
УДК 51-74 : 669.147

В. Н. Ткаченко, д-р техн. наук, **А. А. Иванова**,
Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины
(Украина, 83114, Донецк, ул. Р. Люксембург, 74,
тел.: (062)3110436, E-mail: ivanova@iamm.ac.donetsk.ua)

Моделирование и анализ теплового поля непрерывного слитка криволинейной машины непрерывного литья заготовок

(Статью представил чл.-кор. НАН Украины В.В. Васильев)

Предложена математическая модель нестационарного теплового процесса непрерывного слитка криволинейной машины непрерывного литья заготовок, разработаны явные схемы конечно-разностной аппроксимации и алгоритм решения поставленной задачи. Проведен анализ полученных численных результатов.

Запропоновано математичну модель нестационарного теплового процесу непрерывного слитка криволинейной машины непрерывного литья заготовок, розроблено явні схеми скінченно-різницевої апроксимації та алгоритм розв'язання поставленої задачі. Проведено аналіз отриманих чисельних результатів.

Ключевые слова: криволинейная МНЛЗ, тепловое поле, граница раздела фаз, метод конечных разностей, параметрическая чувствительность.

Правильно выбранный температурный режим является одним из основных факторов стабильности качества продукции технологического процесса непрерывной разливки стали. Его нарушения часто приводят к полной потере плавки или массовому браку в слитках, а иногда и к серьезным авариям на машине непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Следовательно, при непрерывной разливке требования к температурному режиму должны быть значительно более жесткими, чем при обычной разливке [1, 2].

Тепловые процессы в непрерывном слитке на каждом участке МНЛЗ весьма сложны. Математические модели, описывающие их, основаны на нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных и граничных условиях различного рода. Поэтому такие задачи не поддаются аналитическому решению. Кроме того, аналитический подход ограничен простотой геометрических конфигураций рассматриваемой области. Экспериментальный метод решения задач, возникающих при изучении процес-

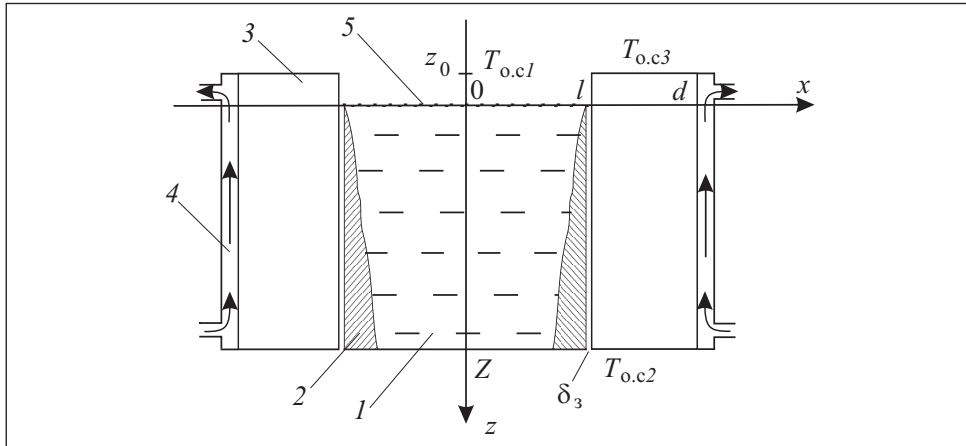


Рис. 1. Тепловая схема кристаллизатора: 1 и 2 — жидкая и твердая фазы; 3 — стенка кристаллизатора; 4 — охлаждающая вода; 5 — зеркало расплава; l — половина толщины слитка; d — расстояние от начала координат до поверхности стенки кристаллизатора, обращенной к воде

сов непрерывной разливки, требует больших денежных затрат, сложнейшего оборудования и решения вопросов моделирования реальных условий.

Современное развитие численных методов и ЭВМ делает численный подход наиболее привлекательным для решения задач моделирования и исследования тепловых процессов непрерывной разливки стали. Следует заметить, что он не имеет ограничений, связанных с нелинейностью, которые обычно возникают при попытках аналитических решений. Постоянно возрастающая мощность вычислительной техники дает возможность решать все более полные и сложные задачи моделирования технологического процесса непрерывной разливки стали.

Математическое моделирование позволяет оптимизировать рабочие параметры непрерывной разливки, повысить качество разливаемой заготовки, снизить производственные затраты и обеспечить безаварийную работу МНЛЗ.

Математическая модель. При построении математической модели приняты следующие упрощающие допущения:

1. Тепловой поток в направлении, перпендикулярном плоскости O_{xz} , пренебрежимо мал. Это соответствует случаю, когда в слитках прямоугольного сечения широкая грань хотя бы в два раза больше узкой.

2. Распределение температур в кристаллизаторе (рис. 1) симметрично относительно оси Oz .

3. Жидкая и твердая фазы разделены четкой границей (линией), а не полосой, а температура затвердевания средняя на интервале ликвидус — солидус.

4. Перемешивание в жидкой фазе не учитывается.

5. В случае, когда разливка проводится не под шлаком, учитываются потери тепла от зеркала расплава только за счет излучения, поскольку конвективная составляющая не имеет большого значения [2].

6. Ширина слитка на любом уровне МНЛЗ — величина постоянная.

7. Кристаллизатор — недеформируемое тело.

8. Возвратно-поступательное движение кристаллизатора и трение между поверхностями слитка и кристаллизатора не учитываются.

