
УДК 621.314

А. В. Волошко, канд. техн. наук
Ин-т энергосбережения и энергоменеджмента при НТУУ «КПИ»
(Украина, 03056, Киев, ул. Борщаговская, 155,
тел. (044) 4068036, E-mail: voloshko@cinet.com.ua)

Лифтинговая схема, используемая в вейвлет-преобразовании для анализа информационных сигналов

(Статью представил д-р техн. наук М. В. Мыслович)

Рассмотрены способы повышения быстродействия вейвлет-анализа для сжатия-восстановления информационных сигналов с помощью лифтинговой схемы. Показана зависимость эффективности применения предложенной схемы от вида оператора предсказания.

Розглянуто способи підвищення швидкості вейвлет-аналізу для стиснення-відновлення інформаційних сигналів за допомогою ліфтингової схеми. Показано залежність ефективності застосування запропонованої схеми від виду оператора передбачення.

К л ю ч е в ы е с л о в а: вейвлет-анализ, лифтинговая схема.

В последние десятилетия в мире возникло и оформилось новое научное направление, связанное с так называемым вейвлет-преобразованием. Слово «wavelet» означает небольшие волны, следующие одна за другой. В настоящее время вейвлет-преобразования широко применяются для распознавания и анализа нестационарных сигналов, особенно при решении задач сжатия и восстановления сигналов [1, 2].

Вейвлетный анализ представляет собой особый тип линейного преобразования информационных сигналов и отображаемых этими сигналами физических данных о процессах и физических свойствах природных сред и объектов. Вейвлет-преобразования отличаются от преобразований Фурье, Котельникова, Лапласа тем, что гармонические (синусоидальные) функции локализованы по частоте, а функции Дирака — по времени [3]. Они применяются для анализа и обработки сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только общую частотную характеристику сигнала (распределение энергии по частотным составляющим), но и сведения об определенных свойствах тех или иных групп частотных составляющих или быстрых изменениях частотных составляющих сигнала.

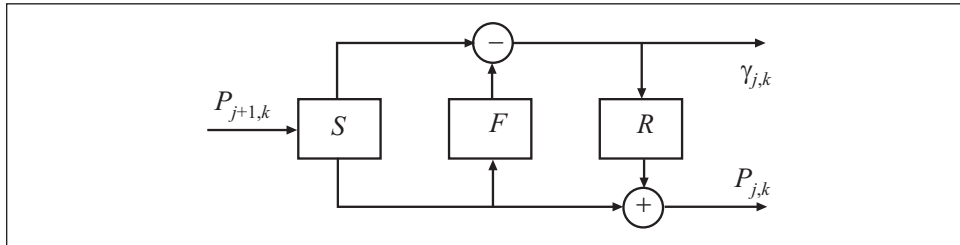


Рис. 1. Алгоритм одномерного быстрого лифтингового вейвлет-преобразования

По сравнению с преобразованием Фурье вейвлет-преобразования способны с гораздо большей точностью представлять (выявлять) локальные особенности сигналов, вплоть до разрывов 1-го рода (скачков).

Постановка задачи. Традиционно вейвлет-преобразование реализуется на основе набора низко- и высокочастотных фильтров. Свертка входного сигнала с коэффициентами фильтров представляется как скалярное произведение векторов, по которым осуществляется разложение, а результат — как проекция входного сигнала на соответствующие базисные функции. Однако при таком представлении вейвлет-преобразования довольно затруднительным является синтез вейвлет-фильтров, учет крайних эффектов, выполнение неравномерной декомпозиции информационных сигналов [4].

Одна из главных проблем при выполнении вейвлет-преобразования — быстроедействие. Вычисление коэффициентов по основной формуле требует выполнения большого числа операций сложения и умножения и содержит много избыточной информации [4]. Существуют способы сокращения вычислений перегруппировкой слагаемых на основании свойств гауссовых вейвлет-преобразований и введением ограничений на выбор шага изменения смещения или учетом относительной площади. Однако добиться существенного выигрыша во времени и экономии используемой памяти пока не удастся. В связи с этим для синтеза алгоритмов сжатия-восстановления информационных сигналов применяется лифтинговая схема, описывающая вейвлет-преобразование во временной области созданием вейвлет-преобразований второго поколения (биортогональных). Их отличие от ортогональных состоит в том, что они не являются растяжениями и сдвигами одной функции [5]. Вследствие этого с помощью лифтинг-схемы проще выполнять синтез алгоритмов сжатия на основе вейвлет-преобразования.

