



УДК 621.3.011.7:537.532.5:621.372.011:512.3.32

**В. Н. Сидорец**, канд. техн. наук  
Институт электросварки им. Е.О.Патона НАН Украины  
(Украина, 03680, Киев-150, ГСП, ул. Боженко, 11,  
тел. (044) 2712349. E-mail: sidvn@ua.fm)

### **Особенности бифуркации Хопфа в нелинейных цепях с электрической дугой**

*(Статью представил чл.-кор. НАН Украины В. В. Васильев)*

Предложена модернизация алгоритма вычисления показателя Ляпунова (индекса Флоке) периодического решения, взаимодействующего с особой точкой при потере устойчивости. Преимуществом полученного алгоритма является простота символических вычислений, что позволяет анализировать тип бифуркации Хопфа достаточно сложных динамических систем. С помощью предложенного метода установлено, что в электрических цепях с дугой может происходить как суперкритическая, так и субкритическая бифуркация Хопфа.

Запропоновано модернізацію алгоритму обчислення показника Ляпунова (індексу Флоке) періодичного розв'язку, який взаємодіє з особливою точкою при втраті стійкості. Перевагою отриманого алгоритму є простота символічних обчислень, що дозволяє аналізувати тип біфуркації Хопфа достатньо складних динамічних систем. За допомогою запропонованого методу визначено, що у електричних колах з дугою може відбуватися як суперкритична, так і субкритична біфуркація Хопфа.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* динамические системы, обыкновенные дифференциальные уравнения, бифуркация Хопфа, нелинейные электрические цепи, электрическая дуга, детерминированный хаос.

При исследовании нелинейных электрических цепей с дугой особый интерес представляет детерминированный хаос, обнаруженный в этих системах, что сближает их с другими нелинейными системами. Детерминированный хаос представляет собой непериодические автоколебания. Сценарии перехода к хаотическим колебаниям весьма разнообразны, но, как правило, они включают этап периодических автоколебаний. Одна из возможностей появления автоколебаний в автономных динамических системах — это бифуркация Хопфа. Как оказалось, в нелинейных цепях с электрической дугой бифуркация Хопфа обладает особенностями, а именно, она может быть как суперкритической, так и субкритической.

**Общие положения.** Существует несколько принципиальных отличий нелинейных динамических систем от линейных. В нелинейных системах может существовать несколько особых точек. При изменении параметра устойчивость особых точек может изменяться, т. е. устойчивая особая точка может становиться неустойчивой. Но локальная неустойчивость особой точки не свидетельствует о неустойчивости динамической системы. Поэтому в автономных динамических системах возможно возникновение автоколебаний.

Это явление подробно исследовано в [1—3], а в [4, 5, с. 134] доказана теорема, определяющая количественные оценки параметров, при которых происходит бифуркация, сопровождающаяся потерей особой точки локальной устойчивости. В этой теореме указаны два возможных случая потери устойчивости особой точки: 1) при взаимодействии с устойчивым предельным циклом — суперкритическая бифуркация; 2) при взаимодействии с неустойчивым предельным циклом — субкритическая бифуркация. Однако никаких количественных оценок параметров, позволяющих определить тип бифуркации, не приведено. Вопрос оставался открытым, хотя были получены формулы [6, с. 198] для определения так называемого показателя Ляпунова (индекса Флоке), по знаку которого можно определить тип бифуркации Хопфа. Объясняется это, очевидно, тем, что полученные формулы достаточно громоздки и применимы только для систем второго порядка специального вида. По крайней мере, в работе [6] не приведено достаточное число примеров применения этих формул, что значительно уменьшает их практическую ценность.

В дальнейшем исследователи нелинейных динамических систем не затрагивали эту проблему. Например в работе [5], посвященной именно бифуркации Хопфа, о различии суперкритической и субкритической бифуркации даже не упоминается. Работа [7] стала исключением. Применение матричной записи и комплексной арифметики позволило ее авторам значительно упростить формулы, а использование теорем о нормальных формах Пуанкаре и центральном многообразии позволило получить их для случая динамических систем произвольного порядка и вида. В работе [8] этот подход сохранен и переосмыслен с точки зрения применения современных средств компьютерной математики.

**Постановка задачи и ее решение.** Динамическая система описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые зависят от параметра:

$$\dot{x} = f(x, \alpha). \quad (1)$$

Назовем этот параметр бифуркационным. В (1)  $f$  — нелинейная вектор-функция векторного аргумента  $x$ . Координаты особой точки  $x_0(\alpha)$  в общем

случае также зависят от параметра. Зная собственные значения  $\lambda_j(\alpha)$  матрицы Якоби

$$J_{ij}(\alpha) = \left. \frac{\partial f_i(x, \alpha)}{\partial x_j} \right|_{x=x_0(\alpha)}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где  $N$  — порядок системы, из условия

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\alpha_c) = 0 \quad (3)$$

определим критическое значение бифуркационного параметра  $\alpha_c$ . В (3) индекс 1 условно выделяет данное собственное значение из  $N$  собственных значений, кроме второго, для которого также выполняется условие (3), так как оно комплексно-сопряженное первому.

Для соблюдения всех требований теоремы Хопфа необходима проверка еще нескольких условий,

$$\operatorname{Re} \lambda'_1(\alpha_c) \neq 0, \operatorname{Im} \lambda_1(\alpha_c) \equiv \omega_0 \neq 0, \operatorname{Re} \lambda_j(\alpha_c) < 0, \quad j = 3, \dots, N, \quad (4)$$

хотя практически они выполняются в подавляющем большинстве случаев. Таким образом, при выполнении условий (3) и (4) в динамической системе происходит бифуркация Хопфа. В литературе эта бифуркация названа бифуркацией рождения цикла, что, по нашему мнению, не совсем корректно, так как в случае субкритической бифуркации, рождения цикла не происходит.

