УДК 621.37:621.391

В. В. Палагин, канд. техн. наук
Черкасский государственный технологический университет
(Украина, 18006, Черкассы, бул.Шевченко, 460
тел. (0472)730261, E-mail: palahin@yahoo.com)

Построение моментного критерия проверки статистических гипотез при использовании полиномиальных решающих правил

(Статью представил д-р техн. наук В. Г. Тоценко)

Рассмотрено построение нового моментного критерия качества проверки простых статистических гипотез на основе использования стохастических полиномов в качестве решающих правил и моментно-кумулянтного описания случайных величин. Показана эффективность использования нелинейных алгоритмов обработки сигналов исходя из предложенного критерия при учете тонкой структуры негауссовских помех.

Розглянуто побудову нового моментного критерію якості для перевірки простих статистичних гіпотез на основі використання стохастичних поліномів в якості вирішальних правил і моментно-кумулянтного опису випадкових величин. Показано ефективність використання нелінійних алгоритмів обробки сигналів за запропонованим критерієм при врахуванні тонкої структури негауссівських завад.

Ключевые слова: стохастические полиномы, моментные критерии качества, моментно-кумулянтное описание случайных величин, негауссовские помехи.

Постановка задачи. Статистические методы обработки сигналов широко используются для решения многих прикладных задач. Использование хорошо разработанной теории проверки статистических гипотез позволяет эффективно решать достаточно широкий спектр задач, в том числе и задачи обнаружения сигналов на фоне помех. Как известно, в основе решения таких задач лежит решающая функция, представленная в виде сравнения отношения правдоподобия с тем или иным порогом, который выбирается по какому-либо из классических критериев качества (критерий Байесса, критерий идеального наблюдателя, критерий Неймана—Пирсона и др.) [1]. Такие критерии назовем вероятностными, так как в их основе лежат вероятности ошибок первого и второго рода решающей функции.

При использовании вероятностных критериев наиболее широко применяется построение алгоритмов обнаружения сигналов на фоне гауссовых помех. Это объясняется тем, что, с одной стороны, такой вид распределения помех часто возникает в каналах связи, а с другой стороны, является удобной математической идеализацией реальных природных процессов. На практике такая постановка задачи не всегда оправдана, так как многие помехи могут иметь негауссовский характер [2]. Для обработки сигналов, проходящих через неоднородные среды, сигналов, отраженных от морской поверхности, и других необходимо использовать негауссовы модели сигналов и помех, как наиболее адекватные.

В настоящее время интерес к негауссовским сигналам и процессам, как к наиболее общим, значительно возрос, о чем свидетельствуют многочисленные научные публикации [3—5]. При использовании вероятностных критериев качества (ВКК) проверки статистических гипотез не накладывается никаких ограничений на вид распределения сигналов и помех, однако использование таких критериев для негауссовских сигналов и процессов вызывает ряд серьезных трудностей, связанных с построением алгоритмов и их практической реализацией. Однако получаемые при использовании вероятностного подхода решения отличаются сложностью их практической реализации.

В теории вероятностей и математической статистике случайные величины количественно можно охарактеризовать не только с помощью установления вероятности осуществления того или иного события, но и с помощью более грубой количественной меры числовых характеристик случайных величин, таких как математическое ожидание, дисперсия и др. [6]. Критерии, основанные на использовании моментов решающей функции, назовем моментными критериями [7, 8]. Однако существуют определенные проблемы, связанные с получением конкретных алгоритмов обработки сигналов на фоне негауссовских помех, их исследованием, практической реализацией и использованием хорошо изученных решений, полученных на основе применения вероятностных критериев качества.

Для решения проблем обработки негауссовых сигналов и помех можно успешно использовать новые моментные критерии качества (МКК) проверки статистических гипотез, которые хорошо себя зарекомендовали при решении многих задач. Данный подход, основанный на применении МКК, принципиально отличается от существующих, так как в качестве априорного описания случайных величин используется не плотность распределения, а моментно-кумулянтное описание [6]. Это, с одной стороны, позволяет получить более простые алгоритмы обработки сигналов, а с другой, — позволяет учесть тонкую структуру негауссовой помехи, что существенно улучшает качественные показатели алгоритмов обнаружения и оценки сигналов по сравнению с гауссовой помехой [9—18].

Синтез моментного критерия суммы асимптотических вероятностей ошибок типа Неймана — Пирсона для проверки статистических гипотез. Как отмечено в [17, 18], стохастические полиномы обладают множеством свойств, которые до настоящего времени в полной мере не изучены. Одно из основных свойств стохастических полиномов заключается в том, что они способны уменьшать дисперсию случайной величины [18]. На основе этого свойства получены уникальные результаты по улучшению качественных показателей обнаружителей сигналов. Другая отличительная особенность стохастических полиномов заключается в том, что на них распространяются свойства центральной предельной теоремы, и соответственно обоснования использования моментного критерия суммы асимптотических вероятностей ошибок для построения решающих правил.