Основная идея лифтингового преобразования состоит в учете ошибки аппроксимации между исходным сигналом и восстановленной копией на каждом шаге его последовательной децимации, т. е. уменьшения частоты

дискретизации сигнала во времени удалением его отсчетов. Схематически это представлено на рис. 1.

Преобразование сигнала состоит из следующих этапов [1]:

- разбиение (S);
- предсказание (F);
- обновление (R).

Предположим, имеется сигнал $\{p(t)\}$. Обозначим его отсчеты $P_{0,k} = p(k)$, $k \in Z$. Задачей является поиск представления сигнала с меньшим числом отсчетов, что эквивалентно увеличению интервала дискретизации. Решение данной задачи называют декоррелированием сигнала [1]. В большинстве случаев точно представить сигнал невозможно, а можно лишь аппроксимировать его с допустимой (в идеальном случае — наперед заданной) погрешностью. При этом необходимо, чтобы разница между исходным сигналом и его аппроксимацией была как можно меньшей.

Алгоритм работы лифтингового преобразования. Разбиение. Уменьшить число коэффициентов входной последовательности можно, оставив лишь четные отсчеты. В результате получим новую последовательность: $P_{-1,k} = P_{0,2k}$, где знак минус используется для обозначения последовательности меньшей длины. В связи с тем что нечетные отсчеты исключаются из рассмотрения, некоторая часть информации теряется. Для восстановления потерянной информации введем понятие вейвлет-коэффициента и обозначим его $\{\gamma_{-1,k}\}$. Запишем

$$\{P_{0,k}\} = \{P_{-1,k}\} + \{\gamma_{-1,k}\}.$$

В зависимости от статистики исходного сигнала возможны различные способы выбора $\{\gamma_{-1,k}\}$. При этом никаких ограничений не налагается ни на способ разбиения последовательности $\{P_{-1,k}\}$, ни на размеры субпоследовательностей. Единственным требованием является наличие процедуры, позволяющей восстановить $\{P_{0,k}\}$ по $\{P_{-1,k}\}$ и $\{\gamma_{-1,k}\}$. В данном случае рассматривается деление исходной последовательности на четную и нечетную части в связи с их взаимной корреляцией.

Предсказание. Цель данного исследования — получить полностью обратимое компактное представление $\{P_{0,k}\}$ через $\{P_{-1,k}\}$ и $\{\gamma_{-1,k}\}$. На основе корреляции исходных данных проанализируем возможность нахождения оператора предсказания F таким образом, что $\gamma_{-1,k} = F(P_{-1,k})$. Естественно, что вид оператора предсказания зависит от используемой модели сигнала и от его корреляционных свойств.

Поскольку невозможно предсказать точно $\gamma_{-1,k}$ по $P_{-1,k}$, заменим $\gamma_{-1,k}$ разностью между этой последовательностью и $F(P_{-1,k})$:

$$\gamma_{-1,k} = P_{0,2k+1} - F(P_{-1,k}).$$

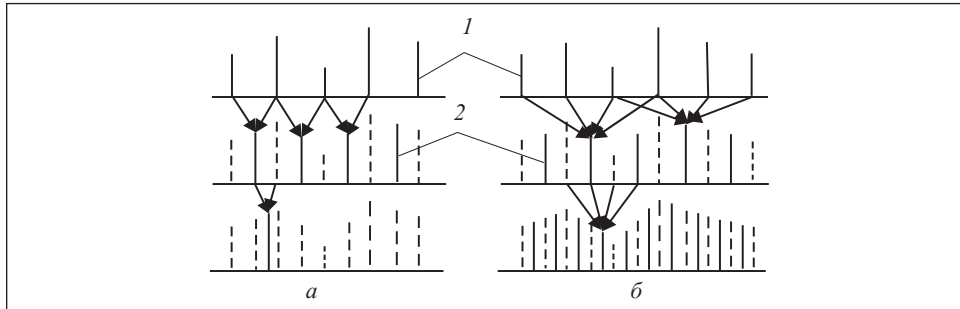


Рис. 2. Интерполяционные подразделения для линейной (а) и кубической (б) интерполяции: 1 — исходные отсчеты, на основе которых строится оценка нечетных элементов; 2 — вейвлет-коэффициенты, вычисленные с помощью интерполяции