9. В связи с тем, что между поверхностью слитка в кристаллизаторе и стенкой кристаллизатора всегда существует некоторый зазор, обусловленный шероховатостями поверхностей и усадкой слитка, в рассмотрение вводится эффективная толщина газового зазора δ_3 между поверхностью слитка и стенкой кристаллизатора [2].

10. Тепловой поток в конце прямолинейного участка зоны вторичного охлаждения (ЗВО) считается равным нулю.

Теплообмен в области кристаллизатора. Уравнение тепломассопереноса для металла имеет следующий вид [3]:

$$\frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial \tau} + v(\tau) \frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial z} = \frac{1}{c(T, x, z) \rho(T, x, z)} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}, \quad (1)$$

где $v(\tau)$ — скорость вытягивания слитка, м/с; T — температура в жидкой и твердой фазах, К; c — удельная теплоемкость, Дж/(кгК); ρ — плотность, кг/м³; λ — теплопроводность разливаемого металла, Вт/(мК).

Поскольку основные потери тепла от зеркала расплава происходят в результате излучения, а конвекция играет незначительную роль в передаче тепла, тепловой поток от жидкой стали можно описать уравнением [2]

$$-\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} = C_{\text{п}} \left[\left(\frac{T_{0, \text{сд}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{z=0}}{100} \right)^4 \right], \quad (2)$$

где $C_{\text{п}}$ — приведенный коэффициент излучения, Вт/(м²К⁴); $T|_{z=0}$ — температура излучающей жидкой стали; $T_{0, \text{сд}}$ — температура окружающей среды.

При разливке под шлаком тепловой поток от зеркала расплава равен нулю. Граничные условия для части слитка внутри кристаллизатора следующие:

при $x = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad (3)$$

при $x = 1$

$$\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\lambda_{г.з}}{\delta_3} (T|_{x=l+\delta_3} - T|_{x=l}) + C_{\Pi} \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta_3}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], 0 < z \leq Z, \quad (4)$$

где $\lambda_{г.з}$ — коэффициент теплопроводности газовой смеси в зазоре; $T|_{x=l}$ и $T|_{x=l+\delta_3}$ — температура поверхностей слитка и кристаллизатора; δ_3 — толщина газового зазора.

Условия на границе раздела фаз следующие: условие равенства температур —

$$T(\tau, x, z)|_{x=\xi_-(\tau, z)} = T(\tau, x, z)|_{x=\xi_+(\tau, z)} = T_{кр}; \quad (5)$$

условие Стефана — уравнение, описывающее движение неизвестной границы между жидкой и твердой фазами металла,

$$\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{x=\xi_-(\tau, z)} - \lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{x=\xi_+(\tau, z)} = \mu \rho (T_{кр}) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + v \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), 0 \leq z \leq Z, \quad (6)$$

где ξ — граница раздела фаз, описываемая функцией двух переменных, $x = \xi(\tau, z)$; μ — скрытая теплота кристаллизации, Дж/кг; $T_{кр}$ — температура кристаллизации (средняя на интервале ликвидус — солидус); \bar{n} — нормаль к поверхности раздела фаз.

Начальное положение границы раздела фаз

$$\xi(0, z) = \xi_0(z). \quad (7)$$

Граничное условие для функции ξ :

$$\xi(\tau, 0) = l. \quad (8)$$

Уравнение теплопроводности для стенки кристаллизатора:

$$\frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{c(T, x, z) \rho(T, x, z)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}, \quad z_0 < z < Z, \quad l < x < d. \quad (9)$$

Граничные условия для стенки кристаллизатора: при $x = d$

$$\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d} = \alpha_1 (T_B - T|_{x=d}), \quad z_0 < z < Z;$$

при $z = Z$

$$\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z} = \alpha_2 (T_{o.c2} - T|_{z=Z}), \quad l < x < d;$$

при $z = z_0$

$$-\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \alpha_3 (T_{o.c3} - T|_{z=z_0}), \quad l < x < d; \quad (10)$$

при $x = l + \delta_3$ ниже уровня мениска

$$\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta_3} = \frac{\lambda_{r.3}}{\delta_3} (T|_{x=l+\delta_3} - T|_{x=l}) + C_{II} \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta_3}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], \quad 0 < z \leq Z;$$

при $x = l + \delta_3$ (над мениском)

$$-\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta_3} = \alpha_4 (T_{o.cl} - T|_{x=d}) + C_{II} \left[\left(\frac{T_{o.cl}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=d}}{100} \right)^4 \right], \quad z_0 < z < 0,$$

где α_1 — коэффициент теплоотдачи от стенки кристаллизатора к охлаждающей воде, Вт/(м²К); T_b — температура охлаждающей воды; $\alpha_{2,3,4}$ — коэффициенты теплоотдачи от стенки кристаллизатора в окружающую среду, $T_{o.c2,3,4}$ — температура окружающей среды.

Температура охлаждающей воды в канале кристаллизатора описывается следующим балансовым уравнением:

$$c_b S_b v_b \frac{\partial T_b(\tau, z)}{\partial z} = P_c \alpha_1 (T_b(\tau, z) - T|_{x=d}) - P_{вн} \alpha_{вн} (T_b(\tau, z) - T_{вн}), \quad (11)$$

где c_b — объемная теплоемкость воды, Дж/(К · м³); S_b — сечение прохода воды, м²; v_b — скорость воды, м/с; P_c — периметр стенки кристаллизатора, м; $P_{вн}$ — периметр внешней стенки; $\alpha_{вн}$ — коэффициент теплоотдачи от воды к внешней стенке; $T_{вн}$ — температура внешней стенки.

