



УДК 621.3:538.3

**О. Я. Коновалов**, аспирант  
Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический ин-т»  
(Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,  
тел.: (057) 7076052, E-mail: O.Y.Konovалov@gmail.com)

### **Определение формы соленоида по заданному граничному распределению магнитного поля**

*(Статью представил д-р техн. наук В. Д. Самойлов)*

Определена форма одновиткового соленоида, обеспечивающего заданное распределение импульсного магнитного поля на поверхности расположенного внутри него проводящего цилиндра. Форма центрального участка контура профиля соленоида рассчитана с помощью решения задачи продолжения магнитного потока с цилиндрической поверхности, а периферийные участки построены путем минимизации относительных расхождений заданного и получаемого распределений.

Визначено форму одновиткового соленоїда, що забезпечує заданий розподіл імпульсного магнітного поля на поверхні розташованого усередині нього провідного циліндра. Форму центральної ділянки контуру профілю соленоїда розраховано через розв'язання задачі подовження магнітного потоку з циліндричної поверхні, а периферійні ділянки побудовано через мінімізацію відносних розбіжностей заданого й отриманого розподілів.

*К л ю ч е в ы е с л о в а: профиль соленоида, импульсное магнитное поле, задача продолжения магнитного потока, относительные расхождения заданного и получаемого распределений, центральный и периферийные участки.*

При магнитно-импульсной обработке металлов [1] возникает задача определения профиля массивного одновиткового соленоида или концентратора магнитного поля, обеспечивающего заданные распределения магнитного поля и электродинамических усилий (ЭДУ), действующих на обрабатываемую заготовку. Для определенности рассмотрим задачу нахождения профиля массивного одновиткового соленоида, создающего на внешней поверхности соосной длинной проводящей оболочки радиуса  $R$  заданное распределение осевой составляющей вектора индукции импульсного магнитного поля  $B_z(R, z)$  (рис. 1). Токами смещения и влиянием радиального разреза, предназначенного для токоподвода к соленоиду, пренебрегаем. Магнитное поле полагаем плоскомеридианным, причем в цилиндрической системе координат ось  $z$

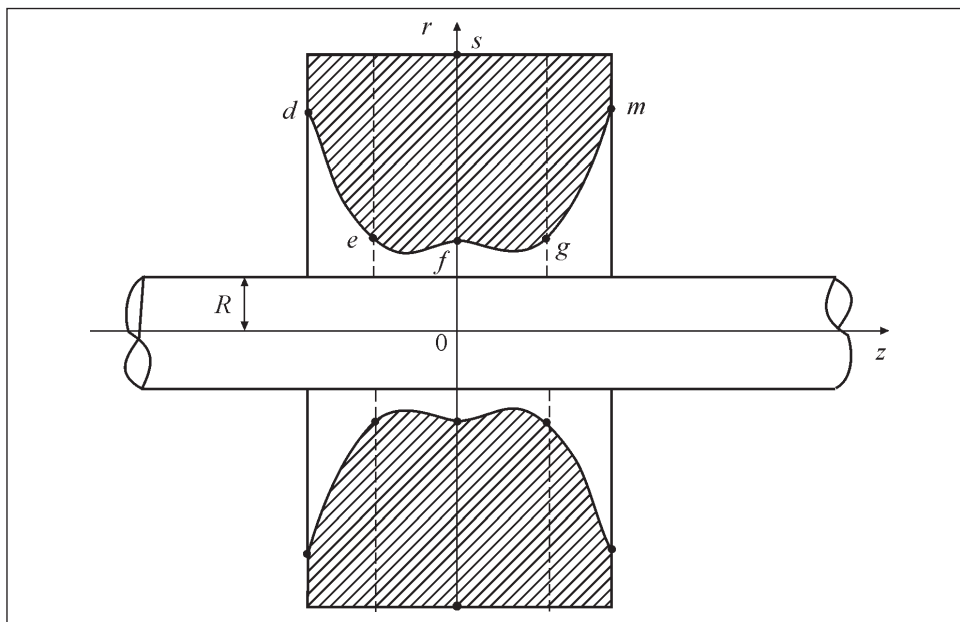


Рис. 1. Система соленоид — внутренняя соосная оболочка

совпадает с осью оболочки. В соленоиде и оболочке резко проявляется поверхностный эффект, а внешняя среда является непроводящей и немагнитной. Часть контура профиля соленоида, обращенную к заготовке, будем называть главной частью. Последняя имеет, как правило, сложную форму —  $defgm$  (см. рис. 1), и ее рассчитывают. Участок  $dsm$  достраивают исходя из конструктивных соображений.

Для определения главной части контура профиля используют постановку и аналитическое решение задачи продолжения магнитного потока  $\Phi(r, z)$ , а также последующую «металлизацию» силовых линий магнитного поля [2—4]. Следует заметить, что размер области сходимости несобственных интегралов вдоль координаты  $r$  в этом аналитическом решении относительно мал, поэтому получаемый из силовой линии участок контура может оказаться недостаточным для воспроизведения заданных распределений с допустимой погрешностью. Подобные затруднения могут возникнуть при решении задач продолжения поля и другими известными методами.

Для соленоида, представленного на рис. 1, только участок  $efg$  является частью силовой линии магнитного поля. Ограничение длины соленоида торцовыми участками, проходящими через точки  $e, g$  (их проекции показаны штриховыми линиями на рис. 1), приводит к резкому возрастанию

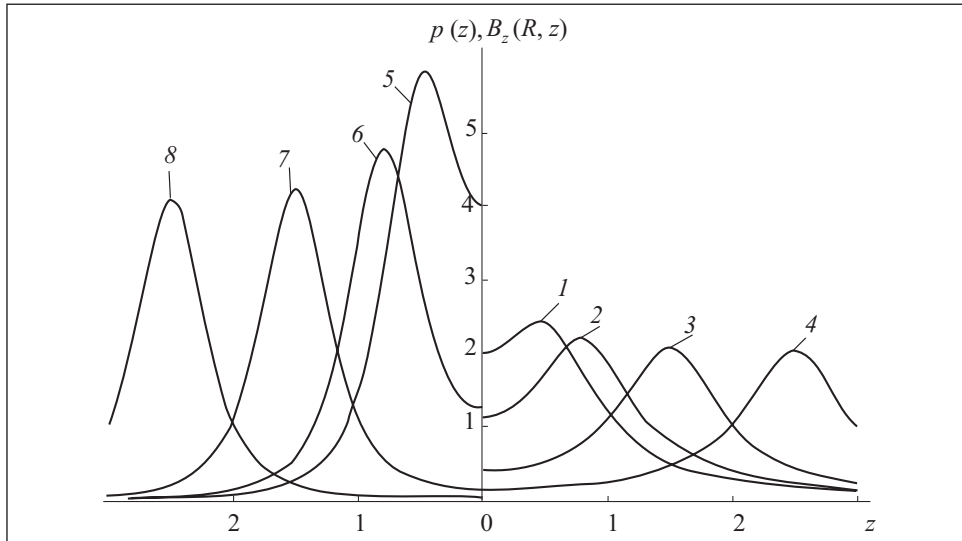


Рис. 2. Графики распределений  $B_z(R, z)$  и  $p(z)$  при  $b = 0,5$ : 1, 5 —  $a = 0,5$ ; 2, 6 —  $a = 0,7$ ; 3, 7 —  $a = 1,5$ ; 4, 8 —  $a = 2,5$

расхождений между заданным и получаемым распределениями поля под торцами соленоида. Покажем, как реализована идея достраивания периферийных участков главной части контура профиля (см. рис. 1, линии *de*, *gm*) путем минимизации этих расхождений.

**Математическая формулировка и аналитическое решение задачи.** Задача продолжения магнитного потока с граничной поверхности проводящей оболочки в окружающее пространство (задача Коши для уравнения эллиптического типа) в цилиндрических координатах [2, 3] состоит из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

и граничных условий

$$\Phi(R, z) = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 2\pi R B_z(R, z). \quad (3)$$

Пусть заданное распределение поля имеет вид

$$B_z(R, z) = \frac{b}{b^2 + (a-z)^2} + \frac{b}{b^2 + (a+z)^2}, \quad (4)$$

где  $a, b$  — постоянные.

На рис. 2 приведены кривые распределений  $B_z(R, z)$ , заданные безразмерной формулой (4), а также поверхностной плотности ЭДУ  $p(z)$ , действующих на оболочку в импульсном магнитном поле (величину  $p(z)$  условно называют давлением магнитного поля, и она связана с индукцией известным соотношением [1])

$$p(z) = \frac{B_z^2(R, z)}{2\mu_0},$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная). Из рис. 2 следует, что распределение (4) обеспечивает концентрацию ЭДУ на двух симметрично расположенных относительно координатной оси  $r$  участках поверхности оболочки, что бывает необходимо, например, при магнитно-импульсной сборке [1]. На рис. 2 показаны только симметричные половины распределений, величина  $p(z)$  безразмерна, причем  $P(z) = B_z^2(R, z)$ . Значения координат  $r, z$  на всех рисунках являются безразмерными и получены делением соответствующих размерных значений на величину  $R$ .

Из (4) следует, что функция  $B_z(R, z)$  — аналитическая, поэтому согласно теореме Ковалевской [5], решение задачи (1)—(3) существует и единственно. Опуская выкладки, записываем известное решение задачи (1) — (3) [2]:

$$\Phi(r, z) = 2rR\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} [I_1(\lambda r) K_1(\lambda R) - I_1(\lambda R) K_1(\lambda r)] F(\lambda) \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (5)$$

где  $I_1(\lambda r), K_1(\lambda r)$  — модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка;  $F(\lambda)$  — косинус-преобразование Фурье функции  $B_z(R, z)$ ,

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B_z(R, z) \cos(\lambda z) dz. \quad (6)$$

Для распределения (4) интеграл (6) берется аналитически [6]:

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi} \exp(-b\lambda) \cos(a\lambda). \quad (7)$$

В работе [2] показано, что несобственный интеграл решения (5) сходится, если модуль косинус-преобразования функции  $B_z(R, z)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  убывает как  $\exp(-\alpha\lambda)$ , а радиус сходимости несобственного интеграла  $r_{\text{сх}}$  оценивается неравенством  $r_{\text{сх}} < R + \alpha$ . Как следует из (7), для распределения (4)  $\alpha = b$ .

**Определение шага численного интегрирования  $h_\lambda$  по параметру преобразования.** Для вычисления несобственного интеграла решения (5) используем квадратурную формулу Симпсона. Особенностью (5) является

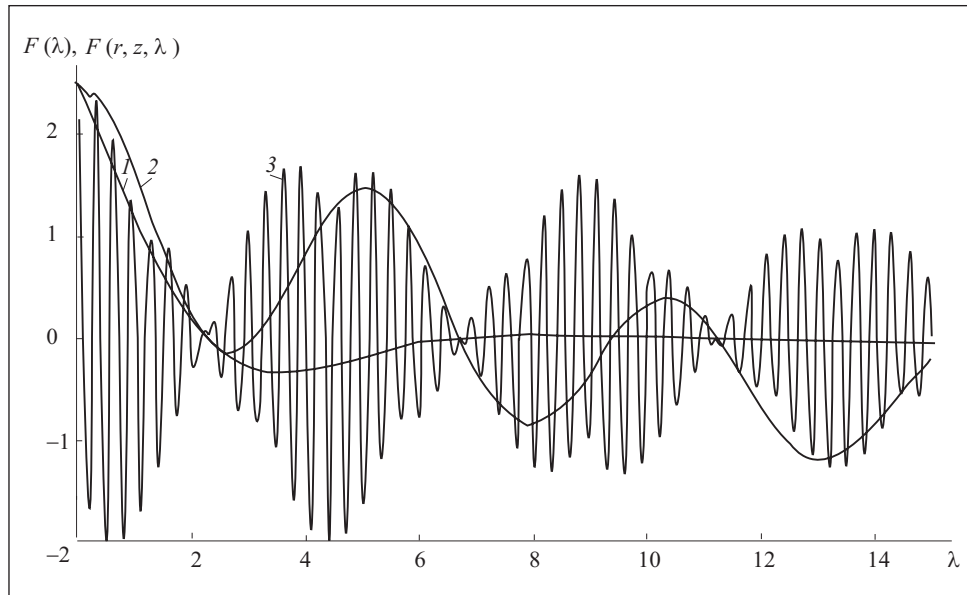


Рис. 3. Графики функции  $F(\lambda)$  (кривая 1) и подынтегрального выражения  $F(r, z, \lambda)$  (кривые 2, 3) решения (5) при  $a = 0,7$ ,  $b = 0,5$ ,  $r = 1,45$ : 2 —  $z = 0,5$ ; 3 —  $z = 20$

осцилляция значений подынтегрального выражения  $F(r, z, \lambda)$ , обусловленная множителями  $F(\lambda)$  и  $\cos(\lambda z)$ . Частота этих осцилляций, в случае отсутствия или при сравнительно низкой частоте осцилляций  $F(\lambda)$ , определяется значением координаты  $z$  точки наблюдения поля, в противном случае — частотой осцилляций  $F(\lambda)$ .

В случае граничного распределения (4) видим, что при  $z < a$  частота осцилляций  $F(r, z, \lambda)$  равна параметру распределения  $a$ , а координата  $z$  определяет частоту биений подынтегральной функции (рис. 3, кривая 2). При  $z > a$  частота осцилляций определяется координатой  $z$  точки наблюдения поля, а параметр  $a$  определяет биения (см. рис. 3, кривая 3). Для исключения погрешностей, вызванных чрезмерно большим шагом интегрирования, необходимо, чтобы произведения  $h_\lambda a$  и  $h_\lambda z$  были значительно меньше расстояний между двумя соседними нулями  $F(r, z, \lambda)$ , т. е.  $h_\lambda a \ll \pi$  или  $h_\lambda z \ll \pi$ .

Из последних неравенств следуют соотношения для выбора шага:

$$h_\lambda \ll \frac{\pi}{a} \text{ при } z < a,$$

$$h_\lambda \ll \frac{\pi}{z} \text{ при } z > a.$$

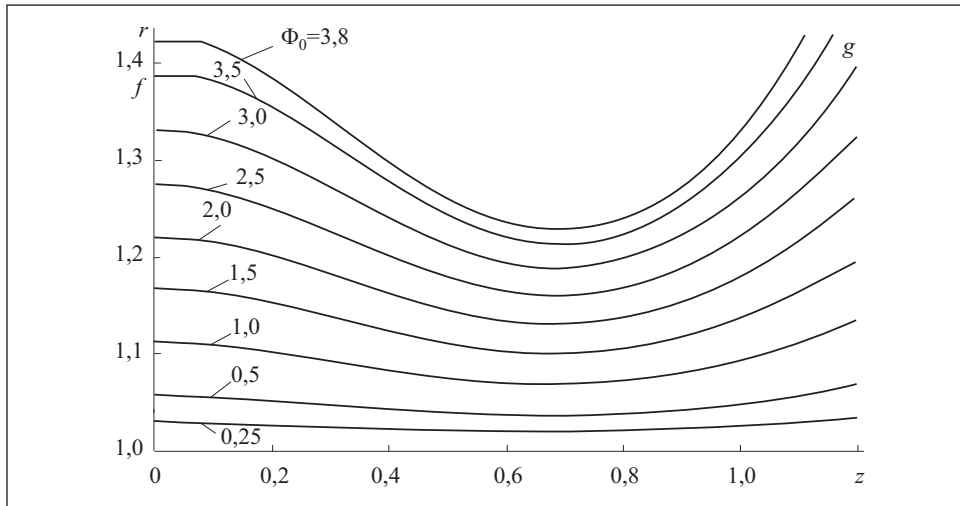


Рис. 4. Силовые линии магнитного поля, продолженного с цилиндрической граничной поверхности

Конечное значение верхнего предела интеграла (5)  $\lambda_m$  подбираем с помощью оценки погрешности, вносимой исключением участка интегрирования  $[\lambda_m, \infty)$ .

Следует заметить, что в случае отсутствия аналитического выражения для  $F(\lambda)$  возникает также необходимость корректного выбора шага  $h_z$  численного интегрирования выражения (6). Используя рассуждения, аналогичные приведенным в [7], получаем  $h_z \ll \pi/\lambda$ .

**Алгоритм построения силовых линий магнитного поля.** Используем алгоритм, аналогичный алгоритму построения эквипотенциальных линий электрического поля [7]. Уравнение силовой линии представим в виде

$$\Phi(r, z) = \Phi_0, \quad (8)$$

где  $\Phi_0$  — значение магнитного потока, соответствующее силовой линии.

Пусть требуется найти положение  $N$  точек силовой линии магнитного поля с координатами  $r_i, z_i, i = \overline{1, N}$ . Задаем последовательно значения координат  $z_i$  и подставляем их в (8) с учетом (5). Для каждого фиксированного значения  $z_i$  из (8) получаем уравнение для нахождения неизвестной координаты  $r_i$ , которое решаем методом хорд [8].

В итерационном алгоритме предусмотрен блок локализации корней  $r_i$ , с помощью которого находим сегмент  $(r_1^{(s)}, r_2^{(s)})$  с корнем  $r_i^{(s)}$  ( $s$  — номер приближения,  $s = 0, 1, 2, \dots$ ). При  $s = 0$ , используя уравнение прямой,

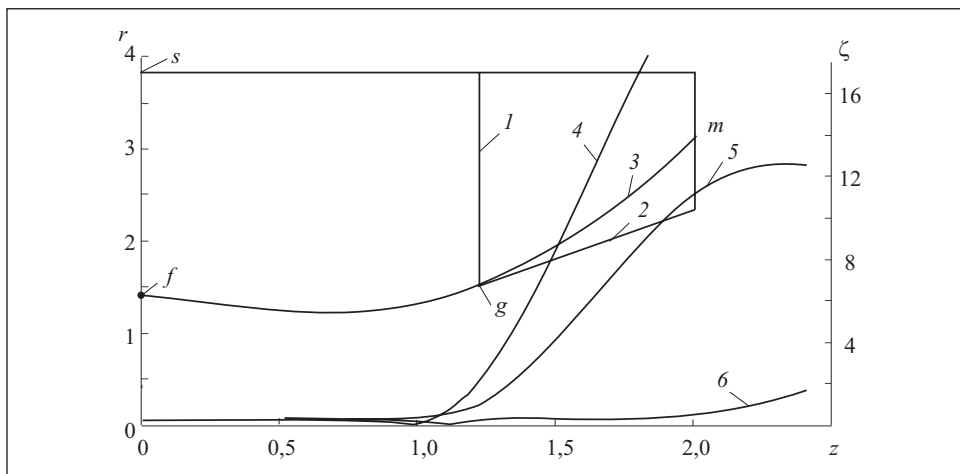


Рис. 5. Относительные расхождения заданного и получаемых распределений при различных формах периферийных участков

проходящей через точки  $(r_1^{(0)}, \Phi(r_1^{(0)}, z_i))$ ,  $(r_2^{(0)}, \Phi(r_2^{(0)}, z_i))$ , находим первое приближение корня  $r_i^{(1)}$ . После сравнения  $\Phi(r_i^{(0)}, z_i)$  и  $\Phi_0$  уточняем границы сегмента с искомым значением корня и находим следующее его приближение. Итерационная формула имеет такой вид:

$$r_i^{(s+1)} = \frac{(r_2^{(s)} - r_1^{(s)})(\Phi_0 - \Phi(r_1^{(s)}, z_i))}{\Phi(r_2^{(s)}, z_i) - \Phi(r_1^{(s)}, z_i)} + r_1^{(s)}.$$

Итерационный процесс прекращается при выполнении условия

$$|r_i^{(s+1)} - r_i^{(s)}| \leq \nu,$$

где  $\nu > 0$  — заданная погрешность.

Ограниченные участки силовых линий магнитного поля, построенные с помощью этого алгоритма и соответствующие заданному распределению (4) при  $b = 0,5$ ,  $a = 0,7$  (см. рис. 2, кривая 2), показаны на рис. 4, где для всех кривых  $r_{cx} < 1,5$ .

Анализируя заданное распределение, находим координату  $z$  точки граничной поверхности, в которой значение  $B_z(R, z)$  на порядок меньше наибольшего значения этой функции. Учитывая, что давление магнитного поля в этой точке пренебрежимо мало, ограничиваем длину соленоида удвоенным значением этой координаты.

**Определение формы периферийных участков.** Центральный участок главной части контура профиля выполняем по форме одной из силовых линий. В точке центрального участка, расположенной вблизи границы области сходимости несобственного интеграла решения проводим касательную до пересечения с образующей торцовой части и получаем контур периферийного участка профиля первого приближения (рис. 5, кривая 2). На граничной поверхности цилиндра под периферийным участком наносим равномерную сетку с координатами узловых точек:

$$z_i = z_{i-1} + h_z, \quad i=1, \dots, N_{\text{п}},$$

где  $h_z$  — шаг сетки; индекс «п» означает принадлежность точек к периферийному участку. Для получения соответствующих узловых точек на контуре профиля соленоида в каждой  $i$ -й точке граничной поверхности оболочки восстанавливаем перпендикуляры до пересечения с периферийным участком. Радиальные координаты точек периферийного участка  $s$ -го приближения  $r_i^{(s)}$  ( $s=1, 2, \dots$ ) находим так:

$$r_i^{(s)} = r_{i-1}^{(s)} + h_i^{(s)}, \quad h_i^{(s)} = h_{i-1}^{(s)} + \xi^{(s)} h_i^{(1)}, \quad i=1, \dots, N_{\text{п}}, \quad (9)$$

где  $h_i^{(s)}$  — приращение радиальной координаты между соседними узловыми точками периферийного участка профиля  $s$ -го приближения;  $\xi^{(s)}$  — варьируемый параметр.

Для профиля первого приближения ( $s=1$ )  $\xi^{(s)} = 0$ , а величина  $h_i^{(1)}$  одинакова для всех точек. Находим получаемое с помощью соленоида этого профиля распределение осевой составляющей индукции магнитного поля на поверхности оболочки, используя интегральное уравнение первого рода [2]

$$\int_l B_{\tau}(M) \sqrt{r_M} K(Q, M) dl_M = \begin{cases} -\frac{\Phi_0}{\sqrt{r_Q}}, & Q \in l_1; \\ 0, & Q \in l_2, \end{cases} \quad (10)$$

где  $l_1, l_2$  — контуры соответственно меридианного сечения соленоида и образующей внешней поверхности оболочки;  $l$  — суммарный контур,  $l = l_1 + l_2$ ;  $dl_M$  — элемент контура с центром в текущей точке  $M$ ;  $Q$  — точка наблюдения;  $K(Q, M)$  — ядро;  $r_M, r_Q$  — радиальные координаты точек, указанных в индексах.

Интегральное уравнение (10) преобразуем в систему линейных алгебраических уравнений и решаем с помощью стандартной подпрограммы LSARG математической библиотеки FORTRAN IMSL [9].



Относительные расхождения между получаемым и заданным распределениями поля на поверхности оболочки находим по формуле

$$\zeta_i = \left| \frac{B_z(R, z_i)|_3 - B_z(R, z_i)|_п}{B_z(R, z_i)|_3} \right| 100 \%,$$

где индексы «з» и «п» соответствуют заданному и получаемому распределениям индукции магнитного поля в  $i$ -й точке граничной поверхности. Значения  $\zeta_i$  для профиля соленоида с периферийным участком первого приближения достигают 11 % (см. рис. 5, кривая 5). Для уменьшения этой величины используем итерационный алгоритм, основанный на методе половинного деления [8]. При этом, изменяя параметр  $\xi^{(s)}$  в формуле (9) вблизи нуля, добиваемся минимума  $\sum_{i=1}^{i=N_п} \zeta_i$ .

При реализации алгоритма в качестве центрального участка главной части контура была выбрана кривая  $\Phi_0 = 3,5$  на рис. 4. Результаты расчетов показали, что изменение формы периферийных участков несущественно влияет на значения  $\zeta_i$  под центральным участком (см. рис. 5, кривые 4 — б). В результате применения алгоритма получен периферийный участок, представленный кривой 3 на рис. 5. Значение параметра  $\xi^{(s)}$ , обеспечивающее минимум  $\sum_{i=1}^{i=N} \zeta_i$ , составило 0,016503, а соответствующие такому контуру профиля соленоида значения  $\zeta_i$  не превосходят долей процента (см. рис. 5, кривая б).

**Выводы.** 1. При недостаточном размере области сходимости решения задачи продолжения поля с граничной поверхности погрешности воспроизведения заданного распределения могут быть значительно уменьшены при выборе формы периферийных участков.

2. Форма периферийных участков главной части контура профиля массивного одновиткового соленоида может быть определена минимизацией сумм относительных расхождений заданного и получаемого распределений магнитного поля в совокупности точек граничной поверхности под этими участками относительно некоторого параметра, с помощью которого она варьируется.

The shape of the single-turn coil providing the given pulse magnetic field distribution on the surface of coaxial interior conductive cylinder is determined. The form of the central section of the coil shape is calculated by solving the problem of the magnetic flow continuation from the cylinder surface, and peripheral sections are completed by minimization of relativity distortions between given and obtained distributions.

1. Бельй И. В., Фертик С. М., Хименко Л. Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. — Харьков : Вища школа, 1977. — 168 с.
2. Минаков Э. А., Михайлов В. М. Продолжение потока с поверхности цилиндра по заданной индукции магнитного поля // Техническая электродинамика. — 1994. — № 5 — 6. — С. 6 — 9.
3. Михайлов В. М. Определение профилей электродов и соленоидов для создания заданных распределений поля // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск «Проблеми сучасної електротехніки». Ч. 6.— 2000. — С. 13—16.
4. Михайлов В. М. Продолжение магнитного потока и потенциала плоскомеридианных полей с плоской поверхности // Электричество. — 2002. — № 10. — С. 58—64.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. — М.-Л. : ГИТТЛ, 1951. — 804 с.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М. : Наука, 1986. — 544 с.
7. Коновалов О. Я., Михайлов В. М. Определение формы электрода по дискретно заданному граничному распределению поля // Электрон. моделирование. — 2007. — 29, № 3. — С. 71—81.
8. Ракиткин В. И., Первушин В. Е. Практическое руководство по методам вычислений с применением программ для персональных компьютеров: Учеб. пособие. — М. : Высш. школа, 1998. — 383 с.
9. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч. 1. — М. : Диалог-МИФИ, 2000. — 448 с.

Поступила 01.08.08

*КОНОВАЛОВ Олег Ярославич, аспирант кафедры инженерной электрофизики Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т», магистратуру которого окончил в 2006 г. Область научных исследований — методы математического моделирования электрических и магнитных полей, решение некорректных задач математической физики, техника сильных электрических и магнитных полей.*