Вейвлет-коэффициенты $\gamma_{-1,k}$ показывают, насколько исходный сигнал не соответствует модели, на основе которой построен оператор предсказания F . Заменяв исходный сигнал меньшими последовательностями $\{P_{-1,k}\}$ и $\{\gamma_{-1,k}\}$, получим обратимое компактное представление сигнала.

Если входной сигнал описывается кусочно-линейной функцией, то для оценки нечетных отсчетов целесообразно выбрать оператор

$$F(P_{-1,k}) = 1/2(P_{-1,k} + P_{-1,k+1}).$$

Необходимо заметить, что если сигнал существенно коррелирован, то большинство вейвлет-коэффициентов будет равно нулю [6].

Последовательность $\{P_{-1,k}\}$, представляющую собой четные элементы $\{P_{0,k}\}$, также разбиваем на две последовательности — низкочастотную (аппроксимирующую) $\{P_{-2,k}\}$ и высокочастотную (детализирующую) $\{\gamma_{-2,k}\}$. Затем детализирующую последовательность $\{\gamma_{-2,k}\}$ заменяем разностью между $\{\gamma_{-2,k}\}$ и $F(P_{-2,k})$. Таким образом, после n итераций исходный сигнал оказывается разложенным в вейвлет-базисе $\{P_{-n,k}, \gamma_{-n,k}, \dots, \gamma_{-1,k}\}$. Поскольку вейвлет-коэффициенты представляют собой ошибки оценивания, последовательность их квантовых значений, как правило, имеет малую энтропию и эффективно кодируется методами сжатия без потерь.

Обозначим через N число отсчетов, на основе которых строится оценка нечетных элементов. Коэффициенты высокочастотного фильтра для кусочно-линейной функции $N=2$ (рис. 2, а) следующие: $g = [-1/2, 1, -1/2]$, а для кубической функции $N=4$ (рис. 2, б) — соответственно $g = [-1/8, 1/4, 3/4, 1/4, -1/8]$ и т. д. В общем случае величина N определяет гладкость интерполяционной функции, применяемой для вычисления вейвлет-коэффициентов. Как видно из рис. 2, чем выше порядок интерполяционной функции, тем лучше аппроксимация коэффициентов γ на основе коэффициентов P .

Из процедуры интерполяционного подразделения не следует, что отсчеты исходного сигнала должны быть равноотстоящими. Следовательно, можно выполнять процесс интерполяционного подразделения с произвольной дискретизацией [7].

Обновление. Как упомянуто выше, в терминах частоты вейвлет-коэффициенты фиксируют высокие частоты, находящиеся в исследуемом сигнале. Тем не менее, частотная локализация сигналов $P_{-1,k}$ и $\gamma_{-1,k}$ далека от идеальной. После выполнения n раз интерполяционных преобразований и получения масштабирующей функции для создания вещественного вейвлета возможен эффект элайзинга — наложение спектров составляющих сигнала, возникающее в результате децимации при его дискретном преобразовании. Поэтому следующим шагом является уменьшение величины элайзинга. При этом необходимо гарантировать сохранение в $\{P_{-1,k}\}$ среднего значения исследуемого сигнала:

$$\sum_k P_{-1,k} = \frac{1}{2} \sum_k P_{0,k}.$$

В лифтинговой схеме для обновления последовательности $P_{-1,k}$ (на основе уже вычисленных вейвлет-коэффициентов) вводим оператор обновления R такой, что $P_{-1,k} = P_{-1,k} + R(\gamma_{-1,k})$, откуда следует, что оператор обновления определяет число действительных нулевых моментов \tilde{N} масштабирующей функции.