В работах [10, 16] логарифм отношения правдоподобия для одинаково распределенных и независимых выборочных значений x_v представлен в виде стохастического ряда

$$\ln \frac{P(\mathbf{x}/H_1)}{P(\mathbf{x}/H_0)} = k_0 + \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} k_{iv} x_v^i,$$

где k_0, k_{iv} — коэффициенты этого ряда; $\mathbf{x}$ — вектор выборочных значений объема n. Следовательно, существуют такие коэффициенты k_{iv}, при которых решающее правило (РП) проверки статистических гипотез при использовании полинома конечной степени s имеет вид

$$k_0 + \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} k_{iv} x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \tag{1}$$

Если выборочные значения одинаково распределены, то РП отличается от выражения (1). В этом случае коэффициенты k_i не зависят от номера выборочных значений v. Тогда РП можно записать в следующем виде

$$\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) = k_0 + \sum_{i=1}^{s} k_i \sum_{v=1}^{n} x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \tag{2}$$

Очевидно, что неизвестные коэффициенты РП (2) k_0, k_i необходимо находить при условии минимума выбранного ВКК, что сделать в общем случае невозможно. Поэтому, чтобы использовать РП для проверки простых статистических гипотез, необходимо так изменить критерии выбора РП, чтобы они, с одной стороны, были связаны с хорошо изученными

ВКК, а с другой стороны, позволяли выразить ВКК через неопределенные коэффициенты k_0 и k_i. Минимизируя такой критерий по данным коэффициентам, можно найти сами коэффициенты. Таким условиям удовлетворяют МКК, а именно, критерий суммы асимптотических вероятностей ошибок.

Рассмотрим некоторые асимптотические свойства стохастических полиномов, в общем случае представленных в виде РП (2). Пусть имеется последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, ..., x_n$, для которых математическое ожидание составляет $Ex_n = 0$, а дисперсия — $Ex_n^2 = 1$. В этом В этом случае плотность распределения суммы [18],

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{v=1}^{n} x_v,$$

при $n \to \infty$ сходится к гауссовому распределению с параметрами $N(0,1)$. Вторую сумму из выражения (2) одинаково распределенных независимых случайных величин в степени i в общем виде можно представить так:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{v=1}^{n} x_v^i \right).$$

Поскольку математическое ожидание $m_i = E(x^i)$ и дисперсия каждой случайной величины являются конечными величинами, согласно центральной предельной теореме при $n \to \infty$ вторая сумма (2) при любом значении распределена по нормальному закону. В стохастическом полиноме (2) имеется сумма случайных величин с таким свойством и коэффициентами k_i, которые не равны бесконечности и не все равны нулю. Поэтому в целом выражение (2) при любой степени полинома s асимптотически при $n \to \infty$ также будет распределено по нормальному закону с математическим ожиданием $T = n \sum_{i=1}^{s} k_i m_i + k_0$ и дисперсией $G = n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_i k_j F_{i,j}$, где $F_{i,j} = E[(x^i - m_i)(x^j - m_j)] = m_{i+j} - m_i m_j$.

Таким образом, для нахождения коэффициентов РП (2) можно воспользоваться МКК суммы асимптотических вероятностей ошибок, который заключается в следующем.

В общем виде синтезированное РП должно позволять минимизировать один из ВКК. Критерием качества будем полагать критерий суммы вероятностей ошибок РП первого и второго рода α и β, основанный на Байесовском подходе [1]:

$$R = \alpha + \beta. \tag{3}$$

В общем случае РП (2) необходимо подобрать так, чтобы данная функция R (3) была минимальной. Поскольку решающая функция $\Lambda_{ns}(\mathbf{x})$ (2) распределена по нормальному закону, вероятность ошибок второго рода β при осуществлении гипотезы H_1 составляет

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_1}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(x - T_1 - k_0)^2}{2G_1} \right] dx,$$

где $T_1 = E\,[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) / H_1]$, $G_1 = E\,\{[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) - T_1]^2 / H_1\}$. Выполнив замену переменных, получим

$$\beta = \frac{G_1^{0,5}}{\sqrt{2\pi G_1}} \int_{-\infty}^{v_1} \exp\left[-\frac{z^2}{2} \right] dz,$$

где $V_1 = \dfrac{-T_1 - k_0}{G_1^{0,5}}$. Аналогично вероятность ошибок РП первого рода α при осуществлении гипотезы H_0 запишем в виде

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_0}} \int_{0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - T_0 - k_0)^2}{2G_0} \right] dx,$$

где $T_0 = E\,[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) / H_0]$, $G_0 = E\,\{[\Lambda_{ns}(\mathbf{x}) - T_0]^2 / H_0\}$. После замены переменных получим

$$\alpha = \frac{G_0^{0,5}}{\sqrt{2\pi G_0}} \int_{v_0}^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2} \right] dz,$$