Для исследования свойств бифуркации Хопфа необходимо в исходной системе (1) выполнить замену переменных

$$x = x_0(\alpha_c) + Py, \quad (5)$$

в результате которой особая точка перемещается в начало координат, и полученная система становится независимой от параметра

$$\dot{y} = F(y). \quad (6)$$

В формуле (5)  $P$  — матрица собственных векторов, для нахождения которой в [7] рекомендуется следующая конструкция:

$$P = (\operatorname{Re} v_1, -\operatorname{Im} v_1, w_3, \dots, w_N), \quad (7)$$

где  $v_1$  — собственный вектор матрицы  $J(\alpha_c)$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_1(\alpha_c) = i\omega_0$ , а  $w_3, \dots, w_N$  — «любой набор вещественных  $N$ -мерных векторов, образующий базис в объединении всех собственных подпространств, отвечающих собственным значениям  $\lambda_3, \dots, \lambda_N$  при  $\alpha = \alpha_c$ ». Однако данная цитата из работы [7] не поясняет, как находить этот набор векторов. В той же работе [7] приведено требование нормирования вектора  $v_1$  так, чтобы первая ненулевая компонента равнялась единице.

Матрица Якоби для системы (6) в особой точке имеет вид

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad (8)$$

хотя именно первые производные в дальнейших вычислениях не используются. Для вычисления индекса Флоке  $\beta_2$  используются значения вторых и третьих производных функции  $F$  по компонентам вектора  $y$  в нулевой особой точке.

Поскольку работа [7] в настоящее время стала труднодоступной, приведем 10 формул для вычисления индекса Флоке. В данных формулах под производными  $F$  по  $y$  понимаем значения этих производных в особой точке  $y = 0$ . Для вычисления значений  $g_{11}$ ,  $g_{02}$ , и  $g_{20}$  используются вторые производные:

$$g_{11} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + i \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} \right) \right]; \quad (9)$$

$$g_{02} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right]; \quad (10)$$

$$g_{20} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right]. \quad (11)$$

Третьи производные используются в формуле

$$G_{21} = \frac{1}{8} \left[ \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} + i \left( \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_2^2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2^3} \right) \right]. \quad (12)$$

Если число дифференциальных уравнений в системе больше трех, дополнительно вычисляются следующие величины:

$$h_{11}^{k-2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_2^2} \right); \quad h_{20}^{k-2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_2^2} - 2i \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_1 \partial y_2} \right), \quad k=3, \dots, N; \quad (13)$$

$$D w_{11} = -h_{11}; \quad (D - 2i\omega_0 I) w_{20} = -h_{20}; \quad (14)$$

$$G_{110}^{k-2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_k} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial y_k} + i \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1 \partial y_k} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2 \partial y_k} \right) \right], \quad k=3, \dots, N; \quad (15)$$

$$G_{101}^{k-2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_k} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial y_k} + i \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2 \partial y_k} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1 \partial y_k} \right) \right], k=3, \dots, N. \quad (16)$$

Окончательная формула для величины  $g_{21}$  имеет вид

$$g_{21} = G_{21} + \sum_{m=1}^{N-2} (2G_{110}^m w_{11}^m + G_{101}^m w_{20}^m). \quad (17)$$

Значение  $c_1$  в точке бифуркации Хопфа имеет вид (в [7] при выводе формул предполагается, что бифуркационное значение параметра равно нулю)

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2} g_{21}. \quad (18)$$

Индекс Флоке (показатель Ляпунова) выражается через действительную часть значения  $c_1$ :

$$\beta_2 = 2 \operatorname{Re} c_1(0). \quad (19)$$

Знак индекса Флоке  $\beta_2$  однозначно определяет тип бифуркации Хопфа: если  $\beta_2 > 0$ , бифуркация Хопфа субкритическая, т. е. предельный цикл неустойчивый, если  $\beta_2 < 0$ , бифуркация Хопфа суперкритическая, т. е. предельный цикл устойчивый. В последнем случае можно говорить об автоколебаниях в автономной динамической системе. Необходимо отметить сложность нахождения производных в формулах (9)—(19) для вычисления значения  $\beta_2$ . Именно этим объясняется небольшое число примеров конкретных динамических систем, для которых получены аналитические результаты: груз на ленте, уравнение Ван дер Поля, объемные колебания брьюсселятора, система Лэнгфорда. Следует также заметить, что системы дифференциальных уравнений для этих систем крайне просты. В [7] приведены и другие примеры более сложных систем: центробежный регулятор, система Лоренца, «замороженная по току» система Ходжжика—Хаксли, брьюсселятор при фиксированных граничных значениях, задача о панельном флаттере. Результаты для упомянутых систем были получены численно, с помощью специализированной компьютерной программы BIFOR2, разработанной авторами работы [7]. Исходные тексты программы BIFOR2 на языке Фортран приведены в приложении к работе [7]. К сожалению, воспользоваться этой программой не удалось. Таким образом, разработка более простой методики определения типа бифуркации Хопфа остается актуальной.

**Модернизация алгоритма вычисления показателя Ляпунова (индекса Флоке).** Для того чтобы вычислить показатель Ляпунова, необходимо исходную систему дифференциальных уравнений преобразовать посредством замены переменных (5). Затем использовать вторые и третьи

частные производные правых частей полученной системы (6) по новым переменным для дальнейших вычислений. Данный алгоритм оказался слишком громоздким и трудоемким. Необходимость символьного вычисления производных вызывает определенные трудности. Не всегда справляется с подобными задачами пакет символьной математики Maple [9].

