{SY}}{dt},$$

где  $i_S$  — мгновенное значение тока в обмотке статора;  $R_S$  — активное сопротивление цепи обмотки статора;  $\psi_S$  — потокосцепление с обмоткой статора, обусловленное током  $i_S$  обмотки статора (потокосцепление самоиндукции);  $\psi_{SY}$  — потокосцепление с обмоткой статора, обусловленное током  $i_Y$  обмотки якоря (потокосцепление взаимной индукции между обмоткой статора и обмоткой якоря). Потокосцепления  $\psi_S$  и  $\psi_{SY}$  зависят от взаимного расположения статора и якоря.

Введем коэффициент самоиндукции  $L_S = \psi_S / i_S$  и коэффициент взаимной индукции  $M_{SY} = \psi_{SY} / i_Y$ . Также как и соответствующие потокосцепления, коэффициенты  $L_S$  и  $M_{SY}$  зависят от взаимного расположения статора и якоря, т. е.  $L_S = L_S(z)$ ,  $M_{SY} = M_{SY}(z)$ . Здесь и далее координата  $z$  отсчитывается от точки статического равновесия.

Уравнение, полученное по второму закону Кирхгофа для цепи обмотки якоря, имеет вид

$$u_Y = i_Y R_Y + \frac{d\psi_Y}{dt} + \frac{d\psi_{YS}}{dt},$$

где  $i_Y$  — ток в обмотке якоря;  $R_Y$  — активное сопротивление цепи обмотки якоря;  $\psi_Y$  — потокосцепление с обмоткой якоря, обусловленное током  $i_Y$  обмотки якоря (потокосцепление самоиндукции);  $\psi_{YS}$  — потокосцепление с обмоткой якоря, обусловленное током  $i_S$  обмотки статора (потокосцепление взаимной индукции между обмоткой статора и обмоткой якоря). Потокосцепления  $\psi_Y$  и  $\psi_{YS}$  зависят от взаимного расположения статора и якоря.

Введем коэффициент самоиндукции  $L_Y = \psi_Y / i_Y$  и коэффициент взаимной индукции  $M_{YS} = \psi_{YS} / i_S$ . Так же как и соответствующие потокосцепления, коэффициенты  $L_Y$  и  $M_{YS}$  зависят от взаимного расположения статора и

якоря, т. е.  $L_Y = L_Y(z)$ ,  $M_{YS} = M_{YS}(z)$ . Известно, что  $M_{SY} = M_{YS} = M$ . Запишем эти уравнения через коэффициенты само- и взаимной индукции:

$$\begin{aligned} u_S &= i_S R_S + \frac{d}{dt}(L_S i_S) + \frac{d}{dt}(M i_Y) = i_S R_S + i_S \frac{dL_S}{dt} + L_S \frac{di_S}{dt} + \\ &+ i_Y \frac{dM}{dt} + M \frac{di_Y}{dt} = i_S R_S + i_S \frac{dL_S}{dz} \frac{dz}{dt} + L_S \frac{di_S}{dt} + i_Y \frac{dM}{dz} \frac{dz}{dt} + M \frac{di_Y}{dt} = \\ &= i_S R_S + i_S \frac{dL_S}{dz} V + L_S \frac{di_S}{dt} + i_Y \frac{dM}{dz} V + M \frac{di_Y}{dt}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\frac{dz}{dt} = V; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_Y &= i_Y R_Y + \frac{d}{dt}(L_Y i_Y) + \frac{d}{dt}(M i_S) = \\ &= i_Y R_Y + i_Y \frac{dL_Y}{dz} V + L_Y \frac{di_Y}{dt} + i_S \frac{dM}{dz} V + M \frac{di_S}{dt}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение, соответствующее закону Ньютона, имеет вид

$$m_Y \frac{d^2 z}{dt^2} = -2cz + F_{YZ}; \quad (11)$$

где  $m_Y$  — масса движущегося якоря;  $c$  — коэффициент жесткости пружины;  $z$  — перемещение якоря;  $F_{YZ}$  — тяговое усилие — проекция на ось  $z$  главного вектора сил, приложенных к якорю (обмотке и сердечнику).

При численном решении уравнения (11) удобно тяговое усилие  $F_{YZ}$  представить в виде квадратичной формы мгновенных значений токов в обмотках:

$$F_{YZ} = f_S i_S^2 + f_{SY} i_S i_Y + f_Y i_Y^2, \quad (12)$$

где  $f_S, f_{SY}, f_Y$  — тяговые характеристики, которые не зависят от токов в обмотках, но зависят от взаимного расположения статора и якоря.