Один из возможных путей нахождения масштабирующей функции — следующий. Приравниваем все $\{P_{0,k}\}$ нулю, кроме первого, который приравниваем единице. Затем выполняем интерполяционное подразделение n раз. В результате получаем масштабирующую функцию, с помощью которой можно создать вещественный вейвлет, сохраняющий необходимые свойства исходного сигнала. Чем выше порядок данной функции, тем меньше в полученном преобразовании эффект элайзинга.

Таким образом, алгоритм быстрого лифтингового вейвлет-преобразования можно представить в следующем виде для $j = -1 \div -n$:

$$\begin{aligned} \{P_{j,k}, \gamma_{j,k}\} &= S(P_{j+1,k}), \\ P_{j,k} &= P - F(P_{j,k}), \\ P_{j,k} &= P_{j,k} + R(\gamma_{j,k}). \end{aligned} \quad (1)$$

Схема обратного преобразования (восстановления) на основе лифтинговой схемы имеет вид для $j = -n \div -1$:

$$\begin{aligned} P_{j,k} &= P_{j,k} - R(P_{j,k}), \\ \gamma_{j,k} &= \gamma_{j,k} + F(P_{j,k}), \\ P_{j+1,k} &= P_{j,k} \cup \gamma_{j,k}. \end{aligned} \quad (2)$$

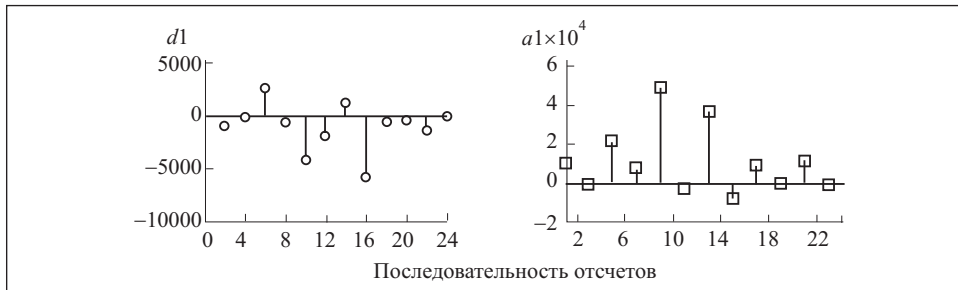


Рис. 3. Коэффициенты детализации ($d1$) и аппроксимации ($a1$) первого уровня вейвлет-разложения

Число арифметических операций, необходимых для выполнения преобразования (2), определяется выражением

$$n = \log_2 \left[\frac{L-1}{N_{\max} - 1} \right], \quad (3)$$

где L — длительность сигнала; $N_{\max} = \max(N, \tilde{N})$; \tilde{N} — число первичных нулевых моментов. Как видно из (3), длина сигнала не обязательно равна степени 2.

Пример. Рассмотрим применение лифтинговой схемы для анализа графика электрической нагрузки, описываемого кусочно-линейной функцией $P_{0,k} = P(k)$, $k = 0 \dots 23$.

В обработке результатов работы лифтинговой схемы сжатия-восстановления использованы инструментальные средства компьютерной математики MATLAB 6.5 SPI/7 (лицензионный номер 161051), в частности следующие функции:

lwtcoef — восстановление или реконструкция 1-D LWT вейвлет-коэффициентов;

вейвлет Хаар в качестве начального разбиения [6];

ELS — элементарный шаг лифтинга: «р» — первичный, коэффициенты преобразования (Lorent polynomial [8]) составляют $[-0,25 \quad 0,125]$, степень полинома 0;

lwt — вычисление лифтингового вейвлет-разложения (декомпозиции) второго уровня.

На первом этапе выполняется вейвлет-преобразование исходной последовательности с помощью лифтинговой схемы lwt. Как видно из рис. 3, коэффициенты детализации намного меньше коэффициентов аппроксимации. Вид графика аппроксимационных коэффициентов свидетельствует об относительной корреляции отсчетов исходного сигнала.