где $V_0 = \dfrac{-T_0 - k_0}{G_0^{0,5}}$. Используя полученные выражения, легко найти асимптотическое значение ВКК (3), который в общем виде запишем так:

$$R(\alpha, \beta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{v_0}^{\infty} \exp\left(\frac{-z^2}{2} \right) dz + \int_{-\infty}^{v_1} \exp\left(\frac{-z^2}{2} \right) dz \right]. \tag{4}$$

Для оптимального РП (2) константа k_0 должна быть такой, чтобы выбранный ВКК (4) принимал минимальное значение. Константа k_0, минимизирующая $R(\alpha, \beta)$, имеет вид

$$k_0 = -\frac{T_1 G_0^{0,5} + T_0 G_1^{0,5}}{G_0^{0,5} + G_1^{0,5}}. \tag{5}$$

Пределы интегрирования для этой константы

$$V_0 = Yu^{-0,5}, \quad V_1 = -Yu^{-0,5}, \tag{6}$$

где $Yu[\Lambda_{ns}(\mathbf{x})] = \dfrac{(G_0^{0,5} + G_1^{0,5})^2}{(T_1 - T_0)^2}$ — критерий суммы асимптотических вероятностей ошибок, рассмотренный в [10, 16].

Адаптируем критерий суммы асимптотических вероятностей ошибок в критерий типа Неймана—Пирсона. Для этого необходимо изменить условия выбора порога k_0 (5) РП так, чтобы можно было его варьировать, и таким образом задавать одну из вероятностей ошибок первого рода α при минимизации второй вероятности ошибки, что соответствует критерию Неймана—Пирсона.

Пусть константа k_0 РП (2) а соответственно и порог РП определяется из выражения

$$k_0 = -CT_1 - (1 - C)T_0, \tag{7}$$

где $C \in (0,1)$. В этом случае наблюдаются следующие зависимости:

$C = 1/2$, $k_0 = 1/2(T_1 + T_0)$ — коэффициент k_0 соответствует случаю, когда величина С выбрана согласно МКК верхней границы вероятностей ошибок (k_0^{Ku}) [14]:

$C = 0$, $k_0 = -T_0$ — коэффициент k_0 принимает значение математического ожидания РП (2) при гипотезе H_0;

$C = 1$, $k_0 = -T_1$ — коэффициент k_0 принимает значение математического ожидания РП (2) при гипотезе H_1.

После подстановки (7) в (6) получим

$$V_0 = \frac{C(T_1 - T_0)}{G_0^{0,5}}, \quad V_1 = \frac{(1 - C)(T_1 - T_0)}{G_1^{0,5}}.$$

Очевидно, что минимум вероятностей ошибок РП (2) в предположении асимптотического распределения выборочных значений обеспечивается при максимальных значениях величин V_0, V_1. Поэтому, если предположить, что

$$YuP_\alpha = \left(\frac{G_0^{0,5}}{C(T_1 - T_0)}\right)^2, \quad YuP_\beta = \left(\frac{G_1^{0,5}}{(1 - C)(T_1 - T_0)}\right)^2,$$

то новые пределы интегрирования примут вид $V_0 = (YuP_\alpha)^{-0,5}$, $V_1 = -(YuP_\beta)^{-0,5}$. Тогда минимум суммы значений YuP_α и YuP_β можно считать критерием качества выбора РП для проверки гипотезы и альтернативы:

$$YuP(T,G)=\frac{\dfrac{G_0}{C^2}+\dfrac{G_1}{(1-C)^2}}{(T_1-T_0)^2}. \tag{8}$$

Определение 1. Примем функционал $YuP(T,G)$ за критерий качества выбора РП вида (2) и будем считать наилучшим то правило, которое при k_0, равном (7), минимизирует правую часть (8) при заданном значении вероятности ошибки α. Данный критерий назовем критерием суммы асимптотических вероятностей ошибок типа Неймана—Пирсона или кратко критерием $YuP(T,G)$.

Согласно критерию Неймана—Пирсона вероятность ошибки первого рода α РП (2) должна быть не больше заданного значения ρ, т.е.

$$a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{V_0}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\le\rho,$$

где

$$V_0=\frac{1}{\sqrt{YuP_\alpha}}=\frac{C(T_1-T_0)}{G_0^{0,5}}.$$

Таким образом, получено условие для определения нормирующего коэффициента C, где математическое ожидание и дисперсия РП также будут функциями коэффициента C:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{C(T_1(C)-T_0(C))}{G_0^{0,5}(C)}}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\le\rho. \tag{9}$$