Температура охлаждающей воды на входе в канал кристаллизатора

$$T_b(0, Z) = T_{b.в}(\tau), \quad (12)$$

ее начальное распределение внутри канала:

$$T_b(0, z) = T_{b0}(z). \quad (13)$$

Теплообмен в ЗВО. Запишем уравнение тепломассопереноса для слитка на криволинейных участках МНЛЗ (рис. 2):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \theta_m(\tau) \frac{\partial T(\tau, r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{c(T, r, \varphi) \rho(T, r, \varphi)} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] + \frac{\lambda(T, r, \varphi)}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right\}, \quad (14)$$

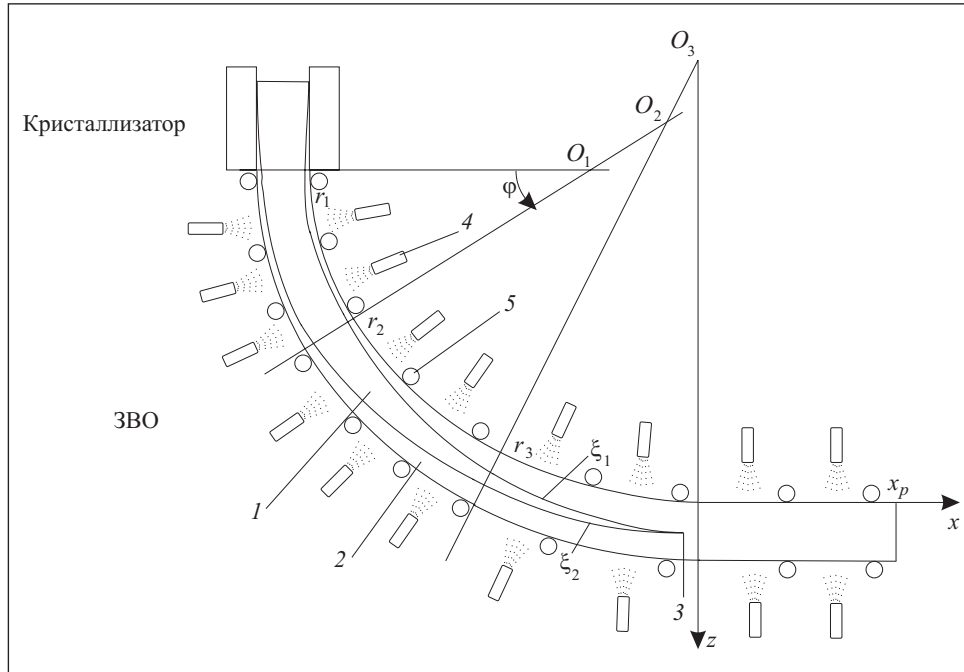


Рис. 2. Тепловая схема ЗВО: 1 и 2 — жидкая и твердая фазы; 3 — точка окончательной кристаллизации (глубина жидкой фазы); 4 — форсунки, подающие водо-воздушную смесь; 5 — ролики

где θ_m — угловая скорость движения слитка на m -м криволинейном участке. Условия равенства температур на границе раздела фаз имеет вид

$$T(\tau, r, \varphi)|_{r=\xi_{1,2-}(\tau, \varphi)} = T(\tau, r, \varphi)|_{r=\xi_{1,2+}(\tau, \varphi)} = T_{кр}, r_{1,2} = \xi_{1,2}(\tau, \varphi), \quad (15)$$

где $\xi_1(\varphi)$ и $\xi_2(\varphi)$ — границы раздела фаз. Условия Стефана:

$$\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{1-}} - \lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{1+}} = \mu \rho_{кр} \left(\theta_m(\tau) \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} \right),$$

$$\xi_1(0, \varphi) = \xi_{1_0}(\varphi),$$

$$\lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{2+}} - \lambda(T, r, \varphi) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{2-}} = -\mu \rho_{кр} \left(\theta_m(\tau) \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} \right),$$

$$\xi_2(0, \varphi) = \xi_{2_0}(\varphi). \quad (16)$$

Граничные условия на криволинейных участках:

по внутреннему радиусу —

$$-\lambda(T, \varphi) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_m} = \alpha_I(G_m(\tau), \varphi)(T_{Im} - T|_{r=r_m}) + C_{Im}(T_{Im}^4 - (T|_{r=r_m})^4),$$

по внешнему радиусу —

$$\lambda(T, \varphi) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_m+2l} = \alpha_E(G_m(\tau), \varphi)(T_{Em} - T|_{r=r_m+2l}) + C_{Em}(T_{Em}^4 - (T|_{r=r_m+2l})^4), \quad (17)$$

где α_I, α_E — коэффициенты теплоотдачи от поверхности слитка в окружающую среду; C_{Im}, C_{Em} — приведенные коэффициенты излучения от поверхности слитка; T_{Im} и T_{Em} — температура окружающей среды в m -й секции ЗВО соответственно по внутреннему и внешнему радиусам; $G_m(\tau)$ — расход воды на m -й секции.