Для преобразования  $F_{YZ}$  к виду (12) потребуется решение следующих двух вспомогательных СИУ:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\chi} \tilde{\sigma}_S^{(1,0)}(Q) - S_{\Lambda_S \Lambda_S} \tilde{\sigma}_S^{(1,0)} - S_{\Lambda_S \Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)} &= \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} S_{\Lambda_S D_{S_{ij}}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{S_{ij}}}, Q \in \Lambda_S; \\ -S_{\Lambda_Y \Lambda_S} \tilde{\sigma}_S^{(1,0)} + \frac{\pi}{\chi} \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q) - S_{\Lambda_Y \Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)} &= \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} S_{\Lambda_Y D_{S_{ij}}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{S_{ij}}}, Q \in \Lambda_Y. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\chi} \tilde{\sigma}_S^{(0,1)}(Q) - S_{\Lambda_S \Lambda_S} \tilde{\sigma}_S^{(0,1)} - S_{\Lambda_S \Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)} &= \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} S_{\Lambda_S D_{Yij}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{Yij}}, Q \in \Lambda_S; \\ -S_{\Lambda_Y \Lambda_S} \tilde{\sigma}_S^{(0,1)} + \frac{\pi}{\chi} \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q) - S_{\Lambda_Y \Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)} &= \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} S_{\Lambda_Y D_{Yij}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{Yij}}, Q \in \Lambda_Y. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти СИУ можно получить из (6), если вычислять средние плотности токов в витках по формулам (5), положив в них  $i_S = 1$ ,  $i_Y = 0$  для СИУ (13) и  $i_Y = 1$ ,  $i_S = 0$ , для СИУ (14).

Пусть СИУ (13) решена. В результате получены функции

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_S^{(1,0)}(Q), Q \in \Lambda_S, \\ \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q), Q \in \Lambda_Y. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть СИУ (14) решена, и в результате получены функции

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_S^{(0,1)}(Q), Q \in \Lambda_S, \\ \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q), Q \in \Lambda_Y. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (15) и (16), можно записать токи намагниченности, протекающие через  $\Lambda_S$  и  $\Lambda_Y$ , в виде

$$\tilde{\sigma}_S(Q) = i_S \tilde{\sigma}_S^{(1,0)}(Q) + i_Y \tilde{\sigma}_S^{(0,1)}(Q), Q \in \Lambda_S, \quad (17)$$

$$\tilde{\sigma}_Y(Q) = i_S \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q) + i_Y \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q), Q \in \Lambda_Y. \quad (18)$$

Тяговое усилие  $F_{YZ}$  создается в результате взаимодействия магнитного поля токов в обмотке статора и токов намагниченности (17) на поверхности ферромагнитного сердечника статора с токами в обмотке якоря (составляющая  $F_{YZ1}$ ) и токами намагниченности (18) на поверхности ферромагнитного сердечника якоря (составляющая  $F_{YZ2}$ ).

Для вычисления тяговой характеристики необходимо предварительно вычислить проекцию вектора магнитной индукции на направление  $\rho$  по токам в обмотке статора и по токам намагниченности (17). Для этого необходимо в ядрах  $S^0(Q, M)$  операторов в равенстве (13) положить  $\cos(\bar{s}^0 \bar{l}_\rho) = 1$ ,  $\cos(\bar{s}^0 \bar{l}_z) = 0$ . Тогда проекция вектора магнитной индукции в некоторой точке  $Q$  сечения якоря на направление  $\rho$  примет вид

$$\tilde{B}_\rho(Q) = i_S \tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(Q) + i_S \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(Q) + i_Y \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(Q),$$

где

$$\tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} S_{D_Sij}^\rho (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{Sij}},$$



$$\tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} S_{\Lambda_S}^{\rho} \tilde{\sigma}_S^{(1,0)}, \quad \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(Q) = \frac{\mu_0}{2\pi} S_{\Lambda_S}^{\rho} \tilde{\sigma}_S^{(0,1)}.$$

Запишем выражение для составляющей тягового усилия  $F_{YZ1}$ :

$$\begin{aligned} F_{YZ1} &= 2\pi i_Y \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} (-1)^{i-1} \sqrt{\rho_{C_{Y_{ij}}}} \tilde{B}_{\rho}(C_{Y_{ij}}) = \\ &= \left\{ 2\pi \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} (-1)^{i-1} \sqrt{\rho_{C_{Y_{ij}}}} \tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(C_{Y_{ij}}) + 2\pi \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} (-1)^{i-1} \sqrt{\rho_{C_{Y_{ij}}}} \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(C_{Y_{ij}}) \right\} i_Y i_S + \\ &\quad + \left\{ 2\pi \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} (-1)^{i-1} \sqrt{\rho_{C_{Y_{ij}}}} \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(C_{Y_{ij}}) \right\} i_Y^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f_{SY1} &= 2\pi \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} (-1)^{i-1} \sqrt{\rho_{C_{Y_{ij}}}} \tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(C_{Y_{ij}}) + 2\pi \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} (-1)^{i-1} \sqrt{\rho_{C_{Y_{ij}}}} \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(C_{Y_{ij}}), \\ f_{Y1} &= 2\pi \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} (-1)^{i-1} \sqrt{\rho_{C_{Y_{ij}}}} \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(C_{Y_{ij}}). \end{aligned}$$