Используя в качестве РП стохастический полином общего вида (2), математическое ожидание T_0, T_1 и дисперсию G_0, G_1 РП для гипотезы и альтернативы запишем соответственно в виде

$$T_0=E[\Lambda_{ns}(\mathbf{x})/H_0]=n\sum_{i=1}^{s}k_iu_i+k_0,\;\; T_1=E[\Lambda_{ns}(\mathbf{x})/H_1]=n\sum_{i=1}^{s}k_im_i+k_0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}G_0&=E[(\Lambda_{ns}(\mathbf{x}))^2/H_0]=n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_ik_jF_{i,j}(H_0),\\ G_1&=E[(\Lambda_{ns}(\mathbf{x}))^2/H_1]=n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_ik_jF_{i,j}(H_1),\end{aligned} \tag{11}$$

где $F_{i,j}(H_0)=u_{i+j}-u_i u_j$, $F_{i,j}(H_1)=m_{i+j}-m_i m_j$ — корреляnты размерностью (i,j) случайной величины ξ соответственно, при гипотезе H_0 и альтернативе H_1; m_i, u_i — начальные моменты i-го порядка случайной величины ξ соответственно при гипотезе H_0 и альтернативе H_1.

Таким образом, с учетом выражений (10), (11) функционал (8) имеет вид

$$YuP(T,G)=\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_i k_j\left(\frac{F_{i,j}(H_0)}{C^2}+\frac{F_{i,j}(H_1)}{(1-C)^2}\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{s}k_i(m_i-u_i)\right)^2}. \tag{12}$$

Коэффициенты k_i, минимизирующие функционал (12), находим из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{s}k_j\left(\frac{F_{ij}(H_0)}{C^2}+\frac{F_{ij}(H_1)}{(1-C)^2}\right)=(m_i-u_i),\ i=1,s. \tag{13}$$

Из (13) видно, что неизвестные коэффициенты k_i зависят от неопределенной константы C, которая, в свою очередь, определяется из (9):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\le\rho, \tag{14}$$

где $b=\frac{\sqrt{n}C\left(\sum_{i=1}^{s}k_i(C)(m_i-u_i)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_i(C)k_j(C)F_{i,j}(H_0)\right)^{0,5}}$. Для найденных коэффициентов (13) свойственно следующие равенство:

$$I_{sn}=\frac{G_0}{C^2}+\frac{G_1}{(1-C)^2}=T_1-T_0, \tag{15}$$

где I_{sn} — количество извлекаемой информации из выборочных значений о различии гипотезы и альтернативы. При подстановке значения I_{sn} в функционал (12) получим следующее соотношение:

$$YuP(T,G)=\frac{T_1-T_0}{(T_1-T_0)^2}=\frac{1}{T_1-T_0}.$$

Легко видеть, что критерий качества выбора РП для проверки простых статистических гипотез является обратной величиной количеству извлекаемой информации из выборочных значений о различии гипотезы и альтернативы: $YuP(T,G) = 1/I_{sn}$.

Таким образом, построен новый МКК суммы асимптотических вероятностей ошибок типа Неймана—Пирсона для проверки простых статистических гипотез. Предложенный критерий отличается от ВКК Неймана—Пирсона и позволяет строить более простые РП для произвольных плотностей распределения сигналов и помех.

Алгоритмы обнаружения сигналов при степени полинома РП $s = 1, 2$. На основе разработанного математического аппарата проверки простых статистических гипотез построим оптимальные РП по критерию суммы асимптотических вероятностей ошибок типа Неймана— Пирсона и проведем их анализ.

Построение алгоритмов обнаружения сигналов осуществляется на фоне негауссовых помех, как наиболее общих. Негауссово распределение помех можно описывать по-разному, в частности с помощью плотности распределения или с помощью моментного и кумулянтного описания случайных величины. Последний подход характеризуется тем, что для негауссовых помех кумулянтные коэффициенты выше третьего порядка отличны от нуля.

Для синтеза алгоритмов обнаружения сигналов на фоне помех необходимо знать априорную информацию о случайной величине ξ при гипотезе и альтернативе на основе моментно-кумулянтного описания. Рассмотрим случай, когда полезный принимаемый сигнал является постоянной величиной. Тогда при осуществлении гипотезы H_1 наблюдается случайная величина, имеющая вид $\xi = a + \eta$, где a — полезный наблюдаемый сигнал, η — негауссова случайная величина с нулевым математическим ожиданием и кумулянтами χ_k, $k = \overline{1, n}$.