Идея модернизации алгоритма состоит в том, чтобы дифференцирование правых частей сложной преобразованной системы (6) заменить дифференцированием правых частей исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5), что гораздо проще во всех отношениях. Покажем, как это осуществить, и найдем формулы для связи производных правых частей исходной и преобразованной систем. Для этого продифференцируем по времени выражение (5) и подставим значение  $x$  и его производную в исходную систему (1):

$$\dot{y} = P^{-1} f(x_0(\alpha_c) + P y, \alpha). \quad (20)$$

Сравнивая формулы (20) и (6), определяем вид функции  $F$ :  $F(y) = P^{-1} f(x_0(\alpha_c) + P y, \alpha_c)$ . Она достаточно просто дифференцируется. Матрица первых производных имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} = P^{-1} \frac{\partial f}{\partial x} P \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \sum_{q,r} P_{iq}^{-1} \frac{\partial f_q}{\partial x_r} P_{rj},$$

а тензоры вторых и третьих производных выражаются формулами

$$\left. \frac{\partial^2 F_i(y)}{\partial y_j \partial y_k} \right|_{y=0} = \sum_{q,r,s} P_{iq}^{-1} \left. \frac{\partial^2 f_q(x, \alpha_c)}{\partial x_r \partial x_s} \right|_{x=x_0(\alpha_c)} P_{rj} P_{sk}, \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial^3 F_i(y)}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l} \right|_{y=0} = \sum_{q,r,s,m} P_{iq}^{-1} \left. \frac{\partial^3 f_q(x, \alpha_c)}{\partial x_r \partial x_s \partial x_m} \right|_{x=x_0(\alpha_c)} P_{rj} P_{sk} P_{ml}. \quad (22)$$

Преимущество формул (21) и (22) состоит в том, что символьное дифференцирование функции  $f$  по  $x$  гораздо проще, чем символьное дифференцирование функции  $F$  по  $y$ , а суммирование может быть выполнено любым методом, например с помощью пакета численной математики MathCAD [10].

**Электрические цепи с дугой.** Электрическая дуга является составной частью многих электротехнических установок, выполняя функции технологического инструмента. Поэтому описание цепей с дугой и исследование их устойчивости остается актуальной задачей. Со времени первого теоретического исследования цепи с электрической дугой [1, с. 317] прошло много времени, но до сих пор дуга является классическим примером

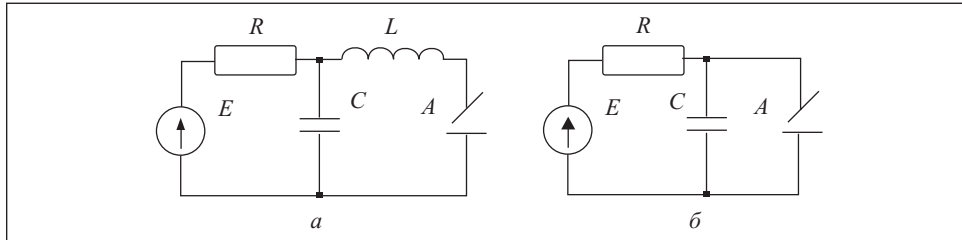


Рис. 1. Схемы электрических цепей с дугой, в которых возможно возникновение автоколебаний

нелинейности. С точки зрения электротехники дугу можно рассматривать как элемент с падающей вольт-амперной характеристикой. Однако для исследования динамических режимов и устойчивости необходимо учитывать термическую инерционность дуги. Поэтому была использована обобщенная модель динамической дуги [11]. В этой модели дуга является элементом цепи, падение напряжения на котором имеет следующий вид:

$$u_A = \frac{U(i_\theta)}{i_\theta} i, \quad (23)$$

где  $i$  — ток дуги;  $U(i)$  — функция статической вольт-амперной характеристики (ВАХ) дуги;  $i_\theta$  — ток состояния дуги [11]. Выражение (23) можно использовать при записи уравнений Кирхгофа, которые необходимо дополнять дифференциальным уравнением, описывающим динамику дуги,

$$\theta \frac{di_\theta^2}{dt} + i_\theta^2 = i^2, \quad (24)$$

где  $\theta$  — постоянная времени дуги, определяющая ее термическую инерционность, связанную с процессами нагрева, диссоциации и ионизации.

Рассмотрим обобщенную модель динамической дуги на примере двух электрических цепей с дугой. Их схемы представлены на рис. 1. С помощью численных методов определено, что в этих схемах возможно возникновение автоколебаний. Эволюция автоколебаний в  $RLC$ -цепи с дугой, представленной на рис. 1, *a*, приводит к каскаду бифуркаций удвоения периода, а затем — к странному аттрактору [12—16]. С методологической точки зрения будем рассматривать более простую  $RC$ -цепь с дугой, изображенную на рис. 1, *б* [17].

Уравнение закона Кирхгофа для узла

$$\frac{E - u}{R} = C \frac{du}{dt} + i, \quad (25)$$

где  $u$  — напряжение на конденсаторе,  $i$  — ток дуги, дополним уравнением

модели дуги (24) и учтем, что ток дуги можно найти по формуле (23) следующим образом:  $i = (i_0 / U(i_0)) u$ .

Приведем окончательный вид системы [17], которая описывает  $RC$ -цепь, изображенную на рис. 1, б, для безразмерных переменных и параметров:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 x_1^{1-n} - x_1; \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{RC} \left( 1 + R - R x_2 - R x_2 x_1^{\frac{1-n}{2}} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $x_2$  — безразмерное напряжение на дуге;  $x_1$  — безразмерный квадрат тока состояния дуги;  $n$  — показатель степени в степенной аппроксимации статической вольт-амперной характеристики дуги [17];  $n < 0$ , так как статическая вольт-амперная характеристика дуги — падающая.