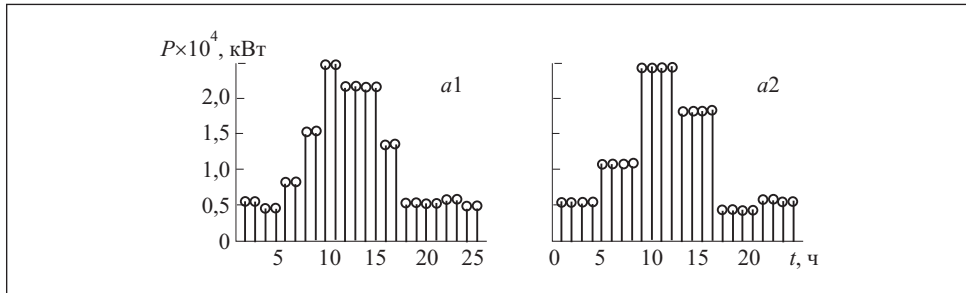


Рис. 4. Интерполяционные подразделения нечетных элементов последовательности

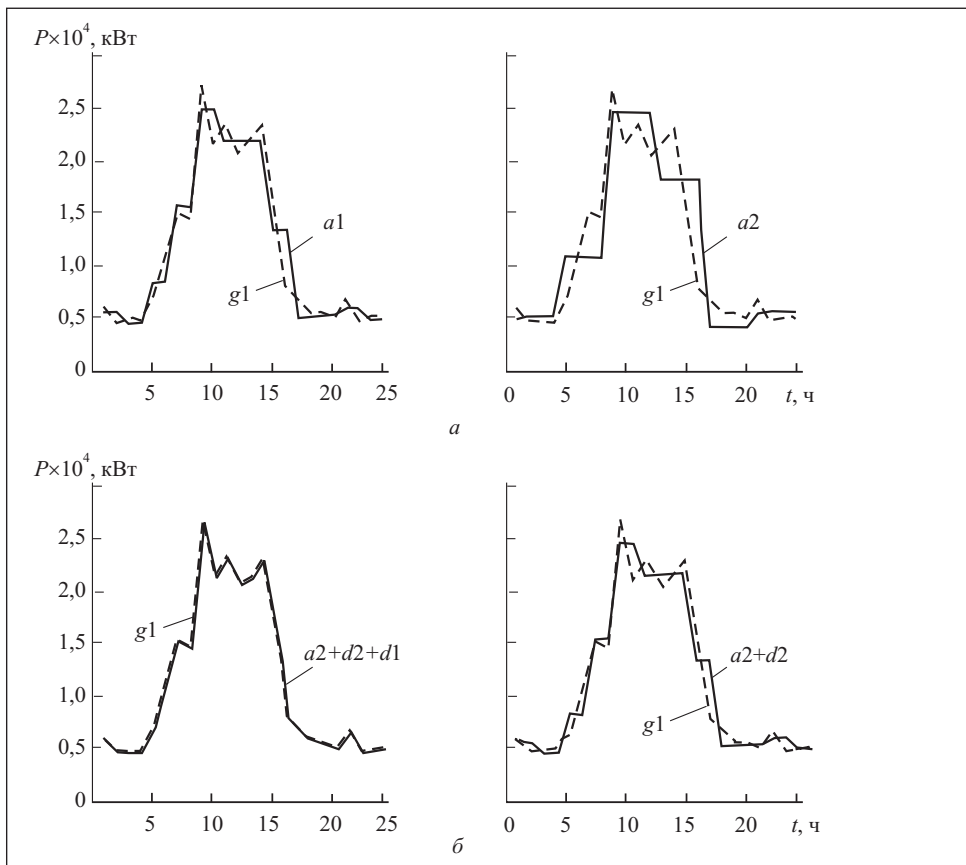


Рис. 5. Восстановление графика нагрузки g_1 по аппроксимирующим коэффициентам (а) и по детализирующим и аппроксимирующим коэффициентам (б)

Оценка нечетных элементов (интерполяционные подразделения) приведена на рис. 4. В данном случае применена линейная интерполяция. Созданный таким образом вещественный вейвлет сохраняет все необходимые свойства исходного сигнала, занимает в четыре раза меньше объема памяти и его получение происходит в два раза быстрее, чем при быстром вейвлет-преобразовании.