При осуществлении гипотезы H_0 наблюдается случайная величина $\xi = \eta$. Начальные моменты до четвертого порядка при осуществлении гипотезы H_0 описываются последовательностью $u_1 = 0$, $u_2 = \chi_2$, $u_3 = \chi_3$, $u_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2$, а при осуществлении гипотезы H_1 имеют следующий вид $m_1 = a$, $m_2 = a^2 + \chi_2$, $m_3 = a^3 + 3a\chi_2 + \chi_3$, $m_4 = a^4 + 4a\chi_3 + 6a^2\chi_2 + \chi_4 + 3\chi_2^2$. Тогда коррелянты при гипотезе и альтернативе с учетом приведенных выше выражений примут вид

$$F_{(1,1)}(H_0) = \chi_2,\ F_{(1,2)}(H_0) = F_{(2,1)}(H_0) = \chi_3,\ F_{(2,2)}(H_0) = \chi_4 + 2\chi_2^2,$$

$$F_{(1,1)}(H_1) = \chi_2,\ F_{(1,2)}(H_1) = F_{(2,1)}(H_1) = 2a\chi_2 + \chi_3,$$

$$F_{(2,2)}(H_1) = 4a\chi_3 + 4a^2\chi_2 + \chi_4 + 2\chi_2^2.$$

В дальнейшем будем использовать не кумулянты n-го порядка, а кумулянтные коэффициенты, определяемые так: $\gamma_n = \chi_n / \chi_2^{n/2}$. При этом кумулянтные коэффициенты γ_3 и γ_4 назовем соответственно коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса, χ_2 — дисперсия шума.

Пусть при осуществлении гипотезы H_1 принимается n выборочных одинаково распределенных независимых значений $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, имеющих вид $x_v = a + \eta$, $v = \overline{1, n}$, а при осуществлении гипотезы H_0 — имеющих вид $x_v = \eta$, $v = \overline{1, n}$. Поскольку выборочные значения одинаково распределены как для гипотезы так и для альтернативы, РП (2) при степени полинома s = 1 имеет линейный вид:

$$\Lambda(\mathbf{x})_{ln} = k_1 \sum_{v=1}^{n} x_v + k_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \tag{16}$$

Неопределенные коэффициенты линейного РП (16), определяемые из (13) и имеют вид

$$k_1 = \frac{q^{0,5}}{\chi_2^{0,5}\left(\dfrac{1}{C^2} + \dfrac{1}{(1-C)^2}\right)}, \quad k_0 = -Cn \frac{q}{\left(\dfrac{1}{C^2} + \dfrac{1}{(1-C)^2}\right)},$$

где $q = a^2 / \chi_2$ — отношение сигнал—шум. Легко показать, что в величину k_0 входит значение k_1. Тогда в окончательном виде линейное РП при s = 1 (16) имеет вид

$$\Lambda(\mathbf{x})_{ln} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} x_v - Ca \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \tag{17}$$

Предполагая, что C = 0,5, получаем РП, полностью совпадающее с линейным РП, которое получено как по критерию суммы асимптотических вероятностей ошибок, так и по вероятностному критерию минимума суммы вероятностей ошибок РП первого и второго рода при допущении гауссовой помехи, полученного из отношения правдоподобия.

Выражение (14) для определения коэффициента C при $s = 1$ и $\alpha = \rho$ принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{C\sqrt{nq}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \alpha . \tag{18}$$

Необходимо заметить, что при $C = 0{,}5$ вероятность ошибки первого рода РП (18) совпадает с выражением, полученным для линейного РП, оптимального по критерию суммы асимптотических вероятностей [11, 16].

Минимизированная вероятность ошибки РП (17) определяется из выражения

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{V_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \tag{19}$$

где $V_1 = -(1-C)\sqrt{nq}$. При $C = 0{,}5$ вероятность ошибок второго рода РП (19) совпадает с выражением, полученным для линейного РП, оптимального по критерию суммы асимптотических вероятностей.

Анализ вероятностей ошибок РП показывает, что при увеличении одной из вероятностей ошибки другая уменьшается, и наоборот, что полностью совпадает с теоретической трактовкой их взаимодействия.

Количество извлекаемой информации о различии гипотез из выборочных значений является обратной величиной данного критерия качества и при степени полинома РП $s = 1$ имеет вид

$$I_{ln} = n \frac{q}{(1/C^2 + 1/(1-C)^2)}. \tag{20}$$

Из выражения (19) видно, что при $n \to \infty$ или $q \to \infty$ вероятность ошибки второго рода стремится к нулю.

В полученном линейном РП (17) не учтено негауссово распределение помехи, поэтому представляет интерес увеличение степени полинома РП до $s = 2$.