При описании  $RLC$ -цепи, изображенной на рис. 1, а, уравнения (24) и (25) дополняем уравнением закона Кирхгофа для контура:

$$u = L \frac{di}{dt} + \frac{U(i_0)}{i_0} i.$$

Окончательная система для исследования  $RLC$ -цепи будет иметь вид [12]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 - x_1; \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} \left( x_3 - x_2 x_1^{\frac{n-1}{2}} \right); \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{RC} (1 + R - x_3 - R x_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $x_2$  — безразмерный ток дуги;  $x_3$  — безразмерное напряжение на дуге; остальные переменные такие же, как и в (26).

Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют общую особенность: по две особые точки. При этом координаты искомого особых точек (1,1) и (1,1,1) не зависят от параметров. Вторые особые точки являются седловыми, а координаты их не зависят от параметров  $L$  и  $C$ .

**Бифуркация Хопфа в  $RC$ -цепи с дугой.** Запишем матрицу Якоби и характеристическое уравнение для линеаризованной системы в окрестности особой точки  $x_0 = [1 \ 1]^T$  для нелинейной системы (26):

$$J = \begin{bmatrix} -n & 2 \\ -\frac{1-n}{RC} & -\frac{1+R}{RC} \end{bmatrix}; \quad (28)$$

$$RC\lambda^2 + (1+R+nRC)\lambda + (R+n) = 0. \quad (29)$$



Легко убедиться в том, что при значении бифуркационного параметра  $C$ , равном

$$C_H = -\frac{1+R}{nR}, \quad (30)$$

собственные значения матрицы (28), т. е. корни характеристического уравнения (29) — чисто мнимые ( $\lambda = i\omega_0$ ). В параметрическом виде [18], более удобном для проведения символьных вычислений, можно записать

$$C_H(\omega_0) = \frac{1-n}{\omega_0^2+n^2}; \quad R_H(\omega_0) = -\frac{\omega_0^2+n^2}{\omega_0^2+n}.$$

Поскольку условия (4) также выполняются, можно утверждать, что в системе (26) имеет место бифуркация Хопфа.

Для определения типа бифуркации Хопфа проведем дополнительные исследования. Найдем собственный вектор матрицы (28) при значении параметра, равном бифуркационному,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}n + i\frac{1}{2}\omega_0 \end{bmatrix},$$

с помощью которого построим матрицу  $P$  согласно (7) и найдем обратную ей матрицу  $P^{-1}$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}n & -\frac{1}{2}\omega_0 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n}{\omega_0} & -\frac{2}{\omega_0} \end{bmatrix}.$$

Тензоры вторых  $D^2f$  и третьих  $D^3f$  производных громоздки, но вычисляются легко, и в матричной форме записи имеют вид

$$D^2f = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -n(1-n) & 2(1-n) \\ \frac{1}{4}(1+n)(\omega_0^2+n^2) & -\frac{1}{2}(\omega_0^2+n^2) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2(1-n) & 2 \\ -\frac{1}{2}(\omega_0^2+n^2) & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix};$$

$$D^3f = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} n(1-n^2) & -2n(1-n) \\ -\frac{1}{8}(3+n)(1+n)(\omega_0^2+n^2) & \frac{1}{4}(1+n)(\omega_0^2+n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2n(1-n) & 2(1-n) \\ \frac{1}{4}(1+n)(\omega_0^2+n^2) & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2n(1-n) & 2(1-n) \\ \frac{1}{4}(1+n)(\omega_0^2+n^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(1-n) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Проведя вычисления по формулам (9)—(19), получаем аналитическое выражение для индекса Флоке. При малых значениях параметра  $R$  индекс Флоке положителен, что соответствует субкритической бифуркации Хопфа, а при возрастании параметра  $R$  он становится отрицательным, что соответствует суперкритической бифуркации Хопфа. Смена типа бифуркации происходит при значении параметра  $R$ , которое находится из условия  $\beta_2 = 0$ :

$$R_{H_S} = \frac{1-3n}{2}. \quad (31)$$

Для подтверждения полученного аналитического результата был проведен численный эксперимент. Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (26) выполнено численно. В качестве метода интегрирования применен метод Рунге — Кутты по схеме Дормана—Принса седьмого-восьмого порядка с переменным шагом интегрирования [19] при точности решения дифференциальных уравнений  $10^{-15}$ . Для нахождения периодических решений применен модифицированный метод стрельбы [20], а условия периодичности выполнены с точностью  $10^{-12}$ . Как альтернативный и проверочный вариант использованы процедуры численного интегрирования жестких обыкновенных дифференциальных уравнений математического пакета MathCAD [10, с. 291].

На рис. 2, *a* представлены зависимости амплитуды предельных циклов от бифуркационного параметра  $C$ , подтверждающие полученные выше результаты. Действительно, при  $R = 1$  (для  $n = -1/3$ ) тип бифуркации изменяется.

Представляет интерес происхождение и эволюция предельного цикла, при взаимодействии с которым происходит бифуркация Хопфа. При значениях  $R < 1$  неустойчивый предельный цикл появляется, когда  $C < C_H$  (30). Очевидно, это происходит в результате бифуркации сепаратрисы седла [6, 21, 22]. Поэтому амплитуда его максимальна. При возрастании параметра  $C$  амплитуда неустойчивого цикла уменьшается и при  $C = C_H$  становится равной нулю. При больших значениях  $R$  устойчивый предельный цикл появляется, когда бифуркация Хопфа  $C = C_H$  имеет нулевую амплитуду. С возрастанием параметра  $C$  амплитуда устойчивого цикла увеличивается и при  $C > C_H$  он исчезает в результате бифуркации сепаратрисы седла.