Проанализируем качество процесса восстановления (реконструкции) исходного сигнала из полученного вещественного вейвлета. Восстановление графика электрических нагрузок с различных уровней детализации показано на рис. 5, где a_1, a_2, d_1, d_2 — аппроксимирующие и детализирующие вейвлет-коэффициенты соответственно первого и второго уровня разложения.

Как видим, восстановление сигнала возможно с заданной точностью в зависимости от уровня разложения вплоть до полной обратимости без наличия потерь качества (см. рис. 5, б).

Качество восстановления (реконструкции) исходного сигнала определим, найдя максимальное значение ошибки восстановления:

$$err = \max (p(k) - a_2 - d_2 - d_1).$$

Ошибка полного восстановления графика электрических нагрузок (с использованием аппроксимационных коэффициентов второго уровня a_2 и детализирующих коэффициентов второго d_2 и первого d_1 уровней) составляет $9,049 e^{-0,13}$.

Выводы. Использование лифтинга для сжатия-восстановления информационных сигналов по сравнению с быстрым вейвлет-преобразованием имеет следующие преимущества.

1. Увеличение быстродействия вейвлет-анализа (как минимум вдвое) за счет оптимального использования сходства между высоко- и низкочастотными фильтрами.

2. Выполнение преобразования без использования дополнительной памяти. Исходный сигнал заменяется в памяти его вейвлет-преобразованием, что приводит к экономии памяти в четыре раза и, как следствие, к существенному уменьшению размерности баз данных для хранения информационных сигналов.

3. Осуществление обратного преобразования (реконструкции сигнала) обращением прямого преобразования (декомпозиции). На практике это означает, что для выполнения обратного преобразования достаточно поменять местами порядок операций и заменить в (1) знаки «плюс» на «минус».

4. Отсутствие потерь качества при реконструкции сигнала, обусловленное полной обратимостью лифтинг-преобразования.

The issues considered are those of accelerating the speed of wavelet analysis for the compression and restoration of information signals using a lifting scheme. The dependence of the efficiency of this scheme on the type of the prediction operator is demonstrated.

1. *Sweldens W.* The Lifting Scheme: A new Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions//Proc. SPIE. 2569. — «Wavelet Applications in Signal and Image Processing». — 1995. — P. 68—79.
2. *Волошко А.В.* Вейвлет-анализ в вопросах сжатия и восстановления графика электрических нагрузок // Энергетика: економіка, технології, екологія. — 2007. — № 2. — С. 60—65.
3. *Методы вычисления на ЭВМ: справочное пособие/Иванов В.В.* — Киев : Наук. думка, 1986. — 584 с.
4. *Malla S.* Вейвлеты в обработке сигналов/ Пер. с англ.— М.: Мир, 2005. — 671 с.
5. *Sweldens W.* The Lifting Scheme : A custom — design construction of biorthogonal wavelets. Technical Report 1994:7. Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics. University of South Carolina, 1994. — P. 312—320.
6. *Sweldens W.* The Lifting Scheme: a Construction of Second Generation of Wavelets. SIAM I // Math. Anal. — 1998. — V. 29 (2). — P. 511—546.
7. *Волошко А. В.* Восстановление пропусков данных об электропотреблении с помощью интерполяции// ПРОМЭЛЕКТРО. — 2007. — С. 18—21.
8. *Мороз В. В.* Дискретные вейвлет-преобразования с использованием узлов Чебышева на этапе предсказания лифтинговой схемы // Тр. Одесского политехнического университета. — 2002. — Вып. 2 (18). — С. 1—4.

Поступила 21.04.09;
после доработки 22.05.09

ВОЛОШКО Анатолий Васильевич, канд. техн. наук, доцент Ин-та энергосбережения и энергоменеджмента Национального технического университета Украины «КПИ». В 1983 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — информационные технологии, вейвлет-анализ.