Постановка задачи построения нелинейного РП при $s = 2$ совпадает с предыдущей при $s = 1$. В общем виде РП согласно (2) имеет вид

$$\Lambda(\bar{\mathbf{x}})_{2n} = k_1 \sum_{v=1}^{n} x_v + k_2 \sum_{v=1}^{n} x_v^2 - k_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \tag{21}$$

Неизвестные коэффициенты k_1 и k_2 находим из системы (13):

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\chi_2}{C^2} + \dfrac{\chi_2}{(1-C)^2} & \dfrac{\chi_3}{C^2} + \dfrac{2a\chi_2 + \chi_3}{(1-C)^2} \\ \dfrac{\chi_3}{C^2} + \dfrac{2a\chi_2 + \chi_3}{(1-C)^2} & \dfrac{\chi_4 + 2\chi_2^2}{C^2} + \dfrac{4a\chi_3 + 4a^2\chi_2 + \chi_4 + 2\chi_2^2}{(1-C)^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & \dfrac{\chi_3}{C^2} + \dfrac{2a\chi_2 + \chi_3}{(1-C)^2} \\ a^2 & \dfrac{\chi_4 + 2\chi_2^2}{C^2} + \dfrac{4a\chi_3 + 4a^2\chi_2 + \chi_4 + 2\chi_2^2}{(1-C)^2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\chi_2}{C^2} + \dfrac{\chi_2}{(1-C)^2} & a \\ \dfrac{\chi_3}{C^2} + \dfrac{2a\chi_2 + \chi_3}{(1-C)^2} & a^2 \end{vmatrix}.$$

Для определения порога коэффициента k_0 РП вида (21) воспользуемся выражением (7). Коэффициент k_0 выразим через найденные k_1, k_2 и запишем в виде

$$k_0 = -n\,[C\,(k_1 q^{0,5} + k_2(q+1)) - (1-C)\,k_2].$$

Неизвестный нормирующий коэффициент находим из условия фиксирования вероятности ошибки первого рода α и определяем согласно (14):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \alpha,$$

где

$$V_0 = \frac{n^{0,5} C (k_1 q^{0,5} + k_2 q)}{(k_1^2 + 2k_1 k_2(\gamma_3) + k_2^2(\gamma_4 + 2))^{0,5}}.$$

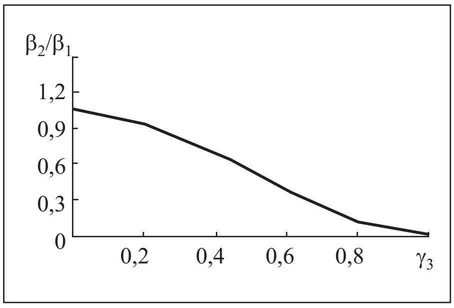
Для нелинейного РП (21) минимизированная вероятность ошибки второго рода имеет вид

$$\beta_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{V_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \tag{22}$$

где

$$V_1 = -\frac{(1-C)(k_1 q^{0,5} + k_2 q) n^{0,5}}{(k_1^2 + 2k_1 k_2 (2q^{0,5} + \gamma_3) + k_2^2 (4q^{0,5}\gamma_3 + 4q + \gamma_4 + 2))^{0,5}}.$$

Следует заметить, что при нормирующем коэффициенте C = 0,5 и гауссовом распределении помехи, т. е. когда $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$, получим РП, которое полностью совпадает с линейным РП, полученным по моментному критерию суммы асимптотических вероятностей ошибок, и с РП полу-



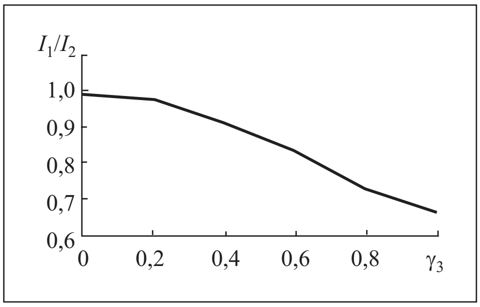


Рис. 1. Зависимость отношения β_2 / β_1 от коэффициента асимметрии γ_3

Рис. 2. Зависимость отношения количества извлекаемой информации из выборочных значений I_1/I_2 о различии гипотез от коэффициента асимметрии γ_3

ченным по вероятностному критерию минимума суммы вероятностей ошибок первого и второго рода в допущении гауссовых помех, а также с полученным из отношения правдоподобия. Количество извлекаемой информации из выборочных значений является обратной величиной выбранного критерия качества и согласно (15) примет вид

$$I_{2n} = n\,(k_1 q^{0,5} + k_2 q)\,. \tag{23}$$

Для оценки эффективности нелинейного РП (21) проведем сравнительный анализ минимизированной вероятности ошибки второго рода (22) при фиксированном значении вероятности ошибки первого рода с минимизированной вероятностью ошибки второго рода (19) для линейного РП (17). Заметим, что в синтезированном нелинейном РП (21), в отличие от линейного РП (17), учтено негауссово распределение помехи в виде отличных от нуля коэффициентов γ_3, γ_4 вследствие учета начальных моментов третьего и четвертого порядков.

