## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.949.8

С. З. Шихалиев
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4241063, E-mail: ipme@ipme.kiev.ua)

# Однопараметрическая оптимизация аппроксимационных свойств неявных разностных методов повышенной точности решения начально-краевых задач типа диффузии

Численно решена задача однопараметрической минимизации чебышевского уклонения символа $m$-стадийных разностных методов повышенной точности решения начально-краевых задач для параболических уравнений второго порядка с самосопряженным эллиптическим оператором. Оптимизируемые методы реализованы с помощью алгоритма полиномиального ускорения. Оптимизация методов выполнена при уменьшении максимально возможного порядка аппроксимации операторной экспоненты на единицу [1].

Наведено чисельний розв'язок задачі однопараметричної мінімізації чебишевського відхилення символу $m$-стадійних різницевих методів підвищеної точності розв'язку початково-крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку з самосполученим еліптичним оператором. Методи, що оптимізуються, реалізовано за алгоритмом поліноміального прискорення. Оптимізацію методів виконано зменшенням максимально можливого порядку апроксимації операторної експоненти на одиницю [1].

*Ключевые слова: начально-краевые задачи, параболические уравнения, разностные методы, повышенная точность, аппроксимация.*

В работе [2] предложены методы решения полудискретных начально-краевых задач вида

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} = \mathcal{A}_h u_h + f_h(t),\ 0 \le t \le T, \tag{1}$$

с начальным

$$u_h(0) = u_h^0 \tag{2}$$

и граничным

$$\ell_h u_h = 0 \tag{3}$$

условиями. Здесь $u_h = u_h(t) \in H_h$; $u_h(t) \sim u(x,t)$, $f_h(t) \sim f(x,t)$, $x \in \omega_h$; $\omega_h$ — пространственная сетка ($\omega_h \sim \omega_x \subseteq R^3$); $u(x,t)$ и $f_h(t) \sim f(x,t)$ — соответственно искомое решение исходной начально-краевой задачи (НКЗ) и известная функция источника, $x \in \omega_x$, $t \in \omega_t$; $\mathcal{A}_h : H_h \to H_h$ и $\ell_h$ — заданные разностные аналоги соответственно самосопряженного эллиптического оператора 2-го порядка и оператора граничных условий исходной НКЗ, где $H_h$ — пространство сеточных функций, согласованное по норме с гильбертовым пространством $H$.

Алгоритм решения НКЗ рассматриваемого вида, названный впоследствии алгоритмом полиномиального ускорения (АПУ) [3] записываем в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
u_h^{j+1} = \overline{u}_h^j, \; \overline{u}_h^j = u_h^j; \\
\frac{\partial \overline{u}_h^{j+s/m}(t)}{\partial t} = \mathcal{A}_h^j \overline{u}_h^j(t) + f_h^j, \\
\overline{u}_h^{j+s/m}(t_{j+(s-1)/m}) = \overline{u}_h^{j+(s-1)/m}, \\
\ell_h u_h(t_{j+(s-1)/m}) = 0, \\
t_{j+(s-1)/m} \le t \le t_{j+s/m}, \\
u_h^{j+1} := u_h^{j+1} + a_s^{(m)} \overline{u}_h^{j+s/m}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Предполагаем, что оператор $\mathcal{A}_h^j = \mathcal{A}_h(u_h^j)$ в (4) учитывает граничные условия, а НКЗ решается каким-либо базовым методом из семейства схем с весами (либо явным — $\sigma = 0$, либо неявным — $\sigma = 1$) [4]. Если в АПУ в качестве базовой используется схема с опережением ($\sigma = 1$), то символ [5] методов, реализуемых с помощью этого алгоритма, представляем в виде

$$
r_m(\eta) = \sum_{s=1}^{m} a_s^{(m)} r_1^s(\overline{\eta}), \quad \eta = \tau\lambda, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}_h), \tag{5}
$$

где $r_1(\overline{\eta})$ — символ базового метода, $\overline{\eta} = \alpha\eta \ge 0$; $\alpha$ — вещественный положительный параметр, определяемый, как и весовые коэффициенты $a_s^{(m)}$ ($s = \overline{1, m}$, $m = 1, 2, \ldots$), в соответствии с выбранным принципом аппроксимации экспоненциальной функции $e^{-\eta}$, $\eta \ge 0$ — символа точного решения полудискретной задачи (1)—(3).

В основу методов [2] положен тейлоровский принцип аппроксимации (приближение экспоненты отрезком ряда Маклорена в окрестности точки $\eta = 0$ до члена, содержащего $\eta^m$ включительно). Первые $m$ условий тейлоровской аппроксимации для определения параметров методов (4), (5), обеспечивающие приближение экспоненты функциями (5) с $m$-м порядком, записываем в виде системы алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{m} a_s^{(m)} \chi_{k,s}^{(m)} = \beta_m^k / k!, \; k = \overline{0, m-1}, \; \beta_m = 1/\alpha_m, \tag{6}$$

или в «полулинейной» векторно-матричной форме

$$\mathcal{K}_m A_m = B_m, \tag{7}$$

где $\mathcal{K}_m$ — квадратная матрица с элементами

$$\chi_{k,s}^{(m)} = \frac{(s+k-1)!}{(s-1)!k!}, \; B_m = \beta^k / k!, \; k = \overline{0, m-1}, \; s = \overline{1, m}.$$

Замыкает систему уравнений (6) для определения параметров методов $m+1$-е аппроксимационное уравнение

$$\sum_{s=1}^{m} a_s^{(m)} \chi_{m,s}^{(m)} = \beta_m^m / m!. \tag{8}$$

При фиксированных значениях $\beta_m$ система (7) корректно разрешима, поскольку строки и столбцы матрицы $\mathcal{K}_m$ линейно независимы (их элементы суть биномиальные коэффициенты).

Параметры методов [2] получены в результате решения системы (7), (8), в которой последнее уравнение преобразовано в уравнение

$$L_m(\beta) = 0, \tag{9}$$

где $L_m(\beta) = L_m^{(0)}(\beta)$ — многочлен Лагерра нулевого порядка степени $m$ относительно аргумента $\beta = \beta_m$. Поскольку многочлен $L_m(\beta)$ имеет ровно $m$ вещественных нулей и все они положительны [6], существуют $m$ методов, реализуемых АПУ с оптимальным порядком аппроксимации экспоненты. Следовательно, для вычисления параметров оптимальных по порядку аппроксимации методов [2] достаточно в правую часть системы (8) подставить какой-либо из $m$ нулей многочлена $L_m(\beta)$, решить полученную в результате систему линейных уравнений и тем самым вычислить веса методов [2].

Аналогичный результат получен ранее аналитическими методами в работе [1], в которой приведены аналитические выражения для параметров однополюсных аппроксимаций экспоненты ($N^{(m)}$-аппроксимаций):

$$R^m(\eta) = \sum_{s=0}^{\overline{m}} b_s^{(m)} \eta^s / (1+\overline{\eta})^m, \; \overline{m} = m-1, \; m, \; m \geq 1. \tag{10}$$

Используя эти выражения, легко вычислить параметры методов, описанных в [2]. Однако решать другие, не менее важные для приложений аппроксимационные и стабилизационные задачи оптимизации, используя полученный в [1] результат, затруднительно. В частности, в работе [1] предложена идея решения задачи минимизации какой-либо нормы разности аппроксимации (10) и экспоненты, решение которой обнаружить не удалось. Поэтому найдено численное решение системы (7), минимизирующее функционал

$$\mu^{(m)} = \sup_{\eta \ge 0} \left| e^{-\eta} - r_m(\eta) \right|. \tag{11}$$

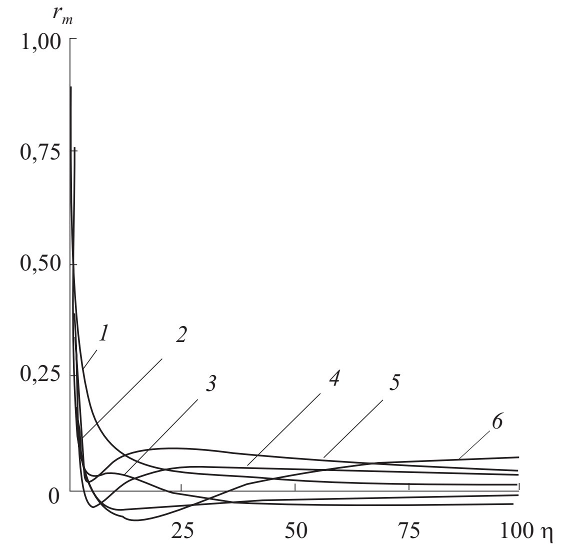
Таким образом, рассматриваемая задача оптимизации сводится к отысканиюя параметров методов (4), (5), доставляющих минимум функционалу

*Таблица 1*

| $m$ | $\alpha_m$ | $\mu^{(m,*)}$ |
|---|---|---|
| 2 | 0,394477 | 0,046622 |
| 3 | 0,194175 | 0,050520 |
| 4 | 0,249999 | 0,090983 |
| 5 | 0,166936 | 0,036336 |
| 6 | 0,116038 | 0,067796 |

*Таблица 2*

| $m$ | $s$ | $a_S^{(m)}$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | – 0,534234 (00) |
| | 2 | 0,153423 (01) |
| 3 | 1 | 0,812358 (00) |
| | 2 | –0,377523 (01) |
| | 3 | 0,396287 (01) |
| 4 | 1 | 0,137838 (01) |
| | 2 | –0,613489 (01) |
| | 3 | 0,811211 (01) |
| | 4 | –0,235560 (01) |
| 5 | 1 | –0,961863 (01) |
| | 2 | 0,782829 (01) |
| | 3 | –0,197232 (02) |
| | 4 | 0,188185 (02) |
| | 5 | –0,496177 (01) |
| 6 | 1 | 0,204316 (01) |
| | 2 | –0,207077 (02) |
| | 3 | 0,692267 (02) |
| | 4 | –0,103584 (03) |
| | 5 | 0,693753 (02) |
| | 6 | –0,153931 (02) |




(11), т.е. чебышевскому уклонению символа этих методов от символа точного решения эволюционной задачи (1) — (3):

$$\mu_m^{(m,*)} = \min_{0 \geq \alpha \leq \bar{\alpha}} \mu(m). \tag{12}$$

Очевидно, что в этом случае порядок аппроксимации экспоненты функциями (5) равен $m$, т.е он на единицу меньше максимально возможного, как для методов, описанных в [1] и [2].

Сформулированная задача была решена в работе [7] при $\bar{\alpha} = 1$. Однако использованные в этом решении методы [7] не обладают важным для эволюционных задач свойством $T$-согласованности [8], которое заведомо выполняется при $\bar{\alpha} = 1/m$.

Методы (4), (5) назовем $\hat{\mu}_1$-методами или, если необходимо указать число стадий, $\hat{\mu}_1^{(m)}$-методами. В табл. 1 приведены оптимальные значения параметра $\alpha = \alpha_m$ и оптимальные в смысле (12) значения функционала (11), а в табл. 2 — веса $a_S^{(m)}$ $\hat{\mu}_1$-методов.

На рисунке представлены графики символов $\hat{\mu}_1^{(m)}$-методов, свидетельствующие об их устойчивости в пространстве $H_h$. Сравнивая графики символов $\hat{\mu}_1^{(m)}$-методов $m = \overline{2,6}$ с символом схемы с опережением $m = 1$, не являющейся оптимальной, можно заметить, что, несмотря на некоторое ухудшение стабилизационных свойств рассмотренных методов по сравнению со схемой с опережением, изложенные методы остаются $H_h$-устойчивыми с увеличением порядка аппроксимации.

A problem of one-parameter minimization of the Chebyshev deviation of the symbol of *m*-stage difference methods of high accuracy for solution of initial-boundary problems of the second-order parabolic equations with self-conjugate elliptical operator has been numerically solved. The optimized methods have been realized by the algorithm of polynomial acceleration. The methods optimization was realized under the decrease of maximum-possible order of approximation of the operator exponent by a unit [1].

1. *Norsett S. P.* Restricted Pade Approximations to the Exponential Function //SIAM J. Numerical Analysis, 1978. — Vol. 15, № 5. — P. 1008—1029.
2. *Шихалиев С. З.* О применении одного класса чебышевских методов типа Розенброка к решению уравнения теплопроводности//Электрон. моделирование. — 1986. — 20 с. — Деп. ВИНИТИ 03.09.86, № 6440-В86
3. *Шихалиев С. З.* Об использовании чебышевских однополюсных аппроксимаций экспоненты в методах решения начально-краевых задач диффузии.— Киев: Энергетика и электрификация, 2005. — 48с.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем: Учеб. пособие. — М. : Наука, 1977. — 656 с.
5. *Артемьев С. С., Демидов Г. В. А*-устойчивый метод типа Розенброка четвертого порядка точности решения задачи коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск : НаукаСО, 1975. — С. 214 — 220.
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. — М. : Физматгиз, 1962. — 500с.
7. *Шихалиев С. З.* Оптимизация одного класса асимптотических методов интнегрирования одномерного уравнения теплопроводности// Сб. науч. тр. «Прикладные задачи математической физики». — Рига : Изд-во ЛГУ, 1985. — С. 60—72.
8. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений / Пер. с англ. С. С. Артемьева и др. Под ред. Г. И. Марчука. — М. : Мир, 1978. — 463 с.

Поступила 30.12.09

*ШИХАЛИЕВ Сабир Завурович, науч. сотр. ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1967 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — вычислительная физика.*