Тогда выражение (19) примет вид

$$F_{YZ1} = f_{SY1} i_Y i_S + f_{Y1} i_Y^2. \quad (20)$$

Находим выражение для составляющей тягового усилия  $F_{YZ2}$ :

$$\begin{aligned} F_{YZ2} &= 2\pi \int_{\Lambda_Y} \sqrt{\rho_Q} \tilde{B}_{\rho}(Q) (i_S \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q) + i_Y \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q)) dl_Q = \\ &= \left\{ 2\pi \int_{\Lambda_Y} \sqrt{\rho_Q} (\tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q)) dl_Q \right\} i_S^2 + \\ &\quad + \left\{ 2\pi \int_{\Lambda_Y} \sqrt{\rho_Q} (\tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q)) dl_Q \right\} i_S i_Y + \\ &\quad + \left\{ 2\pi \int_{\Lambda_Y} \sqrt{\rho_Q} (\tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q)) dl_Q \right\} i_Y^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$f_{S2} = 2\pi \int_{\Lambda_Y} \sqrt{\rho_Q} (\tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q)) dl_Q;$$

$$f_{SY2} = 2\pi \int_{\Lambda_Y} \sqrt{\rho_Q} (\tilde{b}_{D_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q) + \tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(1,0)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}(Q)) dl_Q;$$

$$f_{Y2} = 2\pi \int_{\Lambda_Y} \sqrt{\rho_Q} (\tilde{b}_{\Lambda_S}^{\rho(0,1)}(Q) \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}(Q)) dl_Q.$$

Тогда выражение (21) примет вид

$$F_{YZ} = f_{S2} i_S^2 + f_{YS2} i_S i_Y + f_{Y2} i_Y^2. \quad (22)$$

Складывая (20) и (22), получаем выражение для тягового усилия  $F_{YZ}$  в виде квадратичной формы (12), где  $f_S = f_{S2}$ ;  $f_{SY} = f_{SY1} + f_{SY2}$ ;  $f_Y = f_{Y1} + f_{Y2}$ .

**Составление таблиц зависимости электромагнитных и тяговых характеристик от взаимного расположения статора и якоря для решения уравнений (8) — (11) по методу Рунге — Кутты с вычислением производных от таблично заданных функций.** Для того чтобы при моделировании электромеханического переходного процесса в электрическом вибраторе избежать большого числа повторных решений одних и тех же СИУ, предлагается составить таблицы зависимости коэффициентов  $L_S, L_Y, M, f_S, f_{SY}, f_Y$  от взаимного расположения статора и якоря, т. е. составить таблицы  $L_S = L_S(z), L_Y = L_Y(z), M = M(z), f_S = f_S(z), f_{SY} = f_{SY}(z), f_Y = f_Y(z)$ . При этом уравнения Кирхгофа — Ньютона решаются методом Рунге — Кутты с вычислением производных от таблично заданных функций.

Для вычисления зависимости коэффициента самоиндукции обмотки статора от его расположения относительно якоря  $L_S = L_S(z)$  решаем СИУ (13).

Для вычисления зависимости коэффициента самоиндукции обмотки якоря от его расположения относительно статора  $L_Y = L_Y(z)$  решаем СИУ (14).

После решения СИУ (13) вычисляем векторный потенциал в центрах  $C_{S_{ij}}$  ( $1 \leq j \leq w_S, 1 \leq i \leq N_S$ ) всех витков обмотки статора:

$$\tilde{A}(C_{S_{ij}}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} T_{D_{S_{ij}}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{S_{ij}}} + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_S} \tilde{\sigma}_S^{(1,0)} + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}.$$

При этом потокосцепление с  $j$ -м витком  $i$ -й катушки обмотки статора записываем в виде  $\psi_{S_{ij}}^{(1,0)} = 2\pi \rho_{S_{ij}} \tilde{A}(C_{S_{ij}})$ , потокосцепление со всей обмоткой статора имеет вид  $\psi_S^{(1,0)} = \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} \psi_{S_{ij}}^{(1,0)}$ , т. е.  $L_S(z) = \psi_S^{(1,0)}$ .