Сравнительный анализ эффективности нелинейного и линейного РП проведен при различных значениях q, заданных значениях α и различных коэффициентах γ_3, γ_4. При исследовании зависимости от коэффициентов γ_3, γ_4 инеобходимо учитывать области допустимых значений, которые согласно [6, 17, 18], имеют вид

$$\gamma_3^2 \le \gamma_4 + 2\,. \tag{24}$$

На рис. 1 приведена зависимость отношения минимизированной вероятности ошибки второго рода нелинейного РП β_2 к минимизированной вероятности ошибки второго рода линейного РП β_1 от коэффициента асимметрии γ_3 при фиксированном значении $\alpha = 0{,}1$, $q = 0{,}1$, $n = 100$ и $\gamma_4 = 0$. Очевидно, если такое отношение равно единице, то минимизированные вероятности ошибок для различных РП одинаковы. Из рис. 1 видно, что

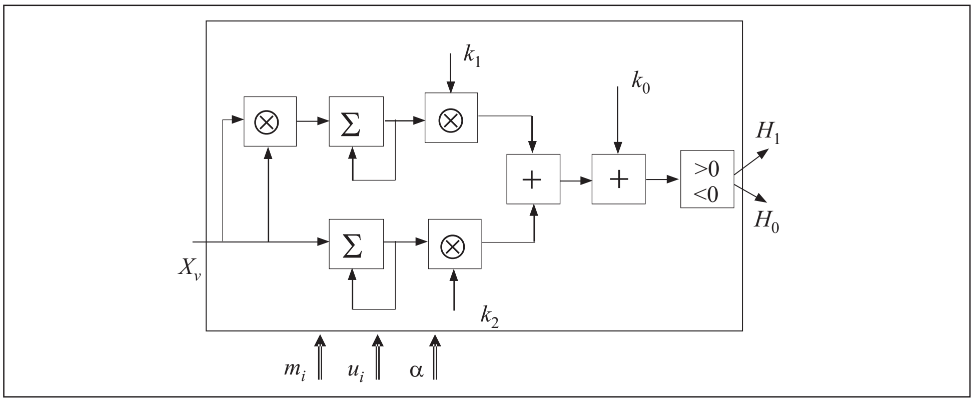


Рис. 3. Структурная схема нелинейного квадратичного полиномиального обнаружителя сигналов при $s = 2$

при увеличении значения γ_3 отношение β_2/β_1 уменьшается, что свидетельствует об уменьшении значения β_2 по отношению к β_1, а следовательно, об увеличении эффективности нелинейного РП по сравнению с линейным. Максимальная эффективность наблюдается при достижении границ неравенства (24). Например, при $\gamma_3 = 0{,}5$ минимизированная вероятность ошибки второго рода нелинейного РП β_2 уменьшается приблизительно в два раза по сравнению с минимизированной вероятностью ошибки для линейного РП.

Аналогичные закономерности можно наблюдать и при сравнении количества извлекаемой информации из выборочных значений о различии гипотез для нелинейного и линейного РП. На рис. 2 приведена зависимость отношения количества извлекаемой информации I_1 (20) из выборочных значений о различии гипотез для линейного РП (17) к количеству извлекаемой информации I_2 (23) для нелинейного РП (21) от коэффициента асимметрии γ_3 при $\alpha = 10^{-6}$, $q = 1$, $n = 100$ и $\gamma_4 = 0$. Из рис. 1 и 2 видно, что учет негауссового распределения помехи, т. е. при $\gamma_3 \neq 0$, позволяет увеличить количество извлекаемой информации I_2 из выборочных значений о различии гипотез, а следовательно, и увеличить эффективность нелинейного РП по сравнению с линейным РП.

На рис. 3 приведена структурная схема реализации нелинейного РП, состоящая из достаточно простых структурных единиц, реализующих функции умножения, накопления, суммирования и сравнения с нулевым порогом. Неизвестные коэффициенты определяются по приведенным выше выражениям, где априорной информацией являются выборочные значения, начальные моменты при гипотезе и альтернативе, а также значение фиксированной вероятности ошибки РП. Как видим, данный алгоритм может быть легко реализован с помощью применения современных сигнальных процессоров.

Выводы. Таким образом, сложность описания негауссовых случайных величин в теории обнаружения сигналов, а также практическое исследование и применение оптимальных алгоритмов требуют нового подхода к решению данной задачи. Основой такого решения может стать применение моментных критериев качества, а именно моментного критерия качества проверки статистических гипотез типа Неймана— Пирсона.

При классическом подходе к вопросу проверки простой гипотезы и простой альтернативы задача сводится к сравнению отношения правдоподобия с некоторым порогом, выбираемым по тому или иному критерию качества. Рассмотренный подход позволяет представить отношение правдоподобия в виде стохастических полиномов, коэффициенты которого определяются по критерию суммы асимптотических вероятностей ошибок типа Неймана— Пирсона.