Особый интерес представляет эволюция системы при промежуточных значениях параметра  $R$ , когда  $R > R_{H_S}$  (31). Результаты численных экспериментов показали, что в этом случае при одном и том же значении параметра  $C$  в системе может сосуществовать два предельных цикла: устойчивый внутри неустойчивого. Неустойчивый предельный цикл появляется в результате бифуркации сепаратрисы седла (см. рис 2, *б*), устойчивый — в ре-

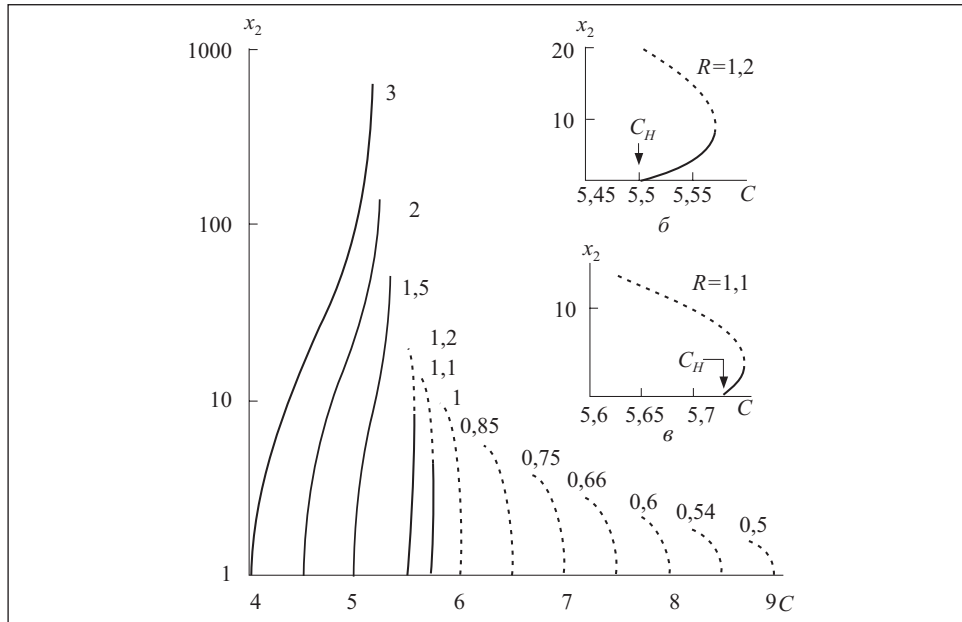


Рис. 2. Зависимость амплитуды предельных циклов (переменной  $x_2$ ) от бифуркационного параметра  $C$  для  $RC$ -цепи с дугой: — устойчивые предельные циклы (автоколебания); - - - неустойчивые предельные циклы

зультате бифуркации Хопфа(см. рис 2,  $\epsilon$ ). При увеличении параметра  $C$  амплитуда неустойчивого предельного цикла уменьшается, а устойчивого — увеличивается. Когда эти амплитуды становятся равными, в системе происходит еще один вид бифуркации. Иногда ее называют тангенциальной бифуркацией, иногда — седло-узловой бифуркацией для циклов [21]. Возможно, название «бифуркация двойного предельного цикла» [20] наиболее корректно отражает суть происходящего процесса, так как в результате два цикла сливаются и разрушают друг друга. Взаимодействие упомянутых выше бифуркаций в координатах  $R, C$  графически представлено на рис. 3.

**Бифуркация Хопфа в  $RLC$ -цепи с дугой.** Матрица Якоби и характеристическое уравнение для линеаризованной в окрестности особой точки  $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$  системы (27) имеют вид

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1-n}{2L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad (32)$$

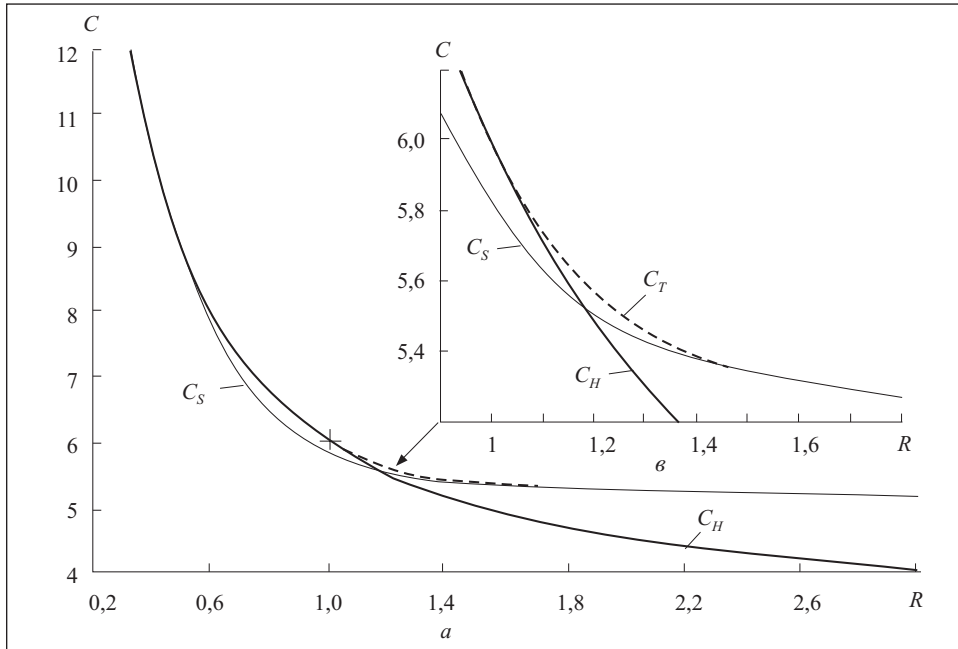


Рис. 3. Взаимодействие бифуркаций в координатах  $R, C$ :  $C_H$  — бифуркация Хопфа;  $C_T$  — бифуркация двойного предельного цикла;  $C_S$  — бифуркация сепаратрисы седла; + точка изменения типа бифуркации Хопфа (слева от точки бифуркации Хопфа субкритическая, справа — суперкритическая)

$$RLC\lambda^3 + (RLC + RC + L)\lambda^2 + (1+R+L+nRC)\lambda + (R+n) = 0. \quad (33)$$