Уравнение тепломассопереноса на прямолинейном участке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} + v(\tau) \frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial x} &= \frac{1}{c(T, x, z) \rho(T, x, z)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если жидкая фаза продолжается дальше точки выпрямления, то на прямолинейном участке ЗВО также задаются условия равенства температур на границе раздела фаз,

$$T(\tau, x, z)|_{x=\xi_{1,2-}(x,z)} = T(\tau, x, z)|_{x=\xi_{1,2+}(x,z)} = T_{кр}, \quad (19)$$

и условия Стефана:

$$\begin{aligned} \lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{1-}} - \lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{1+}} &= \mu \rho_{кр} \left(v(\tau) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} \right), \\ \lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{2+}} - \lambda(T, x, z) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi_{2-}} &= -\mu \rho_{кр} \left(v(\tau) \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия на прямолинейном участке:

по внутреннему радиусу —

$$-\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_p} = \alpha_I(G_m(\tau), x)(T_{Io.cz_p} - T|_{z=z_p}) + C_{I4}(T_{Io.cz_p}^4 - (T|_{z=z_p})^4),$$

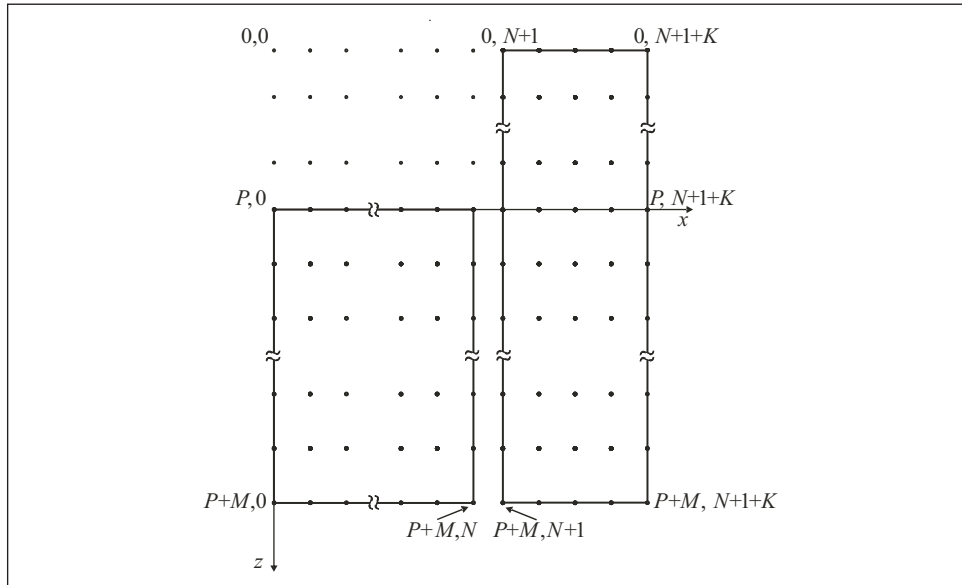


Рис. 3. Сеточное разбиение слитка внутри кристаллизатора и стенки кристаллизатора

по внешнему радиусу—

$$\lambda(T, x) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_p+2l} =$$

$$= \alpha_{Ez_p} (G_m(\tau), x) (T_{Eo.cz_p} - T|_{z=z_p+2l}) + C_{Ez_p} (T_{Eo.cz_p}^4 - (T|_{z=z_p+2l})^4). \quad (21)$$

Будем считать, что в конце прямолинейного участка тепловой поток равен нулю:

$$\lambda(T, z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_p} = 0. \quad (22)$$

Зададим начальные условия для всего поля температур:

на прямолинейных участках —

$$T(0, x, z) = T_0(x, z),$$

на криволинейных участках —

$$T(0, r, \varphi) = T_0(r, \varphi). \quad (23)$$

При этом начальная температура есть непрерывная функция на всей области слитка и стенки кристаллизатора.

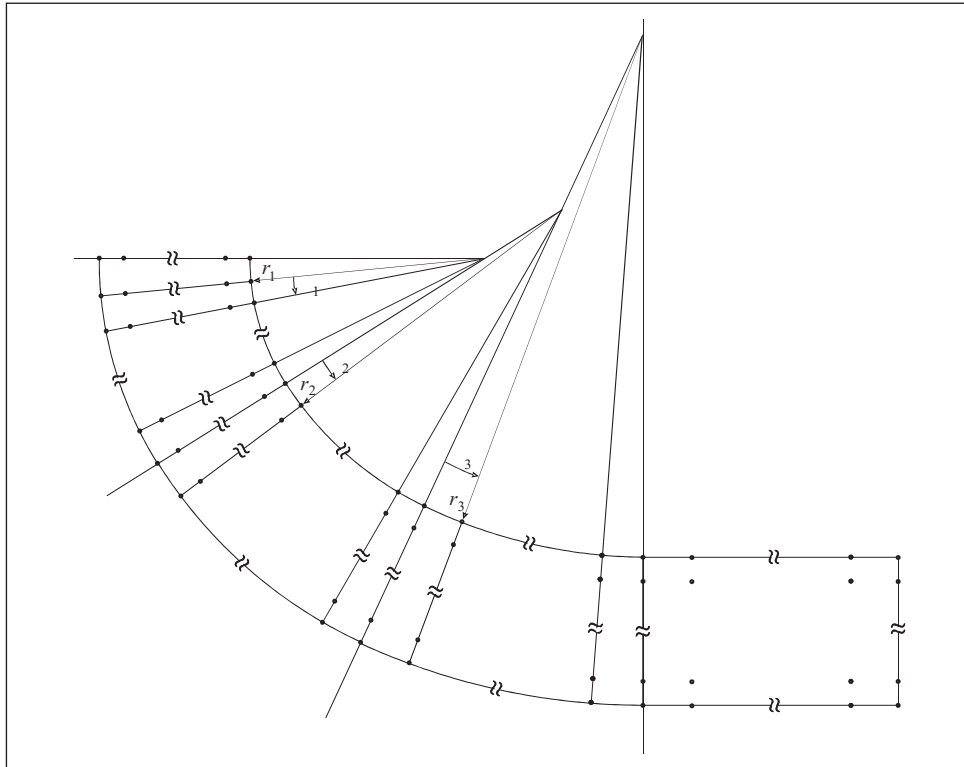


Рис. 4. Сеточное разбиение ЗВО

Конечно-разностные аппроксимации исходных уравнений. В области первичной зоны охлаждения кристаллизатора введем следующие равномерные прямоугольные сетки (рис. 3):