На основе моментно-кумулянтного описания случайных величин и использования стохастических полиномов в качестве РП, оптимальные коэффициенты которых определяются по приведенному критерию, получены принципиально новые результаты. Синтезированы новые нелинейные РП с лучшими качественными характеристиками по сравнению с линейным РП, которое является оптимальным по вероятностному критерию суммы вероятностей ошибок. В качестве сравнительных показателей использована минимизированная вероятность ошибки второго рода различных РП и количество извлекаемой информации из выборочных значений о различии гипотез. В результате исследований установлено, что, используя свойства стохастических полиномов, нелинейную обработку выборочных значений при учете тонкой структуры негауссовой помехи в виде коэффициентов асимметрии и эксцесса, можно увеличить эффективность нелинейного РП по сравнению с хорошо изученным линейным РП.

Полученные результаты могут найти применение в различных прикладных областях для проверки статистических гипотез при использовании негауссовых моделей помех.

New moment quality criterion construction is considered for checking simple statistical hypothesis on the basis of stochastic polynomials as a decision rules and moment-kumulant description of random variables using. Depending on offered criterion and taking into account the fine structure of non-gaussian noise, efficiency of nonlinear algorithms for signals processing is shown.

1. *Сосулин Ю. Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации: Учеб. пособие для вузов. — М. : Радио и связь, 1992. — 304 с.
2. *Шелухин О. И., Беляков И. В.* Негауссовские процессы. — СПб: Политехника, 1992. — 312 с.

3. *Чабдаров Ш. М., Надеев А. Ф., Файзуллин Р. Р., Егоров А. Е.* Модели и методы обработки сигналов на основе вероятностных смесей с марковостью в информационных системах.// Международная конференция по телекомуникациям IEEE/ICC2001. — СПб., 2001. — С. 137—140.
4. *Rousseau D., Anand G. V., Chapeau-Blondeau F.* Noise-enhanced nonlinear detector to improve signal detection in non-Gaussian noise// IEEE Signal Process. — 2006. — Vol. 86, № 11. — P. 3456—3465.
5. *Yang Yang, Rics S. Blum.* Energy-efficient routing for signal detection under the Neyman-Pearson criterion in wireless sensor networks// Proc. of the 6-th international conference on Information processing in sensor networks IPSN '07. April 2007.—Cambridge, Massachusetts, 2007.—P.14.
6. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований. — М. : Сов. радио, 1979. — 376 с.
7. *Picinbono B., Duvaut P.* Optimal Linear-Quadratic systems for detection and estimation// IEEE Trans. Infor. Theory. — 1988. — Vol. 34, № 2 . —P.304—311.
8. *Jean—Mars Le Caillec, Rene Garello.* Comparison of statistical indices using third order statistics for nonlinear detection// IEEE Signal Process. — 2004. — Vol. 83, № 3.— P. 205—211.
9. *Kunchenko Y. P.* A Moment Performance Criterion of a Decision Making for Testing Simple Statistical Hypothesis // IEEE, International Symposium on Information Theory. — Ulm, Germany. — 1997. — P. 407.
10. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В.* Критерий асимптотической нормальности проверки простых статистических гипотез // Труды УНИИРТ. — 1998. — № 3. — С. 66—70.
11. *Палагин В. В.* Разработка алгоритмов обнаружения радиосигналов на фоне негауссовских помех// Там же. — С. 82—85.
12. *Palahin V., Yaroviy O.* Synthesis New Non-Linear Methods for Signal Detection on Background Non-Gaussisan Noise// Proc. of the IV International Hutsulian Workshop on Mathematical Theories and Their Applications in Physics & Technology. — Chernivtsi, Ukraine, 28 Oct.—02 Nov. 2002./Ed. S.S. Moskaliuk.. — Kyiv: Timpani, 2004. — P. 383—392.
13. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В.* Построение эффективных обнаружителей постоянных сигналов на фоне негауссовских мультипликативных помех//Міжнародний радіофорум. Ч.1. — Харків : ХНУРЕ. — 2002. — С. 108—111.
14. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В., Куринной А. А.* Моделирование нелинейных алгоритмов обнаружения постоянных сигналов на фоне гауссовских помех по критерию верхней границы среднего риска// Вісник ЧДТУ. — 2004. — № 4. — С. 39—44.
15. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В.* Построение моментного критерия качества типа Неймана—Пирсона для проверки простых статистических гипотез//Вісник Інженерної Академії України. — 2005. — № 1. — С. 26—30.
16. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В.* Проверка статистических гипотез при использовании полиномиальных решающих правил, оптимальных по моментному критерию суммы асимптотических вероятностей ошибок// Радиоэлектроника и автоматика. — 2006. — № 3 (34). — С. 4—11.
17. *Kunchenko Y. P.* Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables.— Germany, Aachen: Shaker Verlag, 2002. — 396 p.
18. *Кунченко Ю. П.* Стохастические полиномы. — Киев : Наук. думка, 2006. — 275 с.

Поступила 23.03.07;
после доработки 11.09.07

Палагин Владимир Васильевич, канд. техн. наук, доцент Черкасского государственного технологического университета. В 1992 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы нелинейной обработки сигналов на фоне негауссовских помех.