После решения СИУ (14) вычисляется векторный потенциал в центрах  $C_{Y_{ij}}$  ( $1 \leq j \leq w_Y, 1 \leq i \leq N_Y$ ) всех витков обмотки якоря:

$$\tilde{A}(C_{Y_{ij}}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} T_{D_{Y_{ij}}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{Y_{ij}}} + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_S} \tilde{\sigma}_S^{(0,1)} + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y^{(0,1)}.$$

При этом потокосцепление с  $j$ -м витком  $i$ -й катушки обмотки имеет вид  $\Psi_{Y_{ij}}^{(1,0)} = 2\pi \rho_{Y_{ij}} A(C_{Y_{ij}})$ , а потокосцепление со всей обмоткой якоря —

$$\Psi_Y^{(0,1)} = \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} \Psi_{Y_{ij}}^{(0,1)}, \text{ т. е. } L_Y(z) = \Psi_Y^{(0,1)}.$$

Коэффициент взаимной индукции  $M$  можно вычислить, используя решение СИУ (13) или (14). Запишем коэффициент  $M(z)$ , полученный в результате решения СИУ (13). Векторный потенциал в этом случае вычисляется в центрах  $C_{Y_{ij}}$  ( $1 \leq j \leq w_Y, 1 \leq i \leq N_Y$ ) всех витков обмотки якоря:

$$\tilde{A}(C_{Y_{ij}}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{w_S} T_{D_{S_{ij}}} (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\rho}}{D_{S_{ij}}} + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_S} \tilde{\sigma}_S^{(1,0)} + \frac{\mu_0}{2\pi} T_{\Lambda_Y} \tilde{\sigma}_Y^{(1,0)}.$$

При этом потокосцепление с  $j$ -м витком  $i$ -й катушки обмотки якоря имеет вид  $\Psi_{Y_{ij}}^{(1,0)} = 2\pi \rho_{Y_{ij}} A(C_{Y_{ij}})$ , а потокосцепление со всей обмоткой якоря —

$$\Psi_Y^{(1,0)} = \sum_{i=1}^{N_Y} \sum_{j=1}^{w_Y} \Psi_{Y_{ij}}^{(1,0)}, \text{ т. е. } M(z) = \Psi_Y^{(1,0)}.$$

**Выводы.** Расчет электромагнитных и тяговых характеристик на основе метода интегральных уравнений, реализованный на одномерных сетках (расположенных на линиях ограничивающих сечения стальных тел), значительно проще метода конечных элементов, реализуемого на двумерных сетках сложной конфигурации, содержащих, как правило, десятки тысяч узлов. Сокращению объема вычислений при моделировании электромеханического переходного процесса в электрическом вибраторе способствует также предложенное представление тягового усилия в виде квадратичной формы мгновенных значений токов в обмотках. Подобное разложение тягового усилия получено впервые. Для того чтобы при моделировании электромеханического переходного процесса в электрическом вибраторе избежать большого числа повторных решений одних и тех же СИУ, предлагается составить таблицы зависимости коэффициентов  $L_S, L_Y, M, f_S, f_{SY}, f_Y$  от взаимного расположения статора и якоря. При этом уравнения Кирхгофа — Ньютона следует решать методом Рунге — Кутты с вычислением производных от таблично заданных функций.

The method of electromagnetic and tractive characteristic analysis was developed for coaxial linear inductional motor based on integral equation method.

1. Голенков Г. М., Бондар Р. П., Макагон С. А. та ін. Моделювання роботи електричного вібратора з коаксіально-лінійним індукційним двигуном при різних законах регулювання// Техн. електродинаміка. — 2007. — № 2. — С. 54—59.
2. Петрушенко Е. И., Тозони О. В. Расчет поля в магнитных системах переменного тока: Наука и техника в городском хозяйстве. — Киев: Будівельник, 1965. — Вып. 3. — С. 3—18.
3. Петрушенко Е. И. Расчет осесимметричных электромагнитных устройств переменного тока: Автореф. дисс... канд. техн. наук/ ИК АН УССР. — Киев. 1965. — 33 с.
4. Тозони О. В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. — Киев: Техніка. 1967. — 252 с.

Поступила 10.12.07

*ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.*

*ЖИЛЬЦОВ Андрей Владимирович, канд. техн. наук, докторант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1997 г. окончил Симферопольский государственный университет им. М.В. Фрунзе (Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского). Область научных исследований — теоретические основы электротехники, моделирование электромагнитных полей.*

*КОНДРАТЕНКО Игорь Петрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1979 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теоретические основы электротехники.*

*ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.*

*РАЩЕПКИН Анатолий Павлович, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1959 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — электрические машины и аппараты.*

*РЫБАЛКИН Евгений Александрович, аспирант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2007 г. окончил Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.*