на $(0, l) \times (0, Z)$ — слиток внутри кристаллизатора — сетка $\omega_{q,h}$ с шагами $q = l / N$ и $h = Z / M$;

на $(l + \delta_3, l + \delta_3 + d) \times (z_0, 0)$ (стенка кристаллизатора выше уровня мениска) — сетка ω_{s,h_1} с шагами $s = d / K$ и $h_1 = z_0 / P$;

на $(l + \delta_3, l + \delta_3 + d) \times (0, Z)$ (стенка кристаллизатора ниже уровня мениска) — сетка $\omega_{s,h}$.

В области ЗВО введем следующие конечно-разностные сетки. На каждом участке с постоянной кривизной введем равномерную сетку ω_{q,f_i} (рис. 4) с шагом по радиусу $q = l / N$ (совпадает с шагом по координате x в кристаллизаторе) и шагом по углу $f_m = r_m / M_m$, где m — номер участка, r_m — радиус кривизны внутренней поверхности слитка на m -м участке. На прямолинейном участке введем прямоугольную равномерную сетку ω_{q,h_2} ,

где $h_2 = x_2 / M_4$, x_2 — длина прямолинейного участка, M_4 — число отрезков разбиения по длине.

Введем систему временных интервалов $\{\tau_k\}$, $k = 0, 1, 2 \dots$ и соответствующую равномерную сетку по времени ω_τ , $\tau_k = \Delta\tau$, для всех $k = 0, 1, 2 \dots$. Поставим в соответствие задаче (1) — (23) конечно-разностную задачу.

Перепишем уравнение (1) в недивергентной форме и построим его конечно-разностный аналог, используя пятиточечный шаблон:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}}{\Delta\tau} + v_k \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{h} = \\ = & \frac{1}{c_{k,i,j} \rho_{k,i,j}} \left\{ \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i+1,j} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i-1,j}}{q^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i-1,j}}{q} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{q} + \right. \\ & \left. + \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i,j+1} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i,j-1}}{h^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i,j-1}}{h} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{h} \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Это так называемая явная схема [4], погрешность аппроксимации, в которой определяется шагами сетки по времени и пространственным координатам $O[\Delta\tau, q^2, h]$. Граничному условию (2) соответствует уравнение

$$-\lambda_{k,i,0} \frac{3T_{k,i,0} - 4T_{k,i,1} + T_{k,i,2}}{2h} = C_{\text{п}} \left[\left(\frac{T_{\text{о.с.д}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{k,i,0}}{100} \right)^4 \right]$$

с погрешностью аппроксимации $O[h^2]$. Граничным условиям (3) и (4) поставим в соответствие уравнения:

$$\begin{aligned} & 3T_{k,0,j} = 4T_{k,1,j} - T_{k,2,j}, \\ & \lambda_{k,N,j} \frac{T_{k,N-2,j} - 4T_{k,N-1,j} + 3T_{k,N,j}}{2q} = \\ & = \frac{\lambda_{\Gamma.3}}{\delta_3} (T_{k,N,j} - T_{k,N+1,j}) + C_{\text{п}} \left[\left(\frac{T_{k,N+1,j}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{k,N,j}}{100} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

с погрешностью $O[q^2]$. Уравнению (9) поставим в соответствие следующую конечно-разностную аппроксимацию:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}}{\Delta\tau} = \\ = & \frac{1}{c_{k,i,j} \rho_{k,i,j}} \left\{ \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i+1,j} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i-1,j}}{s^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i-1,j}}{s} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{s} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \lambda_{k,i,j} \left\{ \frac{T_{k,i,j+1} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i,j-1}}{h^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i,j-1}}{h} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{h} \right\}$$

с погрешностью $O[\Delta\tau, s^2, h^2]$. Разностные уравнения, соответствующие граничным условиям (10), выберем в виде

$$\lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,N+K-1,j} - 4T_{k,N+K,j} + 3T_{k,N+K+1,j}}{2s} = \alpha_1 (T_{v_{k,j}} - T_{k,N+K+1,j}).$$

Аналогично записываются конечно-разностные уравнения для других границ стенки кристаллизатора. Балансовому уравнению (11) соответствует уравнение

$$c_B S_B v_B \frac{T_{B_{k,j}} - T_{B_{k,j-1}}}{h} = P_c \alpha_1 (T_{B_{k,j}} - T_{k,N+K+1,j}) - P_{вн} \alpha_{вн} (T_{k,N+K+1,j} - T_{вн})$$

с погрешностью $O[h]$. Конечно-разностный аналог уравнения теплопереноса в ЗВО имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}}{\Delta\tau} + \theta_{mk} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{f_m} = \\ & = \frac{1}{c_{k,i,j} \rho_{k,i,j}} \left\{ \lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i+1,j} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i-1,j}}{q^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i-1,j}}{q} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{q} + \right. \\ & + \frac{1}{r_m^2} \left(\lambda_{k,i,j} \frac{T_{k,i,j+1} - 2T_{k,i,j} + T_{k,i,j-1}}{f_m^2} + \frac{\lambda_{k,i,j} - \lambda_{k,i,j-1}}{f_m} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i,j-1}}{f_m} \right) + \\ & \left. + \frac{\lambda_{k,i,j}}{r_m} \frac{T_{k,i,j} - T_{k,i-1,j}}{q} \right\} \end{aligned}$$

с погрешностью $O[\Delta\tau, q, f_m]$.