Значение бифуркационного параметра  $C$ , когда собственные значения матрицы (32), т. е. корни характеристического уравнения (33), — чисто мнимые (3), является решением квадратного уравнения

$$nR^2(1+L)C_H^2 + R[(1+L)^2 + R]C_H + L(1+L+R) = 0. \quad (34)$$

Запись условия (34) в параметрической форме значительно упрощает дальнейшие аналитические вычисления [18]:

$$C_H(\omega_0) = \frac{L(1+\omega_0^2)+1-n}{(\omega_0^2 L - n)^2 + \omega_0^2(1+L)^2}; \quad R_H(\omega_0) = -\frac{(\omega_0^2 L - n)^2 + \omega_0^2(1+L)^2}{\omega_0^2 + n}. \quad (35)$$

Следует заметить также, что третье собственное значение необходимо выразить через значения мнимой части первых двух:

$$\delta(\omega_0) = -\frac{L^2(\omega_0^2+1) + (1+2L)(1-n)}{L[L(\omega_0^2+1) + 1-n]}.$$

Только после этого можно построить матрицу  $P$  согласно формуле (7):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\omega_0}{2} & -\frac{(1-n)(1+L)}{2L[L(\omega_0^2+1)+1-n]} \\ \frac{n-\omega_0^2}{2} & -\frac{\omega_0(1+L)}{2} & -\frac{(1-n)[(\omega_0^2L-n)^2+\omega_0^2(1+L)^2]}{2[L(\omega_0^2+1)+1-n]^2} \end{bmatrix}.$$

Тензоры вторых  $D^2f$  и третьих  $D^3f$  производных в основном содержат нулевые элементы. Поэтому приведем формулы только для элементов, не равных нулю:

$$D^2f_{1,2,1} = -\frac{(1-n)(3-n)}{4L}; \quad D^2f_{1,2,2} = D^2f_{2,2,1} = \frac{1-n}{2L}; \quad D^2f_{2,1,2} = 2;$$

$$D^3f_{1,1,2,2} = D^3f_{2,1,2,1} = D^3f_{1,2,2,1} = -\frac{(1-n)(3-n)}{4L};$$

$$D^3f_{1,1,2,1} = \frac{(1-n)(3-n)(5-n)}{8L}.$$

С помощью этих формул удалось получить аналитическое выражение для индекса Флоке  $\beta_2$ , которое вследствие громоздкости здесь не приведено. Однако для наглядности на рис. 4 в плоскости параметров  $L, R$  построена кривая смены типа бифуркации Хопфа, что соответствует условию  $\beta_2 = 0$ . Заштрихованная область соответствует субкритической бифуркации Хопфа. Таким образом, при фиксированном значении параметра  $L$  и изменении параметра  $R$  зависимость амплитуды от параметра  $C$  качественно не отличается от зависимостей для  $RC$ -цепи с дугой, т. е. при малых значениях параметра  $R$  бифуркация Хопфа субкритическая, при больших значениях — суперкритическая. Отличие состоит в том, что при возрастании параметра  $L$  значение параметра  $R_{H_s}$  возрастает. Результат численного эксперимента подтвердил, что зависимость амплитуды от параметра  $C$  качественно совпадает с зависимостью, показанной на рис. 2.

При фиксированном значении параметра  $R$  и изменении параметра  $L$  зависимость амплитуды от параметра  $C$  соответствует двум вариантам эволюции системы. При  $R < R_{H_s}$  в системе наблюдается только субкритическая бифуркация Хопфа, а при  $R > R_{H_s}$  — как суперкритическая (при малых значениях параметра  $L$ ), так и субкритическая (при больших значениях  $L$ ) бифуркация Хопфа. На рис. 5 изображена кривая бифуркации Хопфа для параметра  $R = 15$ , построенная по формулам (34) или (35).

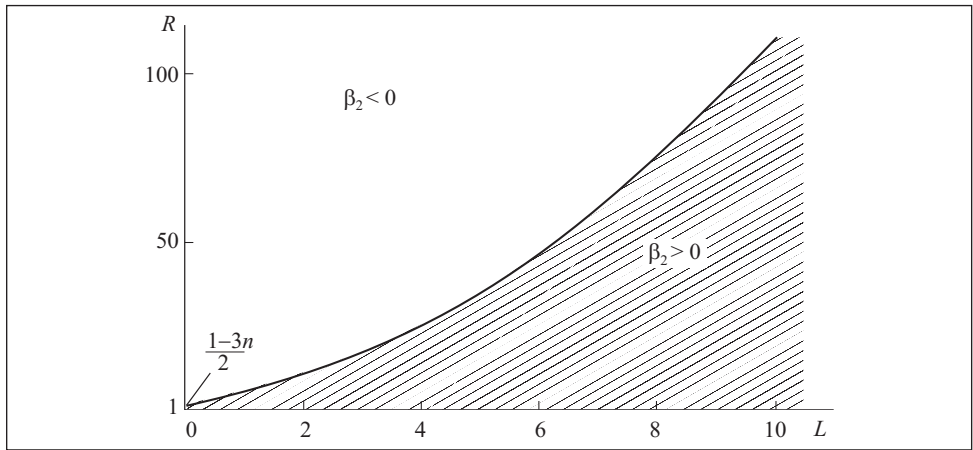


Рис. 4. Области различных типов бифуркации Хопфа в  $RLC$ -цепи с дугой: область над кривой — суперкритическая бифуркация Хопфа; заштрихованная область — субкритическая бифуркация Хопфа

