УДК 519.6

А. Л. Заворотный, **В. С. Касьянюк,** кандидаты физ.-мат. наук
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
(Украина, 03127, Киев, пр. Глушкова, 6, корп. 2,
тел.(044)2590530, E-mail: zal_ua@inbox.ru;)

Парето-оптимальный подход к задаче восстановления частично неизвестных характеристик состояния объекта

(Статью представил д-р физ.-мат. наук Ю. А. Белов)

В рамках парето-оптимального подхода решена задача наблюдаемости при условии наличия информации о части элементов вектора характеристик состояния объекта. Учтено, что известные характеристики состояния объекта могут быть искажены погрешностями.

В рамках парето-оптимального підходу розв`язано задачу спостережуваності за умови наявності інформації про частину елементів вектора характеристик стану об`єкту. Враховано, що відомі характеристики стану об`єкту можуть бути збурені похибками.

Ключевые слова: система управления, наблюдаемость, оптимизация по Парето, оценивание.

Рассмотрим систему управления объектом, модель которой задана системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x = (x_1(t), ..., x_n(t))^*$ — вектор функций, моделирующих характеристики состояния объекта на отрезке времени $t \in [0; T]$; *— символ транспонирования; $u = (u_1(t), ..., u_n(t))^*$ — вектор функций, моделирующих характеристики управления объектом на отрезке времени $t \in [0; T]$; A и B — известные n-мерные квадратные стационарные вещественные матрицы, задающие соответственно модель характеристик объекта и модель характеристик системы управления объектом; $\dot{x} = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))^*$ — вектор производных характеристик состояния объекта на отрезке времени $t \in [0; T]$.

Положим, что известна n-мерная квадратная стационарная вещественная матрица C, которая позволяет выразить характеристики управления через характеристики состояния объекта: $u = Cx$. Обозначив матрицу $\overline{A} = A + BC$, а ее элементы —

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \vdots & \overline{a}_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \overline{a}_{n1} & \vdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

перейдем от уравнения (1) к уравнению вида

$$\dot{x} = \overline{A}x. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу наблюдаемости характеристик состояния объекта в следующей постановке. Зафиксируем некоторый момент времени $\widetilde{t} \in [0; T]$ и, не уменьшая общности рассуждений, допустим, что в данный момент известны первые m элементов вектора x ($x_i(\widetilde{t}),\ i = \overline{1, m},\ 1 \le m \le n-1$), и первые m элементов вектора $\dot{x}$.

В таком виде задача наблюдаемости может возникнуть, например, при создании систем управления различными средствами передвижения (корабли, самолеты и др.). При этом на самом деле производные $\dot{x}$ могут быть неизвестными, а часть элементов этого вектора вычисляются на основе известной части вектора x в моменты времени из некоторой окрестности $\widetilde{t}$. Погрешности, которые могут возникнуть при оценке $\dot{x}$ по известной части x или в процессе измерения $\dot{x}$, промоделируем, добавив в правую часть (2) случайный вектор v, реализации которого находятся в n-мерном пространстве действительных значений.

Тогда задачу наблюдаемости можно поставить как задачу нахождения неизвестных характеристик состояния объекта ($x_i(\widetilde{t}),\ i = \overline{m+1, n}$), а модель состояния объекта (2) в точке $\widetilde{t}$ преобразуется к виду

$$\dot{x}_{\widetilde{t}} = \overline{A}x_{\widetilde{t}} + v, \tag{3}$$

где $\dot{x}_{\widetilde{t}}$ и $x_{\widetilde{t}}$ — значения векторов $\dot{x}$ и x в точке $\widetilde{t}$; $v = (v_1, \ldots, v_n)^*$ — вектор случайных величин.

Рассмотрим часть (3), которая содержит известные элементы $\dot{x}_{\widetilde{t}}$:

$$\widetilde{\dot{x}}_{\widetilde{t}} = \widetilde{A}x_{\widetilde{t}} + \widetilde{v}. \tag{4}$$

Здесь

$$\widetilde{\dot{x}}_{\widetilde{t}} = (\dot{x}_1(\widetilde{t}), \ldots, \dot{x}_m(\widetilde{t}))^*;\ \widetilde{v} = (v_1, \ldots, v_m)^*;\ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда значения элементов $\widetilde{\dot{x}}_{\widetilde{t}}$ известны заранее (например, измерены приборами), предполагаем, что параметры случайного вектора $\widetilde{v}$, а именно математическое ожидание и ковариационная матрица, также известны, причем $M\,\widetilde{v} = 0$, а ковариационная матрица

$$\widetilde{\Re}_v = \begin{pmatrix} M(v_1 v_1) & M(v_1 v_m) \\ M(v_m v_1) & M(v_m v_m) \end{pmatrix} —$$

невырожденная. Это типичные условия для многих реальных измерений.

Если элементы $\tilde{x}_{\tilde{t}}$ неизвестны, и необходимо их оценивать на основе известной части вектора x, то будем считать, что элементы вектора $\tilde{v}$ являются независимыми случайными величинами, т. е. $\tilde{\Re}_v$ — диагональная матрица вида

$$\tilde{\Re}_v = \left(\begin{array}{c:c} Dv_1 & 0 \\ \hdashline 0 & Dv_m \end{array} \right)$$

с дисперсиями случайных элементов вектора $\tilde{v}$ на ее диагонали.

Для получения оценки производной $\dot{x}_i(\tilde{t})$ по $x_i(t)$, $1 \le i \le m$, математического ожидания и дисперсии соответствующей случайной величины $v_i, 1 \le i \le m$, которая моделирует погрешность этой оценки, можно воспользоваться следующим подходом.

Будем генерировать оценки производной $\dot{x}_i(\tilde{t})$ так, чтобы их можно было считать реализациями некоторой случайной величины. Для этого случайным образом, используя одно и то же распределение, сгенерируем определенное число сеток, а затем используем один из широко известных численных методов оценивания производной некоторой функции в точке по табулированным значениям этой функции. В частности это может быть метод неопределенных коэффициентов или метод построения интерполяционного полинома с его дальнейшим дифференцированием [1].

Выбор конкретного метода зависит от конкретной прикладной задачи. Например в аэродинамике колебательный характер функции $x_i(\tilde{t})$ приводит к мысли о том, что наиболее приемлемые результаты следует ожидать от дифференцирования интерполяционного тригонометрического полинома. Однако этот вопрос требует дополнительного исследования для каждой конкретной задачи.

Исходя из особенностей прикладной задачи и выбранного метода численного дифференцирования, можно сделать определенные допущения относительно того, какие временные сетки в окрестности $\tilde{t}$ более предпочтительны. Можно выбирать параметры сеток в виде случайных величин с определенным распределением. Например, задаем случайные параметры так, чтобы большей была вероятность получить сетку, симметричную относительно $\tilde{t}$, с нечетным числом точек, с преобладанием точек, близких к $\tilde{t}$, с числом точек 5 или 7, с нулевой вероятностью получить момент $\tilde{t}$ вне сетки и так далее. В этом случае можно считать, что полученная сетка и, соответственно, полученная на этой сетке оценка производной — результат действия определенных детерминированных функций на начальную векторную случайную величину. Следовательно, полученные оценки производной $\dot{x}_i(\tilde{t})$ будут реализациями определенной случайной величины с неизвестным распределением.

Далее, вычислив по N случайно сгенерированным сеткам оценки производной $\hat{\dot{x}}_i^j(\tilde{t})$, $j=\overline{1,N}$, можем построить оценку производной в виде

$$\dot{x}_i(\tilde{t}) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \hat{\dot{x}}_i^j(\tilde{t})}{N} - v_i,$$

где v_i — случайная величина, для которой $Mv_i = 0$ и

$$Dv_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} (\hat{\dot{x}}_i^j(\tilde{t}) - M(\dot{x}_i(\tilde{t})))^2}{N-1}.$$

Для получения приемлемого результата выбираем $N = 10 \div 30$. Этот процесс повторяем для всех $i=\overline{1,m}$.

Уравнение (4) является системой из m уравнений и имеет $n-m$ неизвестных. Введем обозначения:

$$x_{\tilde{t}}^{n-m} = (x_{m+1}(\tilde{t}),\dots,x_n(\tilde{t}))^*; \ \tilde{A}_{n-m} = \left(\begin{array}{c:c} \bar{a}_{1m+1} & \bar{a}_{1n} \\ \hdashline \bar{a}_{m\,m+1} & \bar{a}_{mn} \end{array}\right); \ y = \tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}} - \tilde{A}_m x_{\tilde{t}}^m,$$

где

$$\tilde{A}_m = \left(\begin{array}{c:c} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{1m} \\ \hdashline \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{mm} \end{array}\right), \ x_{\tilde{t}}^m = (x_1(\tilde{t}),\dots,x_m(\tilde{t}))^*.$$

С учетом данных обозначений переходим от системы (4) к системе

$$y = \tilde{A}_{n-m}\, x_{\tilde{t}}^{n-m} + \tilde{v}. \quad (5)$$

Для восстановления $x_{\tilde{t}}^{n-m}$ из (5) используем подход, разработанный в [2] для более широкого класса задач. Следует заметить, что согласно этому подходу можно получить не только оценку $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$, а и оценку некоторого его преобразования $\widehat{\Pi x_{\tilde{t}}^{n-m}}$, где Π — оператор Гильберта—Шмидта, действующий из $(n-m)$-мерного пространства вещественных чисел (в данном случае) в некоторое гильбертово пространство. В частности Π может быть матрицей, обеспечивающей оценку некоторых характеристик состояния объекта в другие моменты времени. Очевидно, что для восстановления $x_{\tilde{t}}^{n-m}$ нужно задать Π как тождественное преобразование, т. е. как $(n-m)$-мерную единичную матрицу, которую обозначим I.

Итак, для построения оценки $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$ будем искать преобразование B известного вектора y, которое обеспечит оптимальную, в определенном смысле, оценку искомых характеристик состояния объекта $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m} = By$. Для этого поставим задачу одновременной двукритериальной минимизации:

первый критерий — минимизация дисперсии погрешности, которая содержится в оценке $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$;

второй критерий — минимизация операторной невязки, характеризующей смещение оценки $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$.

Данное смещение получено вследствие применения искомого преобразования B к y вместо применения к $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$ тождественного преобразования

$$h(B) = M\,\|B\tilde{v}\|^2 \to \min_B,$$
$$\varphi(B) = \left\|B\tilde{A}_{n-m} - I\right\|^2 \to \min_B. \tag{6}$$

Согласно теореме, доказанной в [2], решение задачи (6) приводит к континууму оценок, который можно выразить параметрической формулой

$$By = \hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m} = \tilde{A}_{n-m}^{*}(\tilde{A}_{n-m}\tilde{A}_{n-m}^{*} + \mu\,\tilde{\mathfrak{R}}_v)^{-1}\,y,\ \ \mu \in (0; +\infty). \tag{7}$$

Следует заметить, что согласно результатам, приведенным в работе [2], критерии оптимизации задачи (6) имеют противоположные тенденции к изменению при изменении параметра μ от нуля до $+\infty$, а именно: при увеличении параметра μ дисперсия погрешности в оценке уменьшается, в то время как операторная невязка стремится к пределу $\|\Pi\|^2$ (в данном случае к $\|I\|^2 = 1$). Взаимосвязь критериев оптимизации задачи (6) графически представлена на рис. 1, а зависимость значений критериев оптимизации от значения μ — на рис. 2.

Для выбора конкретного значения параметра μ можно использовать графики критериев оптимизации (см. рис. 2), построенные по соответствующим формулам из [2]:

$$h(\mu) = \mathrm{tr}\, B\tilde{\mathfrak{R}}_v B^*,\ \varphi(\mu) = \mathrm{tr}\,\{B\tilde{A}_{n-m}\tilde{A}_{n-m}^{*}B^* - 2B\tilde{A}_{n-m} + I\}, \tag{8}$$

где $B = \tilde{A}_{n-m}^{*}(\tilde{A}_{n-m}\tilde{A}_{n-m}^{*} + \mu\tilde{\mathfrak{R}}_v)^{-1}$; tr — оператор следа. В частности графики, построенные по формулам (8), могут быть использованы для поиска значения μ, отвечающего принципу гарантированного результата:

$$\mu = \arg\min_{\mu}\max_{(h,\varphi)}(h\ \ (\mu), \varphi\,(\mu)).$$

Вследствие монотонности критериев оптимизации относительно μ [2] и противоположности тенденций к изменению этих критериев такое значение параметра будет единственным. Для реализации определенного компромисса между критериями оптимизации можно воспользоваться и дру-

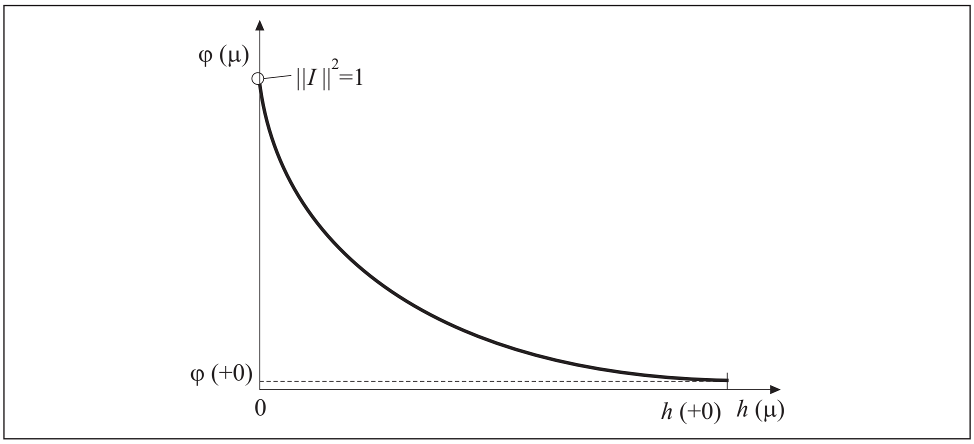

Рис. 1. Взаимосвязь критериев оптимизации $h(\mu)$ и $\varphi(\mu)$

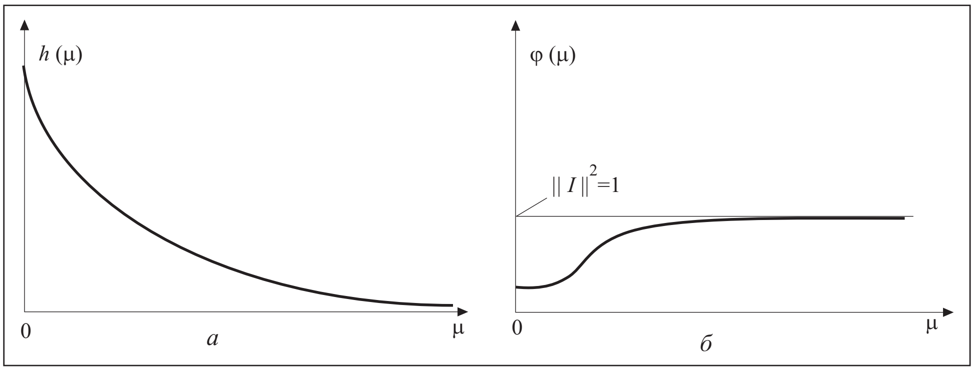

Рис. 2. Зависимость дисперсии погрешности (*а*) и операторной невязки (*б*) оценки $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$ от значения параметра μ

гими общими принципами многокритериальной оптимизации, а именно принципом равномерной оптимальности

$$\mu = \arg\min_{\mu} (\varphi(\mu) + h(\mu)),$$

принципом «эльдорадо»

$$\mu = \arg\min_{\mu} (\varphi^2(\mu) + h^2(\mu)),$$

принципом справедливого компромисса

$$\mu = \arg\min_{\mu} (\varphi(\mu)\, h(\mu)).$$

На выбор параметра μ может также влиять предметная область, к которой относится задача, и дополнительные условия, являющиеся частью условия задачи. Однако принятие решения остается за экспертом в предметной области, который отвечает за выбор желательных значений критериев оптимизации.

Рассмотрим полученные оценки. Обозначим $\hat{x}_{\tilde{t}}$ оценку вектора характеристик состояния объекта в момент $\tilde{t}$. Первые m его элементов были известны заранее, а остальные — это элементы вектора $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$ (см. (7), $\mu \in (0; +\infty)$):

$$\hat{x}_{\tilde{t}} = (x_1(\tilde{t}), ..., x_m(\tilde{t}),\ \ \hat{x}_{m+1}(\tilde{t}), ..., \hat{x}_n(\tilde{t}))^* .$$

Как видим, теперь легко получить оценки неизвестных элементов вектора $\dot{x}_{\tilde{t}}$ в точке $\tilde{t}$:

$$\hat{\dot{x}}_{\tilde{t}} = \overline{A}\hat{x}_{\tilde{t}}.$$

Следует заметить, что если производные характеристик состояния объекта не были вычислены на основе известных элементов вектора характеристик состояния объекта, а измерялись с определенной точностью с помощью существующих приборов, то оценку $\hat{\dot{x}}_{\tilde{t}}$ можно использовать для дополнительного анализа качества оценивания $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$. Это важно, поскольку предлагаемый метод позволяет находить оптимальные оценки не для минимизации погрешности оценивания, а для решения задачи (6), критерии которой имеют определенный физический смысл и минимизация которых улучшает искомые оценки.

Необходимо также заметить, что если значения производных характеристик состояния объекта, соответствующие неизвестным элементам вектора $x_{\tilde{t}}$, с определенной точностью измеряются приборами (или их значения известны из других источников), то в уравнении (4) следует не ограничивать размерность $\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}}$ числом известных элементов вектора x, а принять ее максимально возможной.

Допустим, число известных элементов вектора $\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}}$ (измеренных или вычисленных опосредованно) равняется k, $m \le k \le n$. Тогда, очевидно, изменяются размерности матиц

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{k1} & \overline{a}_{kn} \end{pmatrix},\quad \widetilde{A}_{n-m} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{1m+1} & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{k\ m+1} & \overline{a}_{kn} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Re}_v = \begin{pmatrix} M(v_1 v_1) & M(v_1 v_k) \\ M(v_k v_1) & M(v_k v_k) \end{pmatrix},\quad \widetilde{A}_m = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{1m} \\ \overline{a}_{k1} & \overline{a}_{km} \end{pmatrix},$$

и векторов $\tilde{\dot{x}}_{\tilde{t}} = (\dot{x}_1(\tilde{t}), ..., \dot{x}_k(\tilde{t}))^*$, $\tilde{v} = (v_1, ..., v_k)^*$. При этом формула для построения оценки неизвестной части вектора характеристик состояния объекта $\hat{x}_{\tilde{t}}^{n-m}$, очевидно, сохраняет вид (7).

Таким образом, получен метод построения оценки неизвестной части вектора характеристик состояния объекта для стационарной системы управления, заданной системой линейных дифференциальных уравнений, при наличии известной другой части вектора характеристик состояния объекта. При этом в отличие от классической постановки задачи наблюдаемости учтена возможность наличия погрешностей в значениях производных характеристик состояния управляемого объекта.

The observation problem for the case of partially known object's state characteristics vector was solved within the Pareto-optimum approach. It is taken into the account that the known characteristics of the object's state vector could be distorted by errors.

1. *Калиткин М. М.* Численные методы. — М. : Наука, 1982. — 511 с.
2. *Заворотний А. Л.* Розв'язування задач моделювання ВОС надвисокої роздільної здатності на основі багатокритеріальної оптимізації // Вісн. Київського університету. Серія фіз.-мат. наук. — 2004. — № 3. — С. 198—205.

Поступила 06.02.09

ЗАВОРОТНЫЙ Андрей Леонидович, канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, который окончил в 1999 г. Область научных исследований — некорректные задачи, методы восстановления функциональных зависимостей, теория возможности, численные методы, проектирование измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения.

КАСЬЯНЮК Веда Станиславовна, канд. физ.-мат. наук, зав. сектором теоретической кибернетики факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, который окончила в 1983 г. Область научных исследований — методы регуляризации некорректных задач, методы многокритериальной оптимизации, математические методы обработки и интерпретации измерений, измерительно-вычислительные системы сверхвысокого разрешения.