Алгоритм решения системы алгебраических уравнений. После оценки максимально допустимого шага по времени для устойчивости [3] построенной явной разностной схемы проведем перерасчет всего поля температур по следующему алгоритму:

1. Расчет температуры охлаждающей воды в канале кристаллизатора.
2. Расчет граничных условий для стенки кристаллизатора.
3. Расчет температуры внутри стенки кристаллизатора.
4. Расчет граничных условий для слитка.
5. Расчет температуры во внутренних точках слитка и положения границы раздела фаз.

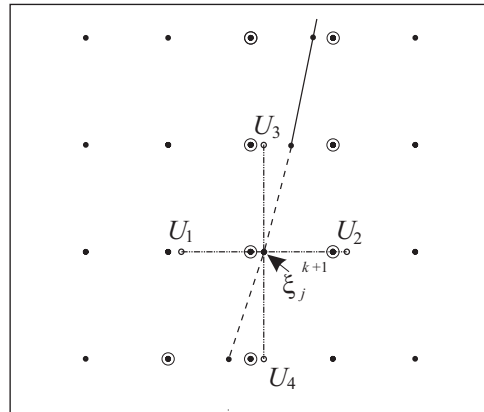
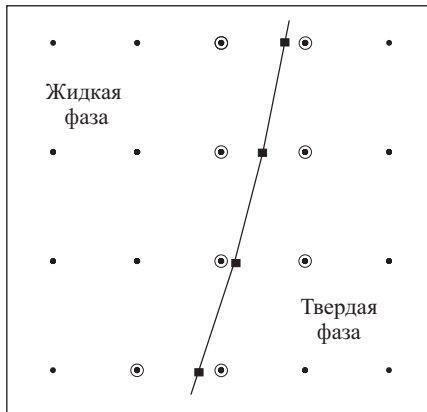


Рис. 5. Граница раздела фаз в основной сетке: ⊙ — приграничные узлы; • — регулярные узлы; — граница раздела фаз; ■ — узлы на границе раздела фаз

Рис. 6. Схема для расчета положения границы раздела фаз

Узлы на границе раздела фаз образуются в точках ее пересечения с поперечными линиями разностной сетки (рис. 5). Температура в них равна температуре кристаллизации.

Узлы основной сетки, лежащие в непосредственной близости к границе раздела фаз, назовем приграничными. В них нельзя пересчитывать температуру по предложенной схеме, так как при этом нарушается условие устойчивости разностных схем [3]. Поэтому сначала вычислим температуру в «регулярных» узлах, пользуясь явной схемой (24), после чего можем найти новое положение границы раздела фаз.

Заменяя в условиях Стефана (6), (16) производные конечными разностями, получим связь положения неизвестной границы с температурой в приграничных узлах. Рассмотрим сначала область кристаллизатора. Пусть новое положение границы $\{\xi_j^{k+1}\}$, $j = P, P+M$. Обозначим приграничный узел сетки слева от ξ_j^{k+1} $x_{i,j}^{k+1}$. Чтобы приблизить производную температуры по нормали в точке ξ_j^{k+1} , введем специальные узлы, которые вместе с точкой ξ_j^{k+1} образуют равномерный пятиточечный шаблон с шагами q и h (рис. 6). Получаем конечно-разностный аналог уравнения (6):

$$\lambda \left(\sqrt{\left(\frac{U_2 - T_{kr}}{q}\right)^2 + \left(\frac{U_4 - T_{kr}}{h}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{U_1 - T_{kr}}{q}\right)^2 + \left(\frac{U_3 - T_{kr}}{h}\right)^2} \right) = \mu\rho \left(\frac{\xi_j^{k+1} - \xi_j^k}{\Delta t} + v \frac{\xi_j^{k+1} - \xi_{j-1}^{k+1}}{h} \right). \quad (25)$$

Температура в точке ξ_j^{k+1} равна температуре кристаллизации. Тогда температуру U_1 в специальном узле x можно с высокой степенью точности приблизить полиномом Лагранжа 2-й степени:

$$U_1 = T_{kr} \frac{(x - x_{i+1,j})(x - x_{i+2,j})}{(\xi_j^{k+1} - x_{i+1,j})(\xi_j^{k+1} - x_{i+2,j})} + T_{i+1,j} \frac{(x - \xi_j^{k+1})(x - x_{i+2,j})}{(x_{i+1,j} - \xi_j^{k+1})(x_{i+1,j} - x_{i+2,j})} + T_{i+2,j} \frac{(x - \xi_j^{k+1})(x - x_{i+1,j})}{(x_{i+2,j} - \xi_j^{k+1})(x_{i+2,j} - x_{i+1,j})}.$$

Аналогично определяется температура U_2, U_3, U_4 в остальных специальных узлах. Подставляя полученные выражения в конечно-разностный аналог условия Стефана (25), получаем следующую систему нелинейных уравнений для нахождения неизвестной границы:

$$\xi_j^{k+1} = \xi_j^k + \Delta t \left\{ \frac{\lambda}{\mu\rho} \left(\sqrt{\left(\frac{U_2 - T_{kr}}{q} \right)^2 + \left(\frac{U_4 - T_{kr}}{h} \right)^2} - \sqrt{\left(\frac{U_1 - T_{kr}}{q} \right)^2 + \left(\frac{U_3 - T_{kr}}{h} \right)^2} \right) - v \frac{\xi_j^{k+1} - \xi_{j-1}^{k+1}}{h} \right\}, \quad P \leq j \leq P + M. \quad (26)$$

Систему (26) решаем методом итераций. Аналогично определяем положение неизвестной границы в ЗВО. Определив новое положение границы раздела фаз, можем интерполировать температуру в приграничных узлах.

Следует заметить, что на уровне мениска и на уровне точки окончательного затвердевания, за которой в слитке есть только твердая фаза, и координаты которой являются характеристикой глубины жидкой фазы, недостаточно внутренних узлов в твердой или жидкой фазах. Для расчетов в таких точках применяются специальные алгоритмы.

Расчет на уровне мениска. Для вычислений приведенным выше способом недостаточно узлов в твердой фазе. Если $l - \xi_j < q$, то для пересчета положения границы раздела фаз в качестве U_2 используем значение T_{Nj} и шаблон с уменьшенным шагом по координате x , равным $l - \xi_j$.

Расчет на уровне точки окончательного затвердевания. В этом случае недостаточно регулярных узлов внутри жидкой фазы. Поэтому будем считать, что если расстояние между ξ_1 и ξ_2 стало меньше заданной величины, то через некоторое небольшое число шагов по длине слитка найдется точка окончательного затвердевания. Определим ее координаты, исходя из общего поведения ξ_1 и ξ_2 . Затем воспользуемся свойством, согласно которому производная по нормали к границе раздела фаз со



Рис. 7. Глубина жидкой фазы в зависимости от скорости вытягивания слитка при различных режимах охлаждения: 1, 2, 3 — соответствующие режимы расхода воды

стороны жидкой фазы в этом месте очень близка к нулю, и доопределим температуру во внутренних приграничных узлах равную температуре кристаллизации.

Анализ результатов моделирования. Представленный алгоритм программно реализован в среде программирования Borland C++ Builder 6.0. Расчеты проведены для марки стали 40 и геометрических параметров криволинейной МНЛЗ, аналог которой установлен на ОАО «МК «Азов-сталь». Толщина слитка равна 0,2м.

На рис. 7 представлены графики зависимости глубины жидкой фазы от скорости вытягивания слитка при различных режимах охлаждения. Глубина жидкой лунки определена для установившегося процесса. Режимы расхода воды (на одну форсунку) следующие:

1 — $G_1 = 0,00032$ (м³/с), $G_2 = 0,00028$ (м³/с), $G_3 = 0,00024$ (м³/с);

2 — $G_1 = 0,0003$ (м³/с), $G_2 = 0,00025$ (м³/с), $G_3 = 0,00019$ (м³/с);

3 — $G_1 = 0,00026$ (м³/с), $G_2 = 0,0002$ (м³/с), $G_3 = 0,00013$ (м³/с).

Таким образом, для различных марок стали и различных скоростей вытягивания слитка можно определить, при каких режимах расхода охлаждающей воды будет поддерживаться оптимальная глубина жидкой лунки.

На рис.8 представлены графики распределения температуры вдоль поверхности, на некотором расстоянии от поверхности и на оси слитка. На тех участках поверхности, которые в данный момент накрываются факелом форсунки, распыляющей охлаждающую водо-воздушную смесь, наблюдаются снижения температуры на величину от 40 до 70 К. Из результатов моделирования видно, что кривизна слитка влечет за собой

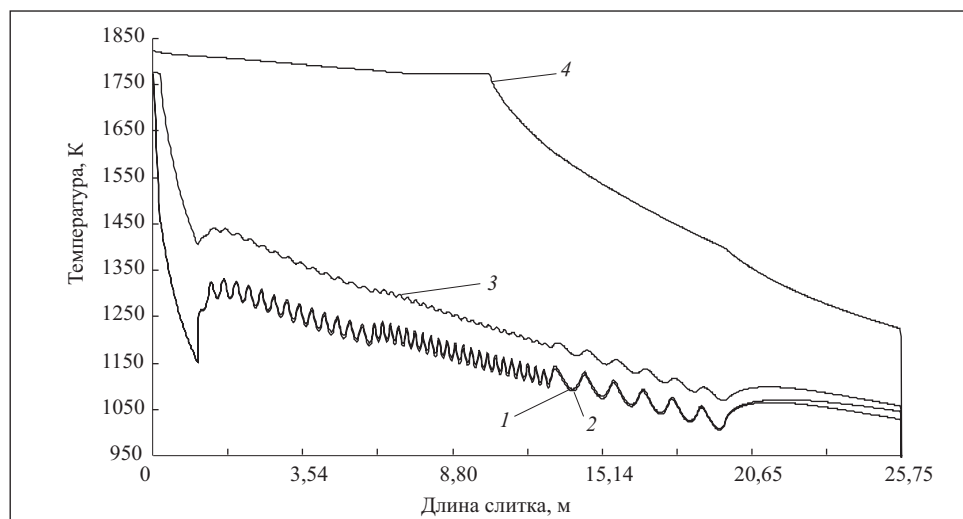


Рис. 8. Графики распределения температуры слитка: 1 — внутренняя поверхность; 2 — внешняя поверхность; 3 — на расстоянии 4мм от внешней поверхности; 4 — на оси слитка

асимметрию температурного поля. Даже при одинаковой интенсивности охлаждения на поверхностях внутреннего и внешнего радиусов температура на внешней поверхности несколько ниже. Такое же явление наблюдается в производственных условиях.

Для исследования степени влияния изменения входных параметров (расходов охлаждающей воды в кристаллизаторе и в каждой секции ЗВО) на изменение температуры слитка построены графики чувствительности динамической системы по параметрам [5]. Под чувствительностью в данном случае подразумевается реакция процесса на 10-ти процентное изменение рассматриваемого параметра. Для каждой зоны поочередно вносились изменения в величины расходов воды. Расчет нового расхода воды проводился до тех пор, пока поле температур вновь не стабилизировалось.

На рис. 9 показана чувствительность температуры поверхности слитка. Результаты исследований показывают, что изменение расхода охлаждающей воды на кристаллизатор оказывает очень незначительное влияние на температуру поверхности слитка. Следовательно, этот параметр целесообразно использовать в качестве управляющего. В то же время из анализа трех остальных кривых можно сделать вывод, что процесс достаточно чувствителен к изменениям величин расхода воды в любой из секций ЗВО.

Кроме того, из рис. 9 видно, что чувствительность динамической системы зависит также от температуры заготовки и места расположения

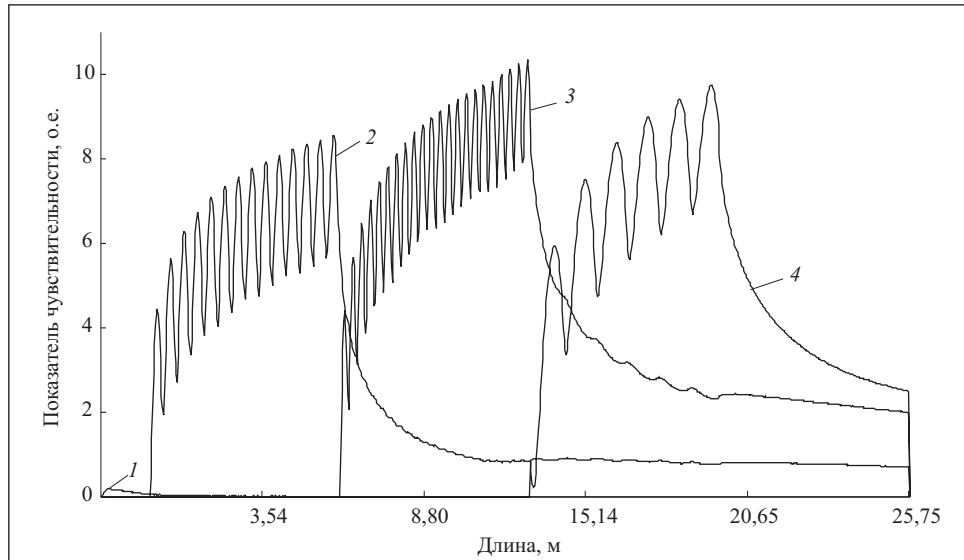


Рис. 9. Чувствительность температуры поверхности слитка к изменению расхода охлаждающей воды: 1 — в кристаллизаторе; 2, 3, 4 — соответственно в первой, второй и третьей секциях ЗВО

форсунок, подающих водо-воздушную смесь. Чем выше температура, тем больше чувствительность к изменениям расхода воды в ЗВО. Естественно, чувствительность, выше на участках, находящихся непосредственно внутри зоны действия форсунки исследуемой секции. Функции чувствительности имеют экстремумы в точках, соответствующих концам секций ЗВО. На рис. 9 видна также динамика затухания чувствительности к концу непрерывного слитка.

Выводы. Таким образом, в построенной математической модели учтены важнейшие технологические параметры и особенности тепловых процессов МНЛЗ, что позволяет воспроизвести динамику тепловых процессов в условиях изменяющихся во времени основных параметрах таких, как скорость движения слитка, температура разливаемого металла и температура охлаждающей воды в кристаллизаторе и ЗВО. Используемая полярная система координат является более естественной при описании геометрии слитка криволинейных и радиальных МНЛЗ и существенно упрощает процедуру расчетов модели. Математическая модель адекватна моделируемому процессу на качественном уровне и хорошо соответствует данным, полученным в производственных условиях. Выполненные исследования чувствительности температуры слитка к изменениям расхода охлаждающей воды позволяют численно оценить влияние управляю-

щих воздействий на температурное поле слитка. Модель может быть использована для разработки технологии и режимов непрерывной разливки стали, а также при разработке системы автоматического управления процессом для синтеза алгоритмов управления и для непосредственного использования в системе управления с целью оперативной оценки температурного состояния разливаемого металла.

The mathematical model is proposed for non-stationary thermal process of continuous ingot of curvilinear continuous casting machine. The explicit schemes are developed for finite-difference approximation and algorithm of the problem solution. The analysis of numerical results obtained is performed.

1. Смирнов А. Н., Пилюшенко В. Л., Минаев А. А. и др. Процессы непрерывной разливки стали. — Донецк: ДонНТУ, 2002. — 236 с.
2. Теория непрерывной разливки. Технологические основы/ Рутес В.С., Аскольдов В.И., Евтеев Д.П. и др. — М.: Металлургия, 1971. — 296 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 656 с.
5. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.

Поступила 01.03.07;
после доработки 06.08.07

ТКАЧЕНКО Валерий Николаевич, д-р техн. наук, зав. отделом теории управляющих систем Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. В 1970 г. окончил Донецкий госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование, задачи идентификации, управление технологическими процессами.

ИВАНОВА Анна Александровна, инженер Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. В 1995 г. окончила Донецкий госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование, задачи идентификации, управление технологическими процессами.