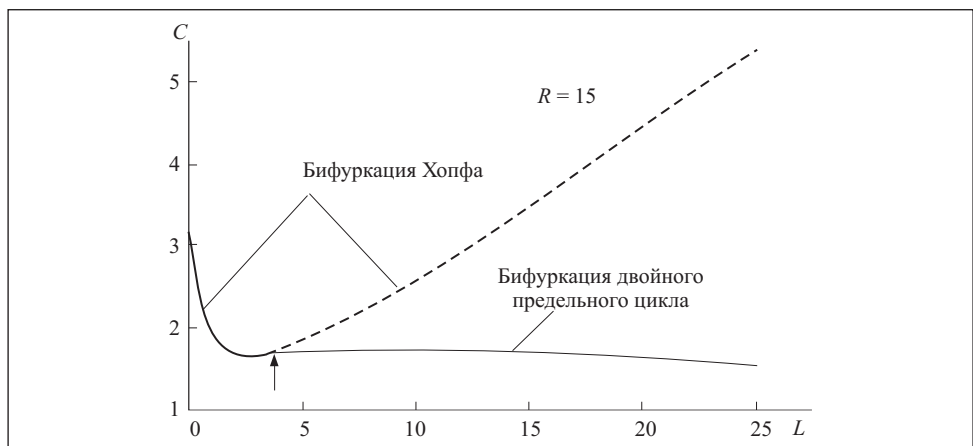


Рис. 5. Кривые бифуркаций в плоскости  $(L, C)$ : — суперкритическая бифуркация Хопфа; - - - субкритическая бифуркация Хопфа

Кривые бифуркации Хопфа для других значений параметра  $R > R_{H_s}$  качественно подобны. Они имеют минимум, а точка изменения типа бифуркации (на рис. 5 указана стрелкой) лежит немного правее минимума.

Результаты численных экспериментов, представленные на рис. 6, подтверждают результаты, полученные аналитически. Кроме того, они являются ответом на вопросы, которые остаются без ответа при аналитическом подходе. В частности, как возникает неустойчивый предельный цикл, взаимодействующий с особой точкой при субкритической бифуркации Хопфа?

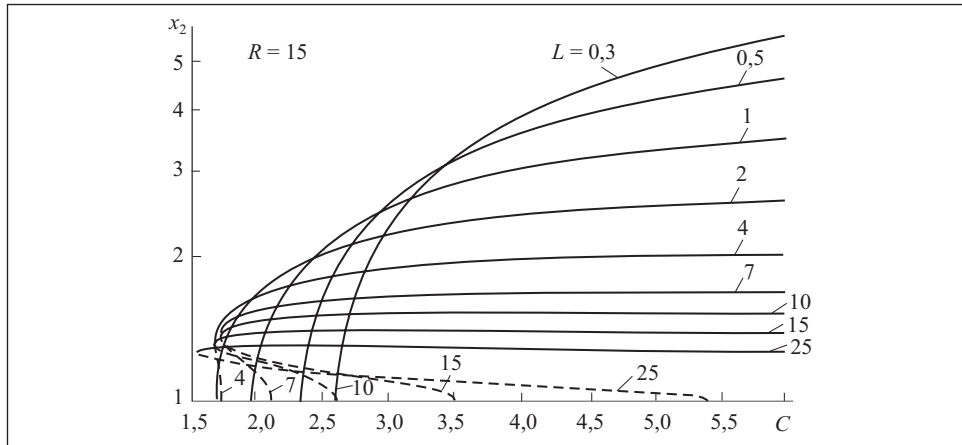


Рис. 6. Зависимость амплитуды предельных циклов (переменной  $x_2$ ) от бифуркационного параметра  $C$  для  $RLC$ -цепи с дугой: — устойчивые предельные циклы (автоколебания); - - - неустойчивые предельные циклы

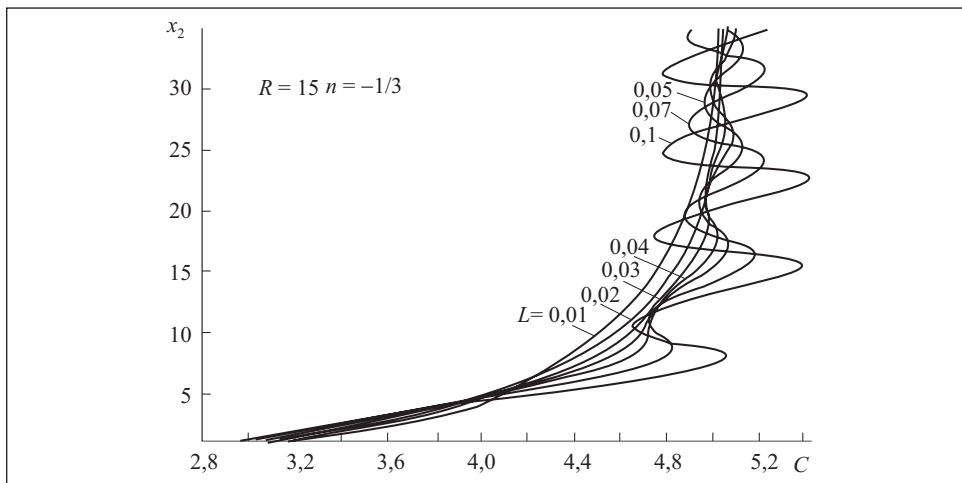


Рис. 7. Складчатая структура зависимостей амплитуды предельных циклов (переменной  $x_2$ ) от бифуркационного параметра  $C$  для  $RLC$ -цепи с дугой при малых значениях параметра  $L$

Оказалось, что до субкритической бифуркации Хопфа происходит бифуркация двойного предельного цикла. При возрастании параметра  $C$  на удалении от особой точки возникают два предельных цикла: неустойчивый внутри устойчивого. При дальнейшем возрастании параметра  $C$  амплитуда устойчивого цикла увеличивается, а неустойчивого уменьшается, становясь равной нулю при бифуркации Хопфа.

Таким образом, в области между кривой бифуркации двойного предельного цикла и кривой субкритической бифуркации Хопфа (см. рис. 5) сосуществуют два предельных цикла.

Представляет также интерес эволюция устойчивых циклов при малых значениях параметра  $L$ . Как показал численный эксперимент (см. рис. 7), монотонное возрастание амплитуды предельного цикла при возрастании бифуркационного параметра  $C$ , когда  $L \rightarrow 0$ , сменяется набором складок, ограниченных с обеих сторон бифуркациями двойного предельного цикла. Заканчивается ли эволюция циклов бифуркацией сепаратрисы седла, установить не удалось из-за трудностей проведения численного эксперимента при очень больших амплитудах предельных циклов, когда жесткость системы дифференциальных уравнений становится непреодолимой трудностью.

**Выводы.** 1. Дифференцирование правых частей исходной системы позволяет значительно упростить алгоритм вычисления показателя Ляпунова (индекса Флоке), который однозначно определяет тип бифуркации Хопфа, и исследовать достаточно сложные нелинейные динамические системы.

2. В  $RC$ - и  $RLC$ -цепях с электрической дугой возможны как суперкритическая, так и субкритическая бифуркации Хопфа.

3. Для понимания физической сущности бифуркации Хопфа необходимо рассматривать ее в связи с другими бифуркациями: бифуркацией двойного предельного цикла и бифуркацией сепаратрисы седла.

Improved algorithm of a Floquet index calculation technique of a periodic solution that interacts with fixed point under stability loss conditions is proposed. Principal benefit of an algorithm is simplicity of symbolical calculation which allows analyzing a kind of Hopf bifurcation in complex dynamic systems. By means of this technique it was determined that in electric circuits with arc both supercritical Hopf bifurcation and subcritical Hopf bifurcation occur.

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. 2-е изд. — М. : Физматгиз, 1959. — 926 с.
2. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. — М. : Наука, 1966. — 568 с.
3. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. — М. : Наука, 1967. — 488 с.
4. Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential Systems. // *Ber. Math. -Phys.* — 1942. — № 94. — S. 1—22
5. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения: Пер. с англ. Ред. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. — М. : Мир, 1980. — 387 с. (J. E. Marsden, M. McCracken *The Hopf Bifurcation and Its Application.* — N.-Y. : Springer-Verlag, 1976. — 370 p.)
6. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Изд-е 2, доп. — М. : Наука, 1990. — 488 с.



7. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла: Пер. с англ. Ред. Шноль Э.Э. — М. : Мир, 1985. — 280 с. (Hassard B. D., Kazarinoff N. D. and Wan Y. -H. Theory and applications of Hopf bifurcation. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1981. — 311 p.)
8. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory, 2nd ed. // Applied Mathematics Science. — 1998. — Vol. 112. — 593 p.
9. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8. — М. : СОЛОН-Пресс, 2003. — 176 с.
10. Кирьянов Д. В. Самоучитель Mathcad 11. — СПб. : БХВ-Петербург, 2003. — 560 с.
11. Пентегов И. В., Сидорец В. Н. Энергетические параметры в математической модели динамической сварочной дуги. // Автоматическая сварка. — 1988. — № 11. — С. 36—40.
12. Сидорец В. Н., Пентегов И. В. Возникновение и структура странного аттрактора в RLC-цепи с электрической дугой // Техническая электродинамика. — 1993. — № 2. — С. 28—32.
13. Sidorets V., Pentegov I. Electric Circuit with Arc: Periodic and Chaotic Behaviours // NDES'94. Proceedings of the Workshop «Nonlinear Dynamics of Electronics Systems» — Krakow : University of Mining and Metallurgy, 1994. — P. 227—232
14. Сидорець В. М., Пентегов І. В. Сценарії розвитку детермінованого хаосу в електричному колі з дугою. // Український фізичний журнал. — 1994. — 39, № 11—12. — С. 1080—1083.
15. Сидорец В. Н. Структуры бифуркационных диаграмм электрической цепи с дугой. // Техническая электродинамика. — 1998. — № 4. — С. 15—18
16. Сидорец В. Н. Нелинейные цепи с электрической дугой: периодические и хаотические колебания // Технічна електродинаміка. 2000. Тематичний випуск. Проблеми сучасної електротехніки. Ч. 6. — С. 7—12
17. Пентегов И. В., Сидорец В. Н., Тупицын С. И. Бифуркационные процессы в RC-цепях с электрической дугой. // Техническая электродинамика. — 1989. — № 2. — С. 29—35.
18. Сидорец В. Н. Особенности анализа собственных значений математических моделей нелинейных электрических цепей. // Электрон. моделирование. — 1998. — 20, № 5. — С. 60—71.
19. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М. : Мир, 1990. — 512 с. (Hairer E., Norsett S. P., and Wanner G. Solving Ordinary Differential Equation I: Nonstiff Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1987. — 510 p.)
20. Сидорец В. Н. Метод многократной стрельбы для исследования бифуркаций динамических систем // Электрон. моделирование. — 2006. — 28, № 4. — С. 3—13
21. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. — М. : Наука, 1990. — 312 с.
22. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М. : Наука, 1987. — 424 с.

Поступила 29.10.07

*СИДОРЕЦ Владимир Николаевич, канд. техн. наук, ст. научный сотр. отдела физики газового разряда и техники плазмы Ин-та электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский госуниверситет. Область научных исследований — моделирование электрической дуги, нелинейные электрические цепи с дугой, детерминированный хаос, математические методы для исследования нелинейных